03.1

Автоволновой импульс в среде с дисбалансом между тепловыделением и теплоотводом при произвольной величине тепловой дисперсии

© Н.Е. Молевич [1,2], Д.С. Рящиков [1,2,¶]

[1] Самарский национальный исследовательский университет им. акад. С.П. Королева, Самара, Россия
2 Самарский филиал Физического института им. П.Н. Лебедева РАН, Самара, Россия
¶ E-mail: ryashchikovd@gmail.com

Поступило в Редакцию 5 марта 2020 г.
В окончательной редакции 27 марта 2020 г.
Принято к публикации 1 апреля 2020 г.

Представлен метод определения амплитуды и скорости автоволнового импульса, образующегося в изоэнтропически неустойчивых тепловыделяющих средах, по виду обобщенной функции теплоотвода без необходимости численного решения полной системы газодинамических уравнений и без ограничения на величину дисперсии и коэффициента усиления акустических волн.

Ключевые слова: автоволновой импульс, тепловая неустойчивость, изоэнтропическая неустойчивость, усиление, акустическая дисперсия.

DOI: 10.21883/PJTF.2020.13.49584.18276

Известно, что наличие в среде объемных источников тепловыделения и охлаждения, мощность которых зависит от температуры и плотности среды, приводит к тепловому дисбалансу при распространении газодинамических возмущений. Тепловой дисбаланс сопровождается либо тепловыми неустойчивостями разного типа [1,2], в том числе изоэнтропической (акустической) неустойчивостью [3–6], либо диссипацией газодинамических возмущений [6,7]. В [6,8] было показано также, что тепловой дисбаланс приводит к дисперсии скорости звука, которая может быть как положительной (скорость высокочастотного звука c_∞ больше скорости низкочастотного звука c_0), так и отрицательной ($c_\infty < c_0$). При реализации условий изоэнтропической неустойчивости линейная акустическая волна определенного частотного диапазона усиливается. На нелинейной стадии это усиление прекращается за счет передачи энергии от неустойчивого низкочастотного диапазона в устойчивый высокочастотный диапазон. При этом возможно возникновение самоподдерживающихся (автоволновых) структур [9–14].

В случае слабой дисперсии скорости звука ($\beta = (c_\infty^2 - c_0^2)/c_\infty^2$) коэффициент усиления оказывается также малым. В этом случае эволюция нелинейного возмущения с высокой точностью описывается обобщенным нелинейным акустическим уравнением [11]. Данное уравнение позволяет определить типы ударных волн, которые могут стационарно распространяться в подобной среде. Это ударные волны с повышением или понижением давления (плотности) за фронтом, а также импульсная автоволна. Автоволна тоже имеет разрывной фронт, но в отличие от ударных волн ее форма, амплитуда и скорость определяются только параметрами объемных источников тепловыделения/охлаждения в среде и не зависят от амплитуды инициирующего ее возникновение газодинамического возмущения.

В изоэнтропически неустойчивых средах с дисперсией скорости звука $|\beta| \geqslant 1$ можно ожидать возникновения газодинамических возмущений достаточно большой амплитуды. Для таких волн слабонелинейное приближение становится неадекватным. Аналитически структура таких не слабых возмущений в акустически неустойчивой среде была исследована только для сред с релаксацией (на примере колебательно возбужденного газа [15]). В настоящей работе разработан метод определения параметров автоволнового импульса, образующегося в изоэнтропически неустойчивых тепловыделяющих средах, по виду обобщенной функции теплоотвода без необходимости численного решения полной системы газодинамических уравнений и без ограничения на величину дисперсии и коэффициента усиления акустических волн.

Исходная система газодинамических уравнений имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\rho\mathbf{v} = 0, \quad \rho\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\boldsymbol{\nabla}P,$$

$$C_V\,\frac{dT}{dt} - \frac{k_\mathrm{B}T}{m\rho}\,\frac{d\rho}{dt} = -W(\rho, T). \qquad (1)$$

Здесь ρ, T, $P = k_\mathrm{B}\rho\frac{T}{m}$ — плотность, температура и давление в среде соответственно; $\mathbf{v}$ — вектор скорости движения частиц; k_B — постоянная Больцмана; C_V — теплоемкость при постоянном объеме; m — средняя масса одной частицы; $W(\rho, T)$ — обобщенная функция тепловых потерь; $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}$.

Обобщенная функция тепловых потерь представляет собой разность мощности теплоотвода и тепловых источников, обычно ее используют в различных астрофизических приложениях, начиная с пионерских работ [1,2] и заканчивая самыми последними [8,13].

Линейный анализ устойчивости этой системы уравнений позволяет получить условие изоэнтропической неустойчивости в виде

$$W_{0T}\left(c_\infty^2 - c_0^2\right) < 0, \qquad (2)$$

где

$$c_\infty^2 = \sqrt{\frac{k_B T_0}{m}\gamma},\ c_0^2 = \sqrt{\frac{k_B T_0}{m}\gamma_0},\ \gamma_0 = 1 - \frac{\rho_0}{T_0}\frac{W_{0\rho}}{W_{0T}},$$

$$W_{0\rho} = \left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho_0, T=T_0}, \quad W_{0T} = \left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)_{\rho=\rho_0, T=T_0}.$$

Здесь $\gamma = C_p/C_V$ — показатель адиабаты, который определяет скорость звука в высокочастотном пределе (C_p — теплоемкость при постоянном давлении), γ_0 — эффективный низкочастотный показатель адиабаты [6,8], который определяется функцией тепловых потерь.

Будем искать решение (1) в виде одномерных стационарных структур, распространяющихся в среде вдоль оси x со скоростью D. Для этого в исходной системе уравнений делаем замену $z = x - Dt$. Отметим, что здесь под термином „стационарные структуры" мы понимаем то, что структуры не изменяют свою форму с течением времени в системе отсчета, движущейся со скоростью D. Предположим, что перед фронтом волны находится невозмущенная среда с параметрами $\rho_0 p_0$, T_0 и $v_0 = 0$. Тогда с помощью замен $\partial/\partial x = d/dz$, $\partial/\partial t = -Dd/dz$ из первых двух уравнений системы (1) получаем законы сохранения потоков массы и импульса в стационарной волне в интегральной форме

$$\rho(v - D) = -\rho_0 D,\, P + (v - D)^2\rho = P_0 + D^2\rho_0. \qquad (3)$$

Последнее уравнение системы (1) для стационарных волн будет иметь вид

$$(v - D)\left(C_V\frac{dT}{dz} - \frac{P}{\rho^2}\frac{d\rho}{dz}\right) = -W(\rho, T). \qquad (4)$$

Последовательно преобразовывая с учетом (3) слагаемое с производной плотности в (4) к виду

$$\frac{Pd(1/\rho)}{dz} = \frac{d(P/\rho)}{dz} - \frac{dP}{\rho dz} = \frac{d(P/\rho)}{dz}$$

$$+ \frac{d\left(\rho(v-D)^2\right)}{\rho dz} = \frac{d(P/\rho)}{dz} + \frac{(v-D)d(v-D)}{dz}$$

$$= \frac{d(P/\rho)}{dz} + \frac{d(v-D)^2}{2dz} \qquad (5)$$

перепишем (4) в виде

$$(v - D)\frac{dE}{dz} = -W(\rho, T), \quad E = C_V T + \frac{P}{\rho} + \frac{(v-D)^2}{2}. \qquad (6)$$

Используя (3), (6), получаем известные связи между скоростью, давлением, температурой и плотностью в стационарной волне, а также плотность за фронтом ударной волны ρ_d [16]:

$$v(\rho) = D\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right),\, P(\rho) = P_0 + \rho_0 D^2\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right),$$

$$T(\rho) = \frac{P_0 + \rho_0 D^2\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)}{\rho k_B/m}, \qquad (7)$$

$$\rho_d = \frac{\gamma + 1}{2c_\infty^2/D^2 + (\gamma - 1)}\rho_0. \qquad (8)$$

При получении (8) учитывалось, что функция тепловых потерь никак не влияет на параметры волны непосредственно за резким фронтом ударной волны. Далее же ее влияние на профиль стационарной волны будет определяться дифференциальным уравнением (6).

Подставим (7) в выражение для E в (6) и, полагая $E(\rho_0) = E_0$, получим

$$E(\rho) = E_0 + \frac{C_p}{\frac{k_B}{m}\rho}\left(P_0\left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right)\right.$$

$$\left. + \rho_0 D^2\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)\right) + \frac{1}{2}D^2\left(\frac{\rho_0^2}{\rho^2} - 1\right). \qquad (9)$$

Тогда выражение (6) после преобразования производной $dE/dz = (dE/d\rho)(d\rho/dz)$позволяет определить изменение плотности за фронтом стационарной волны в виде

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{W\left(\rho, T(\rho)\right)}{D\frac{\rho_0}{\rho}\frac{dE}{d\rho}}. \qquad (10)$$

Анализ интегральных кривых уравнения (10), выполненный при условии изоэнтропической неустойчивости (2) и отрицательной дисперсии $\beta < 0$, показал, что условие образования импульсной структуры соответствует совпадению нулей числителя (стационарных точек) и знаменателя (точек поворота интегральных кривых) уравнения (10). Заметим, что это условие совпадает с полученным ранее для релаксирующей среды [15].

Особые точки, в которых $d\rho/dz \to \infty$, соответствуют нулю знаменателя (10)

$$\rho_\infty = \frac{D^2\rho_0(\gamma + 1)}{\gamma(P_0/\rho_0 + D^2)}. \qquad (11)$$

Стационарные точки, в которых $d\rho/dz = 0$, соответствуют нулю числителя (10). Таким образом, они определяются видом обобщенной функции теплопотерь и удовлетворяют уравнению

$$W\left(\rho_{st}, T(\rho_{st})\right) = 0. \qquad (12)$$

Импульсу соответствует одновременное выполнение этих условий, т.е. $\rho_\infty = \rho_{st}$, что позволяет определить скорость распространения импульса в неявном виде как

$$W\left[\rho_\infty(D_p), T(\rho_\infty)\right] = 0. \qquad (13)$$

Амплитуда импульса с учетом величины разрыва (8) имеет вид

$$\rho_p = \frac{\gamma + 1}{2c_\infty^2/D_p^2 + (\gamma - 1)}\rho_0. \quad (14)$$

Выражение (14) записано для плотности, но с помощью связей (7) может быть переписано также и для других величин.

Таким образом, условие равенства стационарной и особой точек позволяет легко найти скорость D_p и амплитуду (14) автоволнового импульса, являющегося стационарно-волновым решением полной системы газодинамических уравнений при условии изоэнтропической неустойчивости и отрицательной дисперсии. Изменение амплитуды за разрывным фронтом импульса описывается дифференциальным уравнением (10) с $D = D_p$.

Покажем, что при малых дисперсиях и соответственно малых отклонениях амплитуд возмущений от равновесных значений выражения (13), (14) преобразуются к известным формулам, полученным ранее из решения нелинейного акустического уравнения [11].

Как и в [11], введем безразмерные переменные $\tilde{\rho}$ и ω таким образом, что

$$\rho = \rho_0(1 + \tilde{\rho}), \quad D = c_\infty(1 + \omega). \quad (15)$$

Будем считать, что скорость распространения стационарных структур слабо отличается от скорости звука, т. е. ω — некоторая малая величина. Тогда, раскладывая выражения для сингулярных точек (11) и плотности непосредственно за фронтом ударной волны (8) в ряд по ω до первого порядка малости, получаем

$$\tilde{\rho}_\infty = \omega/\Psi_\infty, \quad (16)$$

$$\tilde{\rho}_d = 2\omega/\Psi_\infty, \quad (17)$$

где $\Psi_\infty = (\gamma + 1)/2$ — высокочастотный коэффициент нелинейности [11,16].

Для того чтобы получить значение стационарной точки $\tilde{\rho}_{st}$, разложим функцию тепловых потерь в ряд до второго порядка малости около стационарного состояния ρ_0, T_0:

$$W(\rho, T) \approx W_{0\rho}\Delta\rho + W_{0T}\Delta T + \frac{1}{2}\left[W_{0\rho\rho}\Delta\rho^2 + 2W_{0\rho T}\Delta\rho\Delta T + W_{0TT}\Delta T^2\right], \quad (18)$$

где $\Delta\rho = \rho - \rho_0$, $\Delta T = T - T_0$ и использованы следующие обозначения для производных:

$$W_{0\rho\rho} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial\rho^2}\right)_{\rho_0, T_0}, W_{0TT} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial T^2}\right)_{\rho_0, T_0},$$

$$W_{0\rho T} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial\rho\partial T}\right)_{\rho_0, T_0}$$

Далее выражаем в (18) температуру через плотность с помощью (7), а после этого вводим безразмерные величины для плотности и скорости из формулы (15). Считая, что безразмерные плотность и скорость являются величинами первого порядка малости: $\tilde{\rho} \sim \omega \sim \epsilon^1$, оставим в (18) слагаемые только до ϵ^2. Учтем, что в стационарном состоянии $W(\tilde{\rho}_{st}) = 0$. Из этого условия можем найти связь между $\tilde{\rho}_{st}$ и ω в следующем виде:

$$\tilde{\rho_{st}} = \frac{2\omega + \beta}{\Psi_0}, \quad \Psi_0 = \left[\frac{2\gamma_0 - 1}{2\gamma} - \frac{1}{2W_{0T}T_0} \times \left(\frac{W_{0TT}(\gamma - 1)^2}{2\gamma} + \frac{W_{0\rho T}(\gamma - 1)\rho_0}{\gamma T_0} + \frac{W_{0\rho\rho}\rho_0^2}{2\gamma T_0^2}\right)\right]. \quad (19)$$

Отсюда, приравнивая значения плотности в особой (16) и стационарной (19) точках, с учетом (17) получаем значения безразмерных переменных, определяющих, согласно (15), степень отклонения скорости и амплитуды плотности импульса от c_∞ и ρ_0 соответственно:

$$\omega_p = -\frac{\beta\Psi_\infty}{2\Psi_\infty - \Psi_0}, \quad \tilde{\rho}_p = \frac{2\omega_p}{\Psi_\infty} = -\frac{2\beta}{2\Psi_\infty - \Psi_0}. \quad (20)$$

Выражения (20) совпадают с полученными на основе решения нелинейного акустического уравнения в приближении слабой дисперсии [11].

Таким образом, в работе впервые представлен простой метод определения характеристик автоволнового импульса, формирующегося в изоэнтропически неустойчивой тепловыделяющей среде. Описание проведено на основе полной газодинамической системы уравнений без ограничения на величину инкремента изоэнтропической неустойчивости, коэффициента дисперсии и амплитуды возмущений. Диссипация в системе не учитывалась. Учет коэффициентов вязкости и теплопроводности приведет к уширению фронта возмущения и уменьшению его амплитуды. Это уменьшение будет значительным только при малых коэффициентах дисперсии и акустического усиления.

Финансирование работы

Работа поддержана Минобрнауки РФ в рамках государственных заданий вузам и научным организациям (проекты 0023-2019-0003, FSSS-2020-0014) и грантом Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 18-32-00344.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] *Parker E.N.* // Astrophys. J. 1953. V. 117. P. 431–436.
[2] *Field G.B.* // Astrophys. J. 1965. V. 142. P. 531—567.
[3] *Oppenheimer M.* // Astrophys. J. 1977. V. 211. P. 400–403.
[4] *Артамонов К.И.* // Термогидроакустическая устойчивость. М.: Машиностроение, 1982. 261 с.

[5] *Краснобаев К.В., Тарев В.Ю.* // Астрон. журн. 1987. Т. 64. № 6. С. 1210–1219.
[6] *Молевич Н.Е., Ораевский А.Н.* // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. В. 3. С. 128–132.
[7] *Kolotkov D.Y., Nakariakov V.M., Zavershinskii D.I.* // A&A. 2019. V. 628. P. A133. DOI: 10.1051/0004-6361/201936072
[8] *Zavershinskii D.I., Kolotkov D.Y., Nakariakov V.M., Molevich N.E., Ryashchikov D.S.* // Phys. Plasmas. 2019. V. 26. N 8. P. 082113. DOI: 10.1063/1.5115224
[9] *Краснобаев К.В., Сысоев Н.Е., Тарев В.Ю.* Особенности распространения нелинейных и ударных волн в окрестности горячих звезд // Ядерная физика, физика космических излучений, астрономия. М.: Изд-во МГУ, 1994. С. 222–230.
[10] *Nakariakov V.M., Mendoza-Briceño C.A., Ibañez M.H.S.* // Astrophys. J. 2000. V. 528. N 2. P. 767–775. DOI: 10.1086/308195
[11] *Molevich N.E., Zavershinsky D.I., Galimov R.N., Makaryan V.G.* // Astrophys. Space Sci. 2011. V. 334. N 1. P. 35–44. DOI: 10.1007/s10509-011-0683-0
[12] *Krasnobaev K.V., Tagirova R.R., Arafailov S.I., Kotova G.Yu.* // Astron. Lett. 2016. V. 42. N 7. P. 460–473. DOI: 10.1134/S1063773716070057
[13] *Krasnobaev K.V., Tagirova R.R.* // MNRAS. 2017. V. 469. N 2. P. 1403–1413. https://doi.org/10.1093/mnras/stx884
[14] *Рящиков Д.С., Молевич Н.Е., Завершинский Д.И.* // Письма в ЖТФ. 2018. Т. 44. В. 24. С. 94–102.
[15] *Галимов Р.Н., Молевич Н.Е.* // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 1. С. 188–202.
[16] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* // Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. 3-е изд., испр. М.: Наука, 1986. 736 с.