03

# Математическая модель фракционирования малоконцентрированной дисперсной фазы суспензии в плоском вертикальном гидроклассификаторе

© А.В. Ряжских

Воронежский государственный технический университет,
394026 Воронеж, Россия
e-mail: ryazhskihav@bk.ru

Поступило в Редакцию 9 января 2020 г.
В окончательной редакции 18 февраля 2020 г.
Принято к публикации 19 февраля 2020 г.

На основе гипотезы о непрерывном континууме и балансе потоков фаз предложена математическая модель переноса малоконцентрированной суспензии при отсутствии перемешивания в плоском вертикальном гравитационном классификаторе с ламинарным режимом течения несущей среды без ограничения на скорость седиментации частиц. Получены аналитические соотношения для расчета локальных счетных функций плотности распределения частиц по размерам. Вычислительный эксперимент подтвердил фракционирование монодисперсной суспензии и присутствие мелких частиц в „тяжелой“ фракции полидисперсных суспензий из-за малых значений скорости дисперсионной среды у „смоченных“ поверхностей гидроклассификатора. Результаты согласуются с известными экспериментальными данными и расчетами по классическим кинетическим моделям.

**Ключевые слова:** математическая модель, классификатор, суспензия, седиментация, дисперсная фаза, полидисперсность, функция распределения частиц по размерам.

DOI: 10.21883/JTF.2020.08.49536.3-20

## Введение

Сепарация фаз при течении гетерогенных сред в вертикальных аппаратах широко используется в химической и пищевой технологиях, в биохимической, нефтегазовой и металлургической промышленности, а также в экологии [1,2]. Ключевым параметром, влияющим на производительность оборудования, является скорость классификации одной фазы относительной другой [3], в результате чего происходит фракционирование частиц суспензии. В основе гравитационного фракционирования взвеси лежит процесс седиментации, основанный на действии силы тяжести и разнице плотностей фаз [4], который реализуется в различного типа гидроклассификаторах [5], причем эффективность их функционирования зависит от физико-химических характеристик суспензии, геометрических параметров оборудования и величин потоков фаз.

Моделирование явлений переноса в гидроклассификаторах обычно осуществляется в рамках двух подходов — эйлеро-эйлеровского и лагранжево-эйлеровского. Первый — наиболее часто применяемый — основан на гипотезе континуума, т. е. движение каждой фазы описывается уравнениями непрерывности и движения [6,7], причем идентификация межфазного взаимодействия остается нерешенной до конца проблемой. Другой заключается в использовании дискретной модели дисперсной фазы, которая отслеживает поведение каждой частицы, а гипотеза континуума формализует гидродинамику дисперсионной среды [8]. Использование такого подхода возможно в случае малых концентраций дисперсной фазы, так как увеличение числа частиц приводит к пропорциональному увеличению времени расчета. В последнее время стал также развиваться подход с применением стохастических методов [9].

Перечисленные стратегии требуют существенных усилий при проведении многовариантных вычислительных экспериментов, поэтому на проектных стадиях разработки гидроклассификаторного оборудования необходим альтернативный аналитический инструментарий оценок выбора диапазонов варьирования основных конструкционных и режимных характеристик, в основу которого должны быть положены модели, по крайне мере, в линейном приближении корректно описывающие физическую картину процессов в гидроклассификаторах. Наиболее часто используемая модель, удовлетворяющая таким требованиям, основана на кинетических балансовых соотношениях [10], однако ее затруднительно адаптировать на полидисперсный случай. Тем не менее дальнейшее ее развитие пошло по пути обобщения на случай счетного количества фракций с одновременным учетом их взаимодействия [11], но возможность определения локальной функции распределения частиц по размерам в сепарационных зонах гидроклассификаторов по-прежнему отсутствует. Решение такой задачи возможно в рамках гипотезы непрерывного континуума с использованием балансовых соотношений в дифференциальной форме и принципа суперпозиции концентрационных полей для малоконцентрированной дисперсной фазы [12].

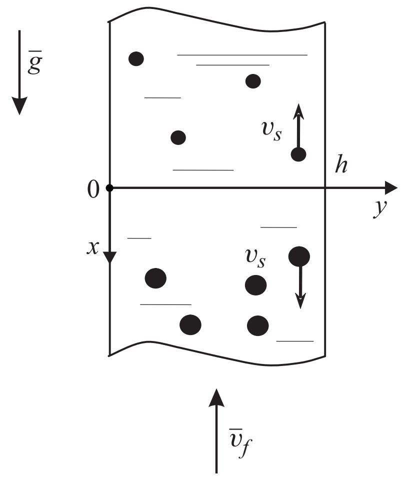


**Рис. 1.** Расчетная схема плоского вертикального гидроклассификатора.

## Постановка задачи

В плоский вертикальный гидроклассификатор шириной $h$ [m] подается установившийся ламинарный поток ньютоновской несжимаемой среды с известной динамической вязкостью $\mu_f$ [Pa·s] и плотностью $\rho_f$ [kg/m$^3$] со средней скоростью $\overline{v}_f$[m/s] в направлении, противоположном действию вектора силы тяжести $\overline{g}$ [m/s$^2$] (рис. 1). В выбранной 2*D*-декартовой системе координат при $x = 0$ диспергируется малоконцентрированная полидисперсная взвесь твердых частиц с текущим размером $l$ [m], плотностью $\rho_s$ [kg/m$^3$], коэффициентом формы $k_V$ и с седиментационной скоростью $v_s$ [m/s]. Идеальные условия изотермического фракционирования дисперсной фазы таковы: осадок на стенках гидроклассификатора не образуется; перемешивание несущей среды, а также взаимодействие и кластеризация [13] частиц пренебрежимо малы, как и влияние начального гидродинамического участка; в связи с этим эффект Сегре–Зильберберга [14], а также силы Сафмана [15], Магнуса [16] и Боссе [17] не учитываются.

Для малоконцентрированной монодисперсной суспензии из рассмотрения баланса потоков фаз в характерном элементарном объеме и с учетом принятых допущений сформулирована начально-краевая задача для уравнения переноса

$$\frac{\partial n(x,y,\tau)}{\partial \tau} = -u(y)\,\frac{\partial n(x,y,\tau)}{\partial x}, \qquad (1)$$

с условиями отсутствия в начальный момент времени в вертикальном гидроклассификаторе частиц

$$n(x,y,0) = 0; \qquad (2)$$

и постоянства их концентрации в месте диспергирования

$$n(0,y,\tau) = n_0 = \text{const}, \qquad (3)$$

где при $u(y) = v_s - v_f(y) \ge 0$ интегрирование системы (1)–(3) осуществляется в области $\Omega^+(x,y) = \{0 \le x < \infty, 0 \le h \le h\}$, а при $u(y) = v_s - v_f(y) < 0$ — в области $\Omega^-(x,y) = \{-\infty < x \le 0, 0 \le y \le h\}$; $\tau$ — текущее время [s]; $v_f(y)$ — локальная скорость несущей среды [m/s]; $n(x,y,\tau)$ — счетная концентрация частиц [m$^{-3}$].

Суперпозиция концентрационных полей фракций, найденных из решения системы (1)–(3), позволяет определить локальные функции плотности распределения частиц по размерам.

## Анализ

Вначале проанализирован случай монодисперсной суспензии. Скорость стабилизированного восходящего ламинарного течения в вертикальном плоском канале такова [18]:

$$v_f(y) = \frac{h^2}{2\mu_f}\left(-\frac{dp}{dx} + \rho_f g\right)\left[\left(\frac{y}{h}\right)^2 - \frac{y}{h}\right], \qquad (4)$$

где $p$ — давление [Pa]. Связь седиментационного числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_s = v_s l \rho_f/\mu_f$ с числом Архимеда $\mathrm{Ar} = l^3\rho_f(\rho_s - \rho_f)g/\mu_f^2$ для ламинарного ($10^{-4} \le \mathrm{Re}_s < 2$), переходного $2 \le \mathrm{Re}_s \le 500$ и турбулентного ($\mathrm{Re}_s > 500$) режимов осаждения есть [19]

$$\mathrm{Re}_s = \frac{\mathrm{Ar}}{18 + 0.61\sqrt{\mathrm{Ar}}}$$

откуда

$$v_s = \frac{\mu_f}{l\rho_f}\cdot\frac{\mathrm{Ar}}{18 + 0.61\sqrt{\mathrm{Ar}}}. \qquad (5)$$

Относительная скорость гидроклассификации, нормированная на среднюю скорость $\overline{u} = v_s - \overline{v}_f$, составляет

$$U(Y) = \frac{u(y)}{\overline{u}} = [1 - 6\mathrm{Rs}\cdot Y\cdot(1 - Y)]/(1 - \mathrm{Rs}), \qquad (6)$$

где $Y = y/h$, а безразмерный критерий

$$\mathrm{Rs} = -\frac{h^2}{12\mu_f}\left(-\frac{dp}{dx} + \rho_f g\right)\Big/\left(\frac{\mu_f}{l\rho_f}\cdot\frac{\mathrm{Ar}}{18 + 0.61\sqrt{\mathrm{Ar}}}\right) \qquad (7)$$

характеризует величину отношения средней скорости восходящего потока несущей среды в вертикальном плоском гидроклассификаторе к скорости седиментации частиц размера $l$.

Безразмерное концентрационное поле, как результат интегрирования системы (1)–(3), имеет вид

$$N(X,Y,\theta) = \begin{cases} 1_+[\theta\cdot U(Y) - X], & X \ge 0 \text{ при } U(Y) \ge 0; \\ 1_+[X - \theta\cdot U(Y)], & X < 0 \text{ при } U(Y) < 0; \end{cases} \qquad (8)$$

где $\theta = \overline{u}\tau/h$; $X = x/h$; $N(X,Y,\theta) = n(x,y,\theta)/n_0$; $1_+[\ldots]$ — ассиметричная единичная функция Хэвисайда [20]. Упрощение выражения (8) с использованием модельных представлений о движении

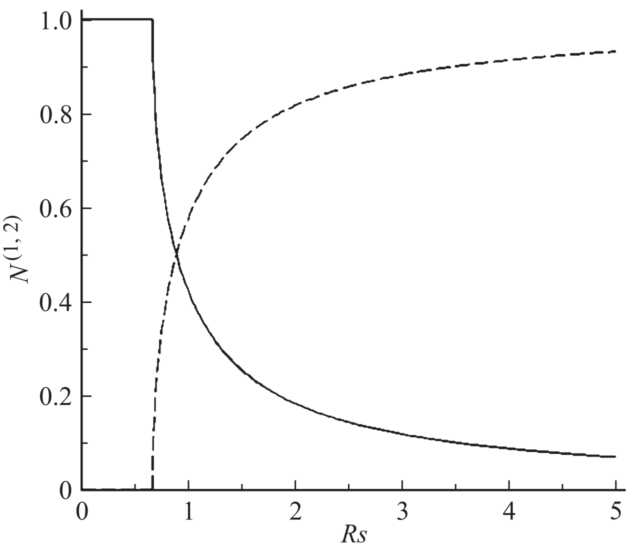


**Рис. 2.** Фракционирование монодисперсной суспензии в вертикальном гидроклассификаторе: — „нижний“ отбор частиц; — — „верхний“ отбор частиц.

несущей среды в режиме идеального вытеснения приводит к существенной неточности, особенно в случае геометрически компактных гидроклассификаторов. Из рассмотрения режима стационарного функционирования гидроклассификатора, т.е. $X/\theta \ll 1$, и проведения процедуры осреднения по поперечной координате $Y$, из (8) следуют выражения для концентраций частиц в „нижней“ и „верхней“ зонах отбора соответственно

$$N^{(1)} = \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - 2/(3 \cdot \mathrm{Rs})}, & \text{при } \mathrm{Rs} \geq 2/3; \\ 1, & \text{при } 0 \leq \mathrm{Rs} < 2/3, \end{cases}$$

$$N^{(2)} = \begin{cases} \sqrt{1 - 2/(3 \cdot \mathrm{Rs})}, & \text{при } \mathrm{Rs} \geq 2/3; \\ 1, & \text{при } 0 \leq \mathrm{Rs} < 2/3, \end{cases}$$

Анализ показывает (рис. 2), что при учете реального профиля несущей среды наблюдается процесс псевдофракционирования монодисперсной взвеси из-за неравномерности профиля скорости. Если определить коэффициент сепарации, как $\xi = N^{(1)}/N^{(2)}$, и сравнить его значения с результатами пилотного эксперимента [21] по осаждению монодисперсных частиц карбоната кальция размеров 10, 25, 50, 100 и 250 $\mu$m в восходящем водном потоке в вертикальном гидроклассификаторе со скоростью $\overline{v}_f = 7.5 \cdot 10^{-3}$ m/s (рис. 3), то некоторое отличие для фракции мелких частиц может быть объяснено иным условием входа несущей среды (с разворотом потока), вызывающим отклонение от ламинарного течения дисперсионной фазы [22].

Пусть при $X = 0$ в гидроклассификатор диспергируется полидисперсная взвесь с функцией распределения $f_0(l)$ [m$^{-4}$] и со среднечисленным размером

$$\overline{l}_N = \int\limits_0^\infty l f_0(l) dl \bigg/ \int\limits_0^\infty f_0(l) dl.$$

Введение безразмерных параметров:

$$\overline{\theta} = \overline{u}(\overline{l}_N)\tau/h; \quad L = l/\overline{l}_N; \quad \overline{\mathrm{Ar}} = \overline{l}_N^3 \rho_f(\rho_s - \rho_f) g/\mu_f^2$$

и применение принципа суперпозиции концентрационных полей к (8) дает выражение для локальной безразмерной функции распределения частиц по относительным размерам

$$F_N(X, Y, L, \overline{\theta}) = F_{N_0}(L) \times \begin{cases} 1_+[\overline{\theta} \cdot U(Y) - X], & X \geq 0 \text{ при } U(Y) \geq 0; \\ 1_+[X - \overline{\theta} \cdot U(Y)], & X < 0 \text{ при } U(Y) < 0; \end{cases} \quad (9)$$

где $F_N(X, Y, L, \overline{\theta}) = \overline{l}_N f(x, y, l, \tau) \Big/ \int\limits_0^\infty f(x, y, k, \tau) dl$;

$$F_{N_0(L)} = \overline{l}_N f_0(l) \Big/ \int\limits_0^\infty f_0(l) dl;$$

$$U(Y, L) = \left( L^2 \frac{18 + 0.61\sqrt{\overline{\mathrm{Ar}}}}{18 + 0.61 L \sqrt{L \cdot \overline{\mathrm{Ar}}}} \right)^2 \times \left[ 1 - 6\overline{\mathrm{Rs}} Y(1 - Y) \Bigg/ \left( L^2 \frac{18 + 0.61\sqrt{\overline{\mathrm{Ar}}}}{18 + 0.61 L \sqrt{L \cdot \overline{\mathrm{Ar}}}} \right) \right];$$

$$\overline{\mathrm{Rs}} = -\frac{h^2}{12\mu_f} \left( -\frac{dp}{dx} + \rho_f g \right) \Bigg/ \left( \frac{\mu_f}{\overline{l}_N \rho_f} \cdot \frac{\overline{\mathrm{Ar}}}{19 + 0.61\sqrt{\overline{\mathrm{Ar}}}} \right),$$

$f(x, y, l, \tau)$, $f_0(l)$ — локальная и диспергируемая счетные функции распределения частиц по размерам [m$^{-4}$].

Для оценки фракционного состава суспензии по координате $X$ необходима осредненная по поперечному сечению классификатора безразмерная нормированная

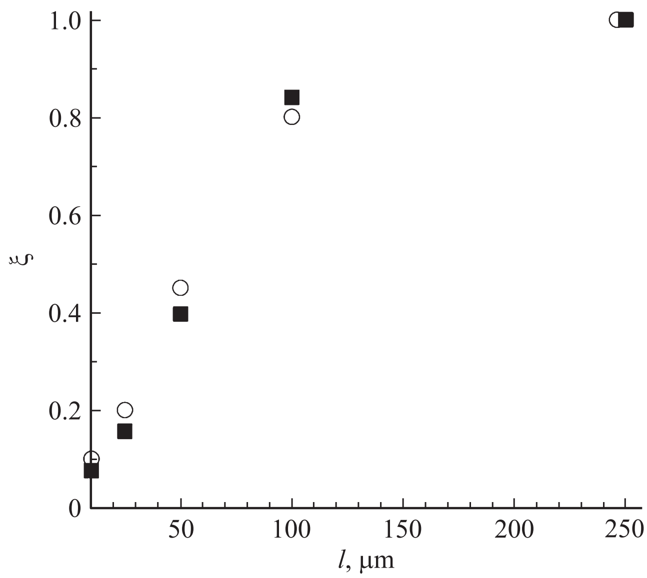


**Рис. 3.** Коэффициент сепарации монодисперсной взвеси: ○ — эксперимент [21]; ■ — расчет по модели.

функция плотности распределения частиц по относительным размерам

$$\overline{F}_N(X, L, \overline{\theta}) = \int\limits_0^1 F_N(X, Y, L, \overline{\theta})dY. \qquad (10)$$

Если в (9) ввести систему обозначений

$$C = B/A; \quad A = ab; \quad B = a - X,$$

$$a = \overline{\theta}\left(L^2 \frac{18 + 0.61\sqrt{\overline{\mathrm{Ar}}}}{18 + 0.61L\sqrt{L\cdot\overline{\mathrm{Ar}}}}\right)^2,$$

$$b = 6\overline{\mathrm{Rs}}\left(L^2 \frac{18 + 0.61\sqrt{\overline{\mathrm{Ar}}}}{18 + 0.61L\sqrt{L\cdot\overline{\mathrm{Ar}}}}\right),$$

то результат интегрирования (10) будет

для $X \geq 0$ и $U(Y, L) \geq 0$

$$\overline{F}_N^{(1)}(X, L, \overline{\theta}) = \overline{F}_{N_0}(L)\begin{cases}1 - Y_1, & \text{при } C < 0;\\ 1 - Y_1 + Y_2, & \text{при } 0 \leq C \leq 1/4;\\ 0, & \text{при } C > 1/4,\end{cases} \qquad (11)$$

для $X < 0$ и $U(Y, L) < 0$

$$\overline{F}_N^{(2)}(X, L, \overline{\theta}) = \overline{F}_{N_0}(L)\begin{cases}Y_1, & \text{при } C < 0;\\ Y_1 - Y_2, & \text{при } 0 \leq C \leq 1/4;\\ 0, & \text{при } C > 1/4,\end{cases} \qquad (12)$$

где $Y_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 - C}$.

Пусть $H_1 = h_1/h$ и $H_2 = h_2/h$ — относительные аксиальные размеры зон классификации для $X \geq 0$ и $X < 0$ соответственно, тогда оценка времени наступления стационарного процесса фракционирования может быть найдена из условия, например, 1%-го отклонения от нестационарного, т. е.

$$\overline{\theta} = 100\max(H_1, H_2)$$

$$\text{или} \quad \tau = 100(18 + 0.61\sqrt{\overline{\mathrm{Ar}}})\cdot\frac{\overline{l}_N\rho_f}{\mu_f\overline{\mathrm{Ar}}}\max(h_1, h_2). \qquad (13)$$

Практический интерес представляет случай, когда $H_{1,2} \ll \overline{\theta}$, поэтому из (11) и (12) следуют соотношения:

для $X \geq 0$

$$\overline{F}_N^{(1)}(L) = F_{N_0}(L)$$
$$\times\begin{cases}1 - \sqrt{1 - \frac{2L^2}{2\overline{\mathrm{Rs}}}\frac{18+0.61\sqrt{\overline{\mathrm{Ar}}}}{18+0.61L\sqrt{L\cdot\overline{\mathrm{Ar}}}}}, & \text{или } 0 \leq L \leq L^*;\\ 1, & \text{или } L > L^*;\end{cases} \qquad (14)$$

для $X < 0$

$$\overline{F}_N^{(2)}(L) = F_{N_0}(L)$$
$$\times\begin{cases}\sqrt{1 - \frac{2L^2}{2\overline{\mathrm{Rs}}}\frac{18+0.61\sqrt{\overline{\mathrm{Ar}}}}{18+0.61L\sqrt{L\cdot\overline{\mathrm{Ar}}}}}, & \text{или } 0 \leq L \leq L^*;\\ 0, & \text{или } L > L^*;\end{cases} \qquad (15)$$

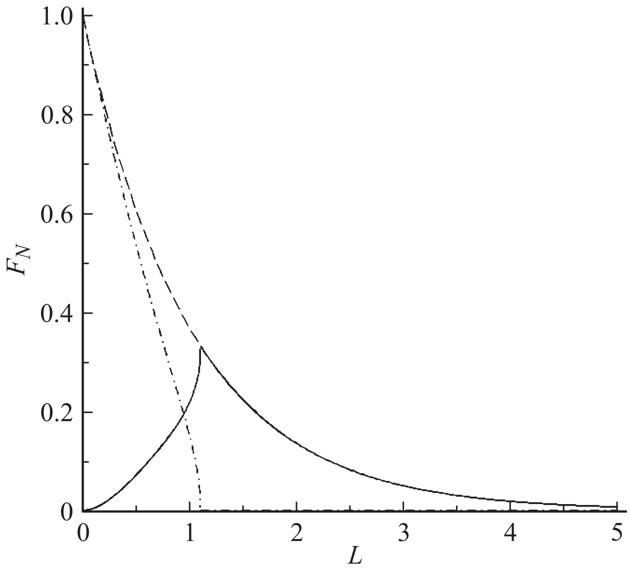


**Рис. 4.** Функции распределения частиц по размерам в классификаторе при $\overline{\mathrm{Ar}} = 10$ и $\overline{\mathrm{Rs}} = 0.8$: — — исходная; $-\cdot-$ „тяжелых“ фракций; — „легких“ фракций.

где $L^*$ — корень уравнения

$$\frac{2L^2}{3\mathrm{Rs}}\frac{18 + 0.61\sqrt{\cdot\overline{\mathrm{Ar}}}}{18 + 0.61L\sqrt{L\cdot\overline{\mathrm{Ar}}}} = 1.$$

Для исходной экспоненциальной функции распределения ($F_{N_0} = \exp(-L)$, $L \in [0.10]$), которой наиболее часто подчиняются природные дисперсные материалы [23], вид функций распределения „тяжелых“ (14) и „легких“ (15) фракций на выходе из классификатора (рис. 4) подтверждает качественную адекватность предложенной модели процессу фракционирования. Детальный количественный анализ результирующих функций проведен с помощью их числовых характеристик с предварительным переформатированием (14) и (15) к нормированному виду

$$\overline{F}_{N_n}^{(1,2)}(L) = \overline{F}_{N_n}^{(1,2)}(L)\Big/\int\limits_0^\infty \overline{F}_N^{(1,2)}(L)dL,$$

для которых определены относительные среднечисленные размеры частиц

$$\overline{L}^{(1,2)} = \int\limits_0^\infty L\overline{F}_{N_n}^{(1,2)}(L)dL$$

и среднеквадратические отклонения от них

$$\sigma^{(1,2)} = \left[\int\limits_0^\infty\left(L - \overline{L}^{(1,2)}\right)^2\overline{F}_{N_n}^{(1,2)}(L)dL\right]^{1/2}.$$

На всех гидродинамических режимах седиментации (рис. 5) для „тяжелых“ фракций наблюдается максимум относительно среднего размера частиц, когда

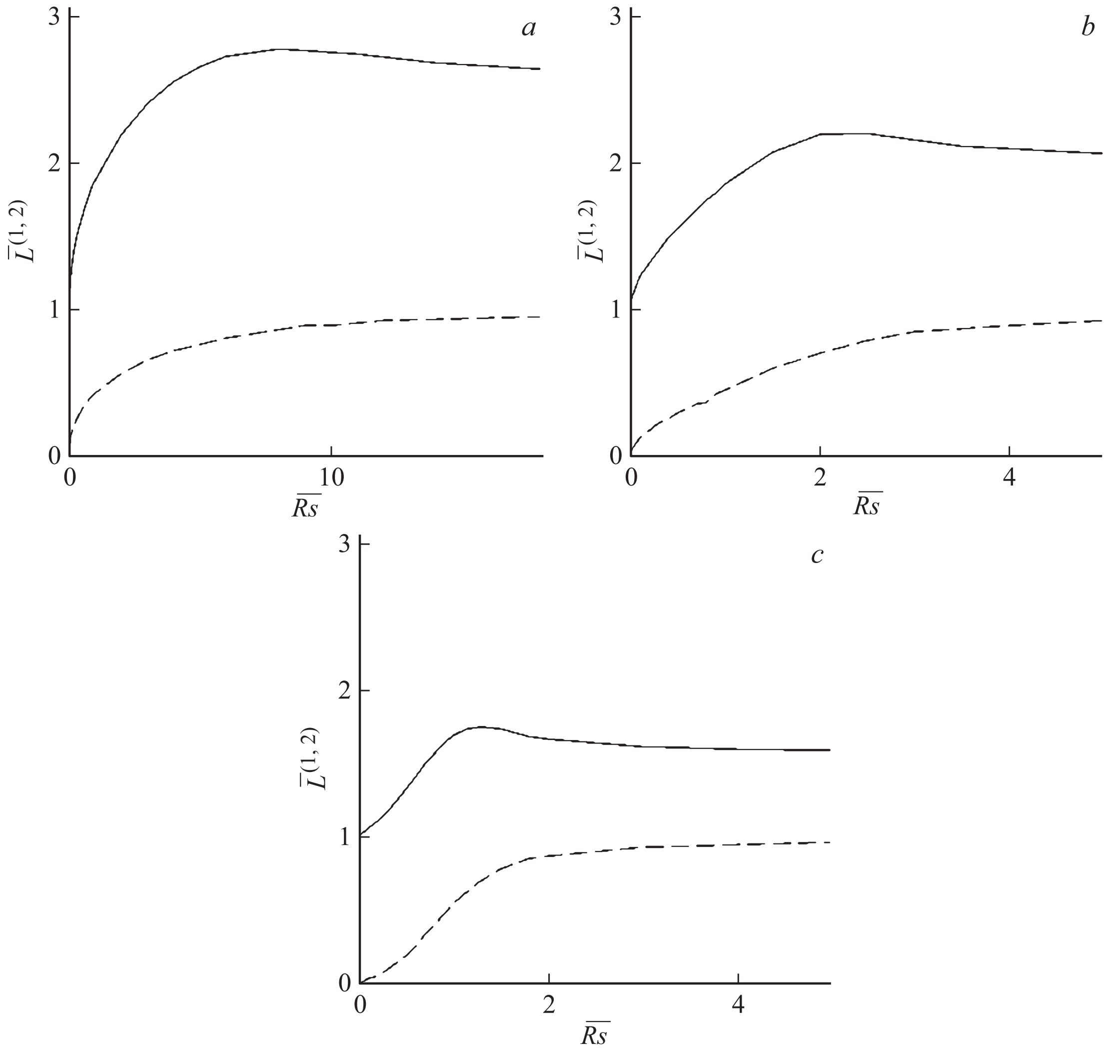


**Рис. 5.** Изменение относительных среднечисленных размеров частиц „тяжелой“ и „легкой“ фракций в зависимости от отношения средней скорости несущей среды и скорости седиментации частиц среднечисленного размера исходной функции распределения, диспергируемой в классификатор, для различных режимов седиментации: *a* — ламинарный ($\overline{\mathrm{Ar}} = 10$); *b* — переходный ($\overline{\mathrm{Ar}} = 10^3$); *c* — турбулентный ($\overline{\mathrm{Ar}} = 10^6$); — $\overline{L}^{(1)}$; — — $\overline{L}^{(2)}$.

**Таблица 1.** Среднеквадратическое отклонение от среднечисленных относительных раз меров частиц „тяжелой“ и „легкой“ фракций для различных режимов седиментации

| Режимы | Ламинарный | | Переходный | | Турбулентный | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{\mathrm{Ar}}$ | 10 | | $10^3$ | | $10^6$ | |
| $\overline{\mathrm{Rs}}$ | $\sigma^{(1)}$ | $\sigma^{(2)}$ | $\sigma^{(1)}$ | $\sigma^{(2)}$ | $\sigma^{(1)}$ | $\sigma^{(2)}$ |
| 0.2 | 1 | 0.14 | 1.00 | 0.11 | 0.99 | 0.04 |
| 0.6 | 1.02 | 0.24 | 1.02 | 0.23 | 1.03 | 0.22 |
| 1 | 1.05 | 0.3 | 1.07 | 0.34 | 1.18 | 0.46 |
| 3 | 1.2 | 0.52 | 1.39 | 0.81 | 1.24 | 0.94 |
| 5 | 1.36 | 0.66 | 1.31 | 0.92 | 1.21 | 0.97 |

средняя скорость несущей среды превосходит скорость седиментации среднечисленного размера частиц исходной функции распределения, причем с увеличением $\overline{\mathrm{Ar}}$ величина $\overline{\mathrm{Rs}}$, соответствующая этому максимуму, уменьшается. Для „легких“ фракций такого эффекта не обнаруживается. Это может быть объяснено тем, что в пристеночной области скорость течения несущей среды мала и поэтому в $\overline{F}^{(1)}_{N_n}$ присутствуют все фракции твердой фазы, а для „легкой“ фракции увеличение $\overline{L}^{(2)}$ с ростом $\overline{\mathrm{Rs}}$ является монотонным. Отметим, что для обеих фракций при $\overline{\mathrm{Rs}} \gg 1$ наблюдается асимптотика, и при одних и тех же $\overline{\mathrm{Rs}}$ величины $\overline{L}^{(1,2)}$ уменьшаются при переходе от ламинарного режима седиментации через переходный режим и к турбулентному. Как и следовало ожидать, особенности изменения среднеквадратического отклонения аналогичны изменениям среднечисленных относительных размеров частиц „тяжелых“ и „легких“ фракций (табл. 1).

## Пример

Воспользуемся результатами оценки разделительной способности вертикальных гравитационных гидроклассификаторов [24] в рамках кинетических балансовых соотношений с использованием дискретной функции распределения частиц по размерам (табл. 2) при $\rho_s = 2900\,\text{kg/m}^3$; $\rho_f = 1100\,\text{kg/m}^3$; $\mu_f = 1 \cdot 10^{-3}$ Pa·s; $\overline{v}_f = 6 \cdot 10^{-4}$ m/s. По исходной функции распределения, учитывая тот факт, что

$$f_V(L) = f_M(L) = dM(l)/(Mdl),$$

где $dM(l)$, $M$ — массы фракции частиц размера от $l$ до $l + dl$ и всех частиц в диспергируемой суспензии, вычислен среднемассовый размер полидисперсных частиц

$$\bar{l}_M = f_0^{\infty} l f_M(L)dl \approx 55.89\,\mu\text{m}.$$

**Таблица 2.** Функция распределения частиц по размерам

| $\Delta l$, $\mu$m | $f_V = \frac{\Delta V}{V \Delta l}$, m$^{-1}$ |
|---|---|
| 0–5 | 0.030000 |
| 5–10 | 0.030000 |
| 10–20 | 0.015000 |
| 20–40 | 0.012000 |
| 40–63 | 0.005600 |
| 63–125 | 0.001100 |
| 125–240 | 0.000240 |
| 240–315 | 0.000470 |
| 315–500 | 0.000200 |
| 500–700 | 0.000015 |

Безразмерная нормированная массовая фракция плотности распределения частиц по размерам (рис. 6) аппроксимирована соотношением

$$F_M(L) = 420L^3 \exp(-7L),$$

что позволило, используя связь

$$F_{N_n}(L) = F_M(L) \Big/ \left\{ L^3 \left[ \int_0^{-\infty} L^{-2} F_M(L)dL \right]^2 \right\},$$

найти $F_{N_n}(L) = \exp(-L)$, где $\overline{L}_N = 8\,\mu$m. Результаты расчета объемной доли „легкой“ фракции (рис. 7)

$$\beta = \int_0^{L^*} \overline{F}^{(2)}_{N_n}(L)dL \left[ \int_0^{L^*} L\overline{F}^{(2)}_{N_n}(L)dL \right]^3$$

подтвердили корректность принятых допущений и адекватность модели.

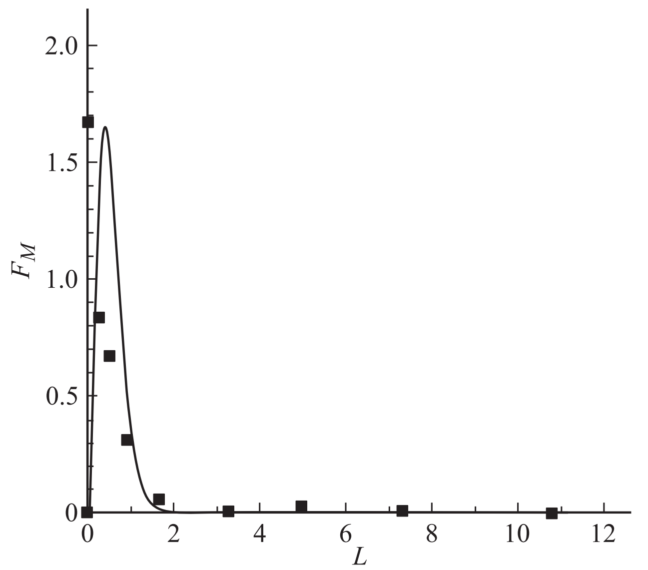


**Рис. 6.** К аппроксимации функции распределения: ■ — исходная; — аппроксимация.

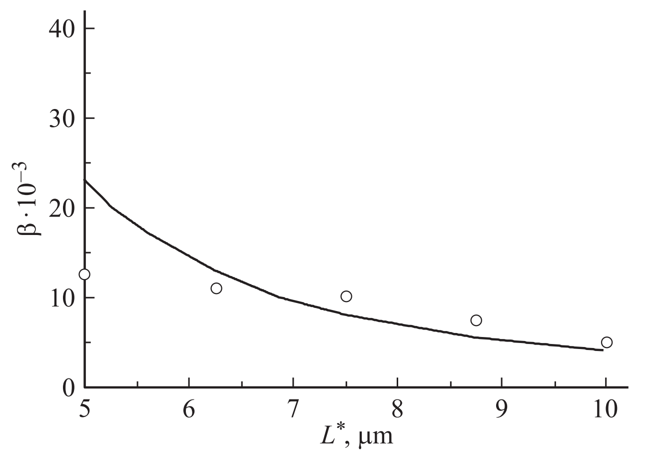


**Рис. 7.** Объемная доля „легкой“ фракции: ○ — данные из [24]; — расчет.

## Заключение

Предложенная математическая модель фракционирования малоконцентрированной взвеси в плоском гравитационном вертикальном гидроклассификаторе во всех режимах седиментации, учитывающая неравномерность профиля скорости несущей среды при ламинарном течении, позволяет объяснить наличие мелких частиц в „тяжелых“ фракциях и псевдоклассификацию монодисперсной взвеси, а также прогнозировать дисперсный состав в любой локализации рабочего объема классификатора и выбрать при его проектировании геометрические характеристики в зависимости от расходных и физико-химических параметров суспензии.

## Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

## Список литературы


[1] *Affa A., Razzak S.A., Nigam K.D., Zhu J.-X.* // Ind. Eng. Chem. Res. 2009. Vol. 49. N 9. P. 7876–7882.
[2] *Polchar R.R., Shilapurain V.* // Particuology. 2017. Vol. 31. P. 59–68.
[3] *Барский М.Д., Ревнивцев В.И., Соколкин Ю.В.* Гравитационная классификация зернистых материалов. М.: Недра, 1974. 232 с.
[4] *Goula A.M., Kostoglu M., Karapatsios T.D., Zouboulis A.L.* // Chem. Eng. J. 2007. Vol. 140. P. 110–121.
[5] *Farrow J.B., Fawell P.D., Johnston R.R.M., Nguyen T.B., Rudman M., Simic K., Swift J.D.* // Chem. Eng. J. 2000. Vol. 180. P. 149–155.
[6] *Cheng Y., Zhu J.-X.* // Canad. Chem. Eng. 2005. Vol. 83. N 2. P. 177–185.
[7] *Чиркун Д.И., Саевич Н.П., Левданский А.Э., Ярмольник С.В.* // Труды БГТУ. 2017. Сер. 2. № 2. С. 190–194.
[8] *Di Renzo A., Cello F.D., Maio F.P.* // Chem. Eng. Sci. 2011. Vol. 66. N 13. P. 2945–2958.
[9] *Yongli M., Mingyan L., Yuan Z.* // Chem. Eng. Sci. 2011. Vol. 66. N 13. P. 2945–2958.
[10] *Nasr-El-Din H., Masliyah J.H., Naudakumar K., Law H.-S.* // Chem. Eng. Sci. 1988. Vol. 43. N 13. P. 3225–3234.
[11] *Berman Y., Tamir A.* // Chem. Eng. Sci. 2003. Vol. 58. P. 2089–2102.
[12] *Островский Г.М.* Прикладная механика неоднородных сред. СПб.: Наука, 2000. 359 с.
[13] *Лугуманов Т.Т., Кулешов В.С.* // Тр. Ин-та механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. 2014. Вып. 10. С. 66–72.
[14] *Serge G., Silberberg A.* // Nature. 1961. Vol. 189. P. 209–210.
[15] *Saffman P.G.* // J. Fluid Mech. 1965. Vol. 22. P. 385–400.
[16] *Яценко В.П.* // Физика аэродисперсных систем. 2002. Т. 39. С. 240–248.
[17] *Губайдуллин Д.А., Осипов П.П.* // Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН. Казань: Фолиант, 2011. Т. 1. С. 82–97.
[18] *Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е.* Явления переноса. М.: Химия, 1974. 688 с.
[19] *Дытнерский Ю.И.* Процессы и аппараты химической технологии. Ч. 1. М.: Химия, 2002. 400 с.
[20] *Корн Г.А., Корн Т.М.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.
[21] *Luna F.D.T., Silva A.G., Fukumasu N.K., Bazan O., Gouveia J.H.A., Moraes Jr.D., Yanagihara J.I., Vianna Jr. A.S.* // Chem. Eng. J. 2019. Vol. 362. P. 712–720.
[22] *Доманский И.В., Давыдов И.В., Боровинский В.П.* // Цветные металлы. 2000. № 1. С. 25–27.
[23] *Гаель А.Г., Смирнова Л.Ф.* Пески и песчаные почвы. М.: ГЕОС, 1999. 252 с.
[24] Новый справочник химика и технолога. Процессы и аппараты химической технологий. Ч.II. СПб.: НПО Профессионал, 2006. 916 с.