

Оптимальное управление внутривенной лазерной абляцией

© А.Е. Ковтаныук^{1,2}, А.Ю. Чеботарев^{1,2}, А.А. Астраханцева¹, А.А. Сущенко^{1,2}

¹ Дальневосточный федеральный университет,
690950 Владивосток, Россия

² Институт прикладной математики Дальневосточного отделения РАН,
690041 Владивосток, Россия

e-mail: kovtanyuk.ae@dvfu.ru

Поступила в редакцию 30.07.2019 г.

В окончательной редакции 01.06.2020 г.

Принята к публикации 05.06.2020 г.

На основе начально-краевой задачи для модели радиационно-кондуктивного теплообмена изучаются тепловые процессы, возникающие при внутривенной лазерной абляции. Ставится задача оптимального управления, заключающаяся в приближении решения начально-краевой задачи к заданному температурному профилю в определенной точке модельной области. В качестве управления берутся мощности источника, идущие на излучение и нагрев карбонизированного наконечника оптоволоконка. Предложен и численно реализован итерационный алгоритм решения поставленной задачи.

Ключевые слова: внутривенная лазерная абляция, перенос излучения, кондуктивный перенос тепла, оптимальное управление.

DOI: 10.21883/OS.2020.09.49882.242-20

Введение

В 1999 г. появилось первое сообщение о клиническом внутрисосудистом применении лазера с длиной волны 810 nm для осуществления внутривенной лазерной абляции (ВВЛА) [1]. При проведении ВВЛА лазерное оптоволоконно вводится в поврежденную вену. Далее оптоволоконно вытягивается из вены, при этом по нему передается лазерное излучение. Торец оптоволоконка, из которого выходит излучение, обычно покрыт карбонизированным слоем, который разделяет поступающую энергию, в результате чего одна ее часть поглощается карбонизированным слоем, что вызывает его нагрев, другая часть идет на излучение. Тепло от нагретого карбонизированного слоя передается в кровь посредством кондуктивного теплообмена. Теплообмен многократно усиливается за счет потока пузырьков, образующихся на разогретом торце оптоволоконка. Излучение, поступающее в кровь и окружающую ткань, частично поглощается, что сопровождается выделением тепла. В итоге образованная и поступившая за счет различных механизмов тепловая энергия вызывает значительный нагрев вены, что приводит к ее облитерации (закрытию сосуда). Поскольку большинство побочных эффектов при проведении ВВЛА незначительны, а серьезные осложнения редки, лазерная абляция представляет собой безопасную и минимально инвазивную процедуру, обладающую высокой эффективностью в лечении варикозной болезни [2].

Другим популярным подходом, обладающим малой инвазивностью и высокой эффективностью, является радиочастотная абляция вен (РЧА). В работе [3] на основе обзора различных исследований проводится сравнение

лазерной и радиочастотной абляции по пяти критериям, включающим эффективность, побочные эффекты, серьезные осложнения, рецидив и качество жизни. Отмечается, что лазерная абляция обладает несколько большей эффективностью и меньшей частотой рецидивов по сравнению с РЧА. Например, результаты мета-анализа данных 4876 пациентов после лазерной и 2514 после радиочастотной абляции демонстрируют следующие показатели успешно выполненной облитерации, которые составляют 92.9% для ВВЛА и 88.8% для РЧА. Серьезные осложнения редко встречаются в обоих случаях. Незначительные осложнения, такие как послеоперационная боль и гематомы, более характерны для ВВЛА. Вероятную причину, по которой ВВЛА приводит к большей послеоперационной боли, чем РЧА, объясняют результаты экспериментов [4], согласно которым лазерная абляция характеризуется более высокой пиковой температурой, хотя и в течение короткого промежутка времени, тогда как у радиочастотной абляции более низкие, хотя и более продолжительные, максимальные температуры.

Оптимизация параметров излучения при проведении ВВЛА позволяет осуществить успешную облитерацию вены с минимальной частотой и тяжестью осложнений. То есть оптимальное излучение, с одной стороны, должно обеспечивать достаточно высокую температуру внутри вены для осуществления облитерации, с другой стороны, сгенерированное температурное поле должно быть относительно безопасным для окружающей вену ткани. Основными параметрами, влияющими на эффективность и безопасность процедуры лазерной абляции, являются мощность лазера, длина волны лазерного излучения, скорость движения оптоволоконка, соотношение до-

лей мощности лазера, идущих на излучение и на нагрев наконечника (карбонизированного слоя) оптоволоконка. Как правило, при проведении лазерной абляции используется лазер с длиной волны от 810 до 1470 nm. Достаточно распространенными являются диапазоны скорости движения оптоволоконка от 1 до 3 mm/s и мощности лазерного излучения от 10 до 15 W.

Математическое моделирование радиационных и тепловых процессов, возникающих при проведении ВВЛА, является весьма актуальным в контексте определения оптимальных параметров излучения, обеспечивающих заданное распределение температуры внутри вены и в перивенозной ткани. Классическая модель, описывающая взаимодействие излучения оптического диапазона с биотканью, включает уравнение переноса излучения и уравнение теплопроводности [5]. Соответственно, расчет радиационных и температурных полей включает в себя нахождение решения уравнения переноса, вычисление по нему объемной плотности поглощенной энергии излучения и последующее нахождение решения уравнения теплопроводности, в которое поглощенная энергия излучения входит в качестве источников тепла. Нередко при решении различных задач переноса излучения учитываются эффекты отражения и преломления на границах раздела сред с различными показателями преломления [6,7], что достаточно хорошо моделируется методом Монте-Карло [7,8]. С целью упрощения модели уравнение переноса излучения иногда заменяется на его диффузионное приближение, которое также позволяет описывать эффекты отражения и преломления. В дополнении к этому диффузионная модель может учитывать тепловое излучение, индуцированное самой средой, что приводит к нелинейной модели сложного теплообмена [9,10]. В работе [9] оценивается вклад внутреннего теплового излучения, а также эффектов отражения и преломления в профили температуры и поглощенной энергии излучения для кожного покрова, находящегося под воздействием солнечного излучения.

Основными эффектами, которые обычно учитываются при моделировании ВВЛА, являются кондуктивный теплообмен, перенос излучения и его поглощение с выделением тепла, а также перенос тепла потоком пузырьков, образующихся на наконечнике оптоволоконка. В работе [11] приведены результаты экспериментов, демонстрирующих влияние движущихся пузырьков, образованных на наконечнике оптоволоконка, на температурное поле. В работах [12–14] на основе оценки экспериментальных данных перенос тепла потоком пузырьков моделируется использованием кусочно-постоянного коэффициента теплопроводности, зависящего от температуры следующим образом: при достижении температуры в некоторой точке 95°C и более коэффициент теплопроводности увеличивается в 200 раз.

Результаты численного моделирования ВВЛА для длин волн непрерывного излучения в диапазоне от 810 до 1470 nm и различных диаметров вен приведены в

работах [12–14]. В них, в частности, оценка эффективности лазерной абляции осуществляется через анализ температурных профилей в точках наблюдения, находящихся в различных зонах вычислительной области (кровь, внутренняя и внешняя стенки вены, перивенозная ткань). Отметим, что в указанных работах усредненная интенсивность излучения вычисляется по явной формуле, описывающей радиационное поле точечного источника в неограниченной однородной среде.

В работе [15] отмечается важность численного моделирования при выборе оптимальной мощности лазерного излучения для различных длин волн лазерного излучения и различных диаметров вен. Авторы проводят сравнительный численный анализ эффективности ВВЛА в случае непрерывного и импульсного (с продолжительностью импульса от 1 до 3 s) излучения с длиной волны 810 и 980 nm. Отмечается эффективность обоих подходов. И хотя импульсное излучение обеспечивает несколько меньший нагрев ткани, его использование требует точного позиционирования волокна и большую продолжительность операции. В итоге авторы отмечают, что многие врачи предпочитают выполнять лазерную абляцию, используя непрерывный источник излучения.

Сложности использования импульсного излучения при проведении ВВЛА, отмеченные в работе [15], можно избежать, если значительно уменьшить продолжительность импульса. В работе [16] проводится численный анализ эффективности ВВЛА при использовании импульсного излучения с длиной волны 1320 nm, при продолжительности импульса 1.2 ms и частоте импульсов 30–50 Hz. Проводится сравнение со случаем непрерывного излучения с длиной волны 980 nm. Отмечается, что при использовании импульсного излучения можно достичь тот же эффект, как и при непрерывном излучении, используя меньшую суммарную мощность. Сопоставляя результаты проведенного численного моделирования с опубликованными статистическими данными, авторы отмечают, что оба подхода являются достаточно эффективными и имеют сходные побочные эффекты.

Отметим, что в работах [12–16] при выборе оптимальных параметров излучения используется прямое многократное моделирование, осуществляющее по сути перебор различных вариантов с целью поиска некоего оптимального решения. Данный подход не является эффективным. К тому же остаются без ответа вопросы, связанные с существованием и единственностью оптимального решения. В настоящей работе предлагается принципиально другой подход в поиске оптимальных параметров излучения, а именно путем решения задачи оптимального управления. Следуя работам [12–14], в которых эффективность ВВЛА оценивается по поведению температурных профилей, авторами рассматривается задача оптимального управления ВВЛА, заключающаяся в подборе параметров излучения с целью приблизить температурный профиль в определенной точке модельной области к заданному графику, характеристики которого (максимальная температура и продолжительность

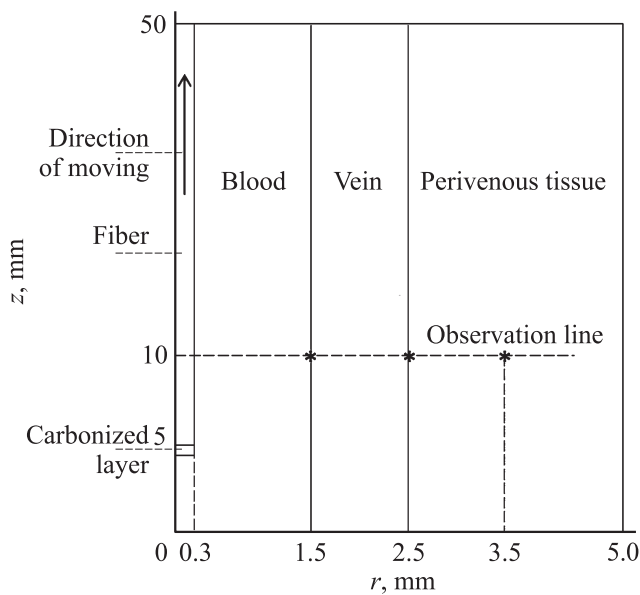


Рис. 1. Схема расчетной области в цилиндрических координатах при угловой симметрии. На рисунке отмечены точки наблюдения и начальное положение оптоволокна. Толщина карбонизированного слоя 0.2 мм.

кипения) обеспечивают успешное проведение процедуры ВВЛА. В качестве управления процессом берутся мощности источника, идущие на излучение и нагрев наконечника оптоволокна. Ввиду нелинейности модели, вызванной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры, для решения задачи оптимального управления используется итерационный алгоритм, на каждом шаге которого для нахождения нового приближения решается начально-краевая задача. Численная реализация алгоритма осуществляется на основе метода конечных элементов для случая непрерывного излучения с длиной волны 810 нм. Проведены эксперименты по выбору оптимальных параметров излучения, обеспечивающих приближение температурного профиля к заданному графику в точке, находящейся на внутренней стенке вены.

Математическая модель

В качестве математической модели, описывающей тепловые и радиационные процессы в биологической ткани, находящейся под воздействием лазерного излучения, рассмотрим систему уравнений, включающую уравнение теплопроводности и диффузионное приближение уравнения переноса излучения.

Перенос тепла и излучения будем рассматривать в среде, состоящей из четырех подобластей, включающих кровь, стенки вены, перивенозную ткань и оптоволокно. Схема расчетной области G с границей Γ в цилиндрической системе координат, при угловой симметрии, приведена на рис. 1 (линейные размеры в миллиметрах).

В работах [12–16] при моделировании ВВЛА используется уравнение теплопроводности, учитывающее поступление тепла от энергии поглощенного излучения. Однако в указанных работах, интенсивность излучения рассчитывается на основе явной формулы решения диффузионного уравнения для случая бесконечной однородной среды с точечным источником излучения. В отличие от указанных работ будем применять диффузионное приближение уравнения переноса излучения, учитывающее многокомпонентную структуру среды. Поскольку излучение попадает в среду через торец оптоволокна, источник излучения можно описывать как поверхностный, задавая его через соответствующее граничное условие, либо как объемный, отождествляя его с карбонизированным наконечником. Остановившись на случае объемного источника излучения, запишем систему дифференциальных уравнений, описывающих радиационные и тепловые процессы при проведении ВВЛА, в следующем виде:

$$-\nabla \cdot (\alpha \nabla \varphi) + \mu_a \varphi = P_\varphi \chi V^{-1}, \tag{1}$$

$$\rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \theta) = \mu_a \varphi + P_\theta \chi V^{-1}. \tag{2}$$

Здесь $\varphi(x, t)$ — усредненная по направлениям интенсивность излучения, $\theta(x, t)$ — температура, $\alpha(x)$ — коэффициент диффузии фотонов, $\alpha = 1/3(\mu'_s + \mu_a)$, $\mu_a(x)$ — коэффициент поглощения, μ'_s — приведенный коэффициент рассеяния, $k(x, t)$ — коэффициент теплопроводности, $c_p(x, t)$ — удельная теплоемкость, $\rho(x, t)$ — плотность, V — объем наконечника (карбонизированного слоя) оптоволокна, P_φ — мощность источника, идущая на излучение, P_θ — мощность источника, идущая на нагрев наконечника оптоволокна, $P_\varphi, P_\theta \geq 0$, $P_\varphi + P_\theta \leq P_{\max}$, P_{\max} — максимальная мощность источника, $\chi(x, t)$ — характеристическая функция части среды, в которой находится наконечник оптоволокна, $x \in G, t \in (0, T)$. Диффузионное уравнение переноса излучения (1) описывает распространение излучения от движущегося источника и учитывает эффекты поглощения и рассеяния фотонов. Уравнение теплопроводности (2) описывает кондуктивный перенос тепла с учетом тепла, поступающего от энергии поглощенного излучения ($\mu_a \varphi$), и тепла, выделяемого нагретым наконечником оптоволокна ($P_\theta \chi V^{-1}$).

Уравнения (1), (2) дополняются следующими условиями на границе Γ и в начальный момент времени:

$$\alpha \partial_n \varphi + \beta \varphi|_\Gamma = 0, \tag{3}$$

$$k \partial_n \theta + \gamma (\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \tag{4}$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0. \tag{5}$$

Условие (3) представляет собой популярное граничное условие Маршака [17]. С учетом цилиндрической системы координат параметры β и γ равны нулю при $r = 0$ (рис. 1). На остальных границах $\beta = 0.5, \gamma = 1$. На границах раздела сред ставятся стандартные условия непрерывности решения и равенства тепловых и

радиационных потоков. В итоге радиационные и тепловые процессы, протекающие в модельной области при выполнении ВВЛА, будут описываться решением начально-краевой задачи (1)–(5).

Следуя [12–14], моделирование переноса тепла потоком пузырьков, исходящих от наконечника оптоволокну, будем осуществлять, используя следующее представление для коэффициента теплопроводности крови:

$$k(x, t) = \begin{cases} k_0, & \text{если } \theta(x, t) < 95, \\ 200k_0, & \text{если } \theta(x, t) \geq 95, \end{cases} \quad (6)$$

где k_0 — значение коэффициента теплопроводности крови, соответствующее температуре в начальный момент времени.

При проведении расчетов на основе (1)–(5) используются оптические (для длины волны 810 nm) и теплофизические параметры задачи, представленные в таблице. Величины θ_b и θ_0 равны 37. Во всех расчетах начальное положение конца оптоволокну соответствует $z = 5$, и его скорость движения равна 2 mm/s.

В настоящей работе объектом численного моделирования является ВВЛА, проводимая с использованием непрерывного лазерного излучения (излучение с постоянной мощностью). Тем не менее система (1)–(5) может также применяться для моделирования радиационных и тепловых полей, индуцированных импульсным излучением. В этом случае параметры P_ϕ и P_θ зависят от времени. Однако численная реализация задачи в случае импульсного излучения может сопровождаться значительными вычислительными затратами. Так, по оценке авторов, численная реализация задачи (1)–(5) в случае импульсного источника, рассмотренного в [16], с продолжительностью импульса 1.2 ms, потребует минимум в 10 раз больше машинного времени, чем в случае непрерывного источника.

Об эффективности лазерной абляции можно судить по поведению температурных профилей в различных точках расчетной области [12–14]. Анализ температурных профилей позволяет оценить является ли величина и продолжительность нагрева внутри вены достаточными для осуществления облитерации, и в тоже время, будет ли тепловое воздействие вне вены безопасным для живой ткани. На рис. 2 демонстрируется поведение температурных профилей в трех точках наблюдения (1.5, 10), (2.5, 10) и (3.5, 10) при излучении со следующим распределением мощности источника: $(P_\phi, P_\theta) = (7, 3)$ (здесь и далее мощность дается в Ваттах). Точки наблюдения изображены на рис. 1 и находятся на внутренней стенке вены, на внешней стенке вены и в перивенозной ткани. Как видно из графиков, несмотря на высокую температуру внутри вены, температура в перивенозной ткани является вполне безопасной.

Сравним модель (1)–(5) с ее упрощенным аналогом, использованном в [12–16], в котором интенсивность излучения вычисляется по следующей формуле, справедливой для точечного источника с координатами $(0, z_0)$ в

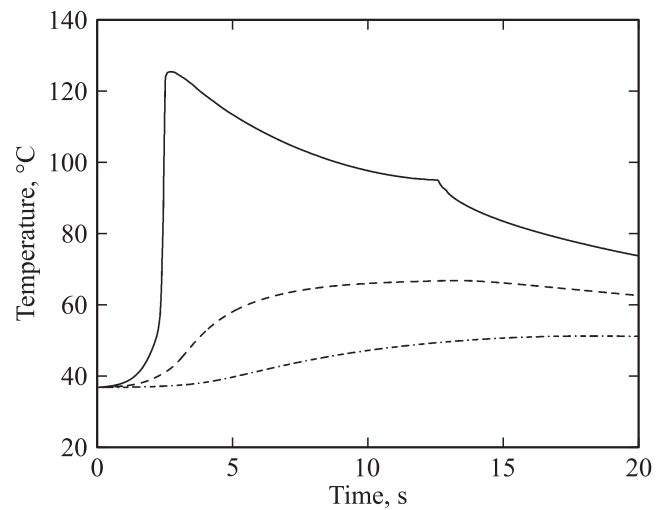


Рис. 2. Температурные профили в точках: (1.5, 10) — внутренняя стенка вены (сплошная линия); (2.5, 10) — внешняя стенка вены (штриховая линия); (3.5, 10) — перивенозная ткань (штрих-пунктирная линия).

бесконечной однородной среде:

$$\phi(r, z) = \frac{P_\phi \exp(-\mu_e d(r, z))}{4\pi a d(r, z)}, \quad (7)$$

где $\mu_e = \sqrt{\mu_a/\alpha}$ и функция $d(r, z)$ описывает расстояние между точками $(0, z_0)$ и (r, z) . В этом случае температурное поле, возникающее при ВВЛА, описывается моделью (2), (4), (5), (7). Температурные профили, полученные на основе модели (1)–(5) и модели (2), (4), (5), (7), представлены на рис. 3. Несмотря на некоторое различие графиков, можно сделать вывод, что с точки зрения практического применения упрощенная модель (2), (4), (5), (7) обеспечивает достаточно хорошее приближение к решению задачи (1)–(5). При удалении от источника излучения температурные профили становятся ближе. Это объясняется значительным уменьшением в этих точках уровня излучения, и соответственно уменьшением вклада от энергии поглощенного излучения в температуру.

Задача оптимального управления

Будем оценивать эффективность лазерной абляции по поведению температурного профиля в выбранной точке расчетной области. Поставим задачу приблизить температурный профиль, являющийся решением задачи (1)–(5), к некоторому заданному графику, характеристики которого (например, максимальная температура и продолжительность кипения) обеспечивают успешное проведение процедуры ВВЛА. В качестве управления возьмем параметры P_ϕ и P_θ . Скорость движения оптоволокну и длина волны лазерного излучения являются заданными.

Оптические (для длины волны 810 nm) и термофизические параметры [12,13]

Части среды	μ_a, mm^{-1}	μ'_s, mm^{-1}	$k, \text{W}/(\text{mK})$	$\rho, \text{kg}/\text{m}^3$	$c_p, \text{J}/(\text{kg K})$
Кровь	0.21	0.73	0.6	1000	4181
Стенка вены	0.2	2.4	0.56	1050	3780
Перивенозная ткань	0.017	1.2	0.56	1050	3780
Оптоволокно	—	—	1.3	2400	703

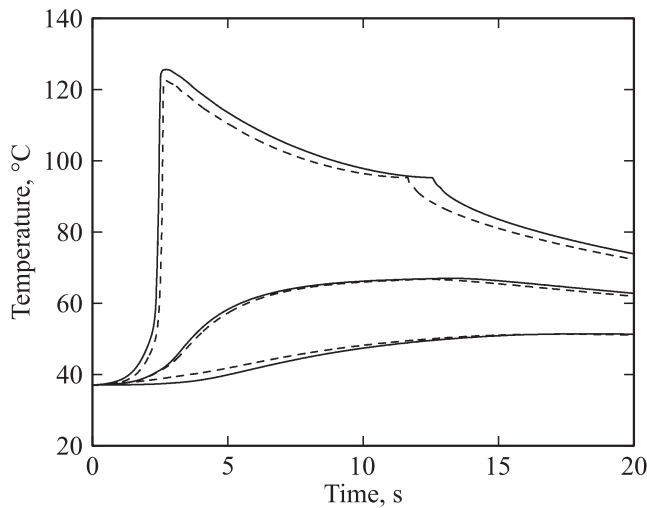


Рис. 3. Температурные профили в точках (1.5, 10), (2.5, 10) и (3.5, 10): сплошные линии — модель (1)–(5); штриховые линии — упрощенная модель (2), (4), (5), (7), основанная на явной формуле интенсивности излучения точечного источника в однородной среде.

Формализуем постановку задачи оптимального управления. Пусть x_0 — точка наблюдения, в которой требуется обеспечить близость решения задачи (1)–(5) к заданному температурному профилю на промежутке времени $(0, T)$. Рассмотрим следующую функцию:

$$J = \int_0^T (\theta(x_0, t) - \theta_d(x_0, t))^2 dt. \quad (8)$$

Здесь θ_d — заданный температурный профиль.

Рассмотрим задачу оптимального управления, заключающуюся в минимизации функции J за счет выбора пары (P_φ, P_θ) , называемой управлением:

$$J(P_\varphi, P_\theta) \rightarrow \min, \quad P_\varphi, P_\theta \geq 0, \quad P_\varphi + P_\theta \leq P_{\max}. \quad (9)$$

Для решения задачи оптимального управления (9) разобьем задачу (1)–(5) на следующие три начально-краевые задачи для пары функций φ_1, θ_1 и функций θ_2, θ_3 :

$$-\nabla \cdot (\alpha \nabla \varphi_1) + \mu_a \varphi_1 = \chi V^{-1}, \quad \alpha \partial_n \varphi_1 + \beta \varphi_1|_\Gamma = 0; \quad (10)$$

$$\rho c_p \frac{\partial \theta_1}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \theta_1) = \mu_a \varphi_1,$$

$$k \partial_n \theta_1 + \gamma \theta_1|_\Gamma = 0, \quad \theta_1(x, 0) = 0; \quad (11)$$

$$\rho c_p \frac{\partial \theta_2}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \theta_2) = \chi V^{-1},$$

$$k \partial_n \theta_2 + \gamma \theta_2|_\Gamma = 0, \quad \theta_2(x, 0) = 0; \quad (12)$$

$$\rho c_p \frac{\partial \theta_3}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla \theta_3) = 0,$$

$$k \partial_n \theta_3 + \gamma(\theta_3 - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \theta_3(x, 0) = \theta_0. \quad (13)$$

В итоге решение задачи (1)–(5) можно представить в виде

$$\theta = P_\varphi \theta_1 + P_\theta \theta_2 + \theta_3,$$

$$\varphi = \varphi_1 P_\varphi. \quad (14)$$

Подставим представление (14) в (8). В результате задача оптимального управления (9) сводится к минимизации функции

$$J_0(P_\varphi, P_\theta) = C_1 P_\varphi^2 + C_2 P_\theta^2 + 2C_3 P_\varphi P_\theta + 2C_4 P_\varphi + 2C_5 P_\theta,$$

$$P_\varphi, P_\theta \geq 0, \quad P_\varphi + P_\theta \leq P_{\max},$$

где

$$C_1 = \int_0^T \theta_1^2(t) dt, \quad C_2 = \int_0^T \theta_2^2(t) dt, \quad C_3 = \int_0^T \theta_1(t) \theta_2(t) dt,$$

$$C_4 = \int_0^T \theta_1(t) (\theta_3(t) - \theta_d(t)) dt,$$

$$C_5 = \int_0^T \theta_2(t) (\theta_3(t) - \theta_d(t)) dt.$$

Здесь в выражениях для коэффициентов C_i , $i = 1, 2, \dots, 5$ опущен аргумент x_0 . Заметим, что

$$J = J_0 + \int_0^T (\theta_3(x_0, t) - \theta_d(x_0, t))^2 dt.$$

Таким образом, в случае, когда коэффициент теплопроводности не зависит от температуры, задача оптимального управления сводится к нахождению минимума квадратичной относительно переменных P_φ, P_θ функции J_0 . Если минимум находится в треугольнике

$P_\varphi, P_\theta \geq 0, P_\varphi + P_\theta \leq P_{\max}$, то для него справедливы следующие равенства:

$$P_\varphi = (C_2 C_4 C_3^{-1} - C_5)(C_3 - C_1 C_2 C_3^{-1})^{-1}, \quad (15)$$

$$P_\theta = -C_1 C_3^{-1} P_\varphi - C_4 C_3^{-1}. \quad (16)$$

Если минимум квадратичной функции находится вне треугольника $P_\varphi, P_\theta \geq 0, P_\varphi + P_\theta \leq P_{\max}$, решение задачи (9) будет находиться на его границе, и для этого решения также можно получить равенства, связывающие оптимальную пару P_φ, P_θ с коэффициентами $C_i, i = 1, 2, \dots, 5$.

Если учитывать зависимость коэффициента теплопроводности от температуры, например, используя представление (6), коэффициенты $C_i, i = 1, 2, \dots, 5$ будут зависеть от P_φ, P_θ . В этом случае для решения задачи оптимального управления нельзя напрямую воспользоваться формулами (15), (16). Возможным вариантом решения задачи является использование итерационной процедуры, которая будет представлена в следующем разделе.

Обозначим через параметр σ черноту наконечника оптоволокну, которую определим как отношение мощности P_θ к суммарной мощности $P_\varphi + P_\theta$. Параметр σ определяет долю энергии лазерного излучения, поглощаемую наконечником. В случае, когда требуется решить задачу оптимального управления при фиксированной черноте наконечника, управление осуществляется только суммарной мощностью $P_\varphi + P_\theta$. При фиксированном σ отношение мощности P_θ к P_φ будет также постоянно, обозначим эту величину за λ . Отметим, что

$$\lambda = \frac{\sigma}{1 - \sigma}, \quad \sigma \in [0, 1).$$

Тогда для нахождения оптимальной пары (P_φ, P_θ) , минимизирующей функцию J_0 , используются следующие формулы:

$$P_\varphi = -(C_4 + \lambda C_5)(C_1 + \lambda^2 C_2 + 2\lambda C_3)^{-1}, \quad (17)$$

$$P_\theta = \lambda P_\varphi. \quad (18)$$

В случае, если учитывается зависимость коэффициента теплопроводности от температуры, нахождение оптимальной пары (P_φ, P_θ) осуществляется итерационно на основе формул (17) и (18).

Проанализируем влияние черноты наконечника на поведение температурного профиля при мощности излучения 10 W. Наблюдение будем осуществлять в точке (1.5, 10), соответствующей внутренней стенке вены. Графики температурных профилей, соответствующие значениям черноты наконечника, равным 0, 0.3 и 0.35, представлены на рис. 4. Как видно из графиков, при $\sigma = 0$ имеет место значительное уменьшение уровня температуры по сравнению со случаями, когда σ равно 0.3 и 0.35. Также отметим, что различие в температурных профилях, соответствующих черноте наконечника 0.3 и 0.35, с точки зрения практического

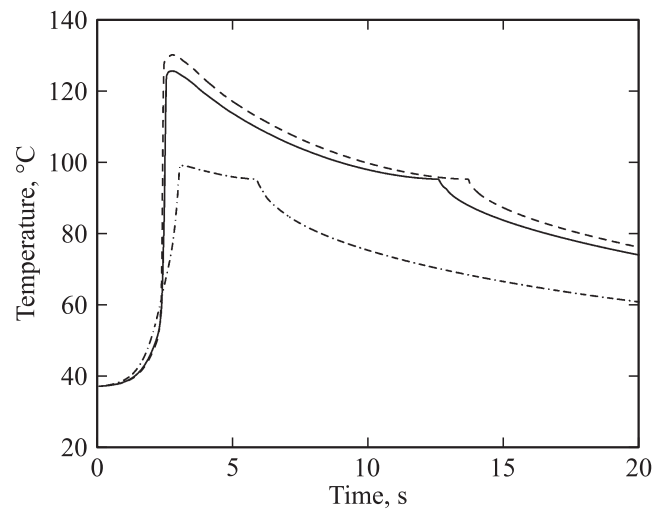


Рис. 4. Влияние черноты карбонизированного слоя σ на поведение температурного профиля в точке (1.5, 10) при мощности излучения 10 W: штрихпунктирная линия — $\sigma = 0$; сплошная линия — $\sigma = 0.3$; штриховая линия — $\sigma = 0.35$.

применения не является большим. Так, продолжительность „кипения“ в точке наблюдения (когда температура превышает 95°C) увеличивается с 10 (при $\sigma = 0.3$) до 11.2 s (при $\sigma = 0.35$).

Роль карбонизированного наконечника оптоволокну в повышении эффективности лазерной термотерапии отмечается многими авторами [11–14, 18–23]. Карбонизация может быть как естественной, т.е. результатом взаимодействия лазерного излучения с биологической средой [11, 18], так и искусственной, как результат контактного лазерного воздействия с различными материалами, например, с деревом [19, 21], с активированным углем [20, 21], со смесью графита и силиконового лака — технология SAC (strongly absorbing coating) [23].

Выбор той или иной технологии для создания карбонизированного покрытия определяет диапазон возможных значений черноты наконечника σ , который может быть обеспечен для проведения лазерной терапии. Так, покрытие, образованное непосредственным взаимодействием лазерного излучения с кровью, имеет черноту от 0.3 до 0.7 [18]. Карбонизация при контакте с деревом обеспечивает черноту от 0.1 до 0.2 [19]. Карбонизированный слой, получаемый с помощью технологии SAC, характеризуется чернотой в диапазоне от 0.3 до 0.5 [23]. Использование титаносодержащего конвертера с объемной долей диоксида титана 0.22 обеспечивает черноту наконечника 0.84 при длине волны 980 nm [22].

Карбонизированный наконечник оптоволокну нередко называется „hot tip“ [12–14], „blackened tip“ [19], также используется термин (углеродосодержащий) конвертер [21]. Толщина карбонизированного слоя определяется способом его создания. Так, в соответствии с результатами, представленными в работе [18], толщина карбонизированного слоя, образованного в результате

взаимодействия лазерного излучения с кровью, составляет 0.02–0.03 mm. В работе [21] приводится обзор различных конвертеров и их свойства. В частности, содержится классификация конвертеров, согласно которой они подразделяются на пленочные с толщиной карбонизированного слоя 0.05 mm и на объемные (плоские и сферические) с толщиной слоя до 0.15 mm.

Отметим, что при проведении численных экспериментов авторами была выбрана толщина карбонизированного слоя 0.2 mm, поскольку использование толщин меньше 0.1 mm сопряжено со значительными вычислительными затратами. Предварительно для обоснования этого выбора была изучена зависимость температурного поля от толщины наконечника. При проведении численного моделирования рассматривалась область $(0, 2.5) \times (0, 2)$, содержащая неподвижный наконечник толщиной 0.02 либо 0.2 mm с центром в точке $(0, 1)$. Сравнивались температурные профили, описывающие поперечные к стенке вены распределения температур, в различные моменты времени (0.5, 1 и 1.5 s) и при различных значениях z (0.6, 0.7 и 0.8 mm). В результате проведенного численного моделирования наблюдалось визуальное совпадение температурных профилей, соответствующих наконечникам с толщинами 0.02 и 0.2 mm. Это объясняется тем, что при увеличении объема наконечника хоть и происходит уменьшение интенсивности источника на единицу объема, но суммарная интенсивность источника по всему наконечнику остается неизменной (см. уравнения (1) и (2)). Таким образом, при проведении численных расчетов, вне зависимости от реальных размеров наконечника, можно использовать толщину карбонизированного слоя, равную 0.2 mm.

Алгоритм решения задачи оптимального управления и его численная реализация

Пусть для коэффициента теплопроводности справедливо представление (6). Ввиду нелинейности задачи, для нахождения оптимальной пары P_φ, P_θ , минимизирующей функцию J_0 , будем использовать следующий итерационный алгоритм.

0. Инициализируем счетчик итерационного процесса, $n = 0$.

1. Задаем начальное управление $(P_\varphi^{(0)}, P_\theta^{(0)})$.

2. Увеличиваем счетчик итерационного процесса, $n = n + 1$.

3. Используя $(P_\varphi^{(n-1)}, P_\theta^{(n-1)})$ в качестве аппроксимации пары (P_φ, P_θ) , из (10)–(13) находим функции $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ и по ним соответствующие коэффициенты C_i , $i = 1, 2, \dots, 5$.

4. Из равенств (15), (16) (или (17), (18) в случае фиксированной черноты наконечника) находим управление $(P_\varphi^{(n)}, P_\theta^{(n)})$.

5. Переходим к шагу 2.

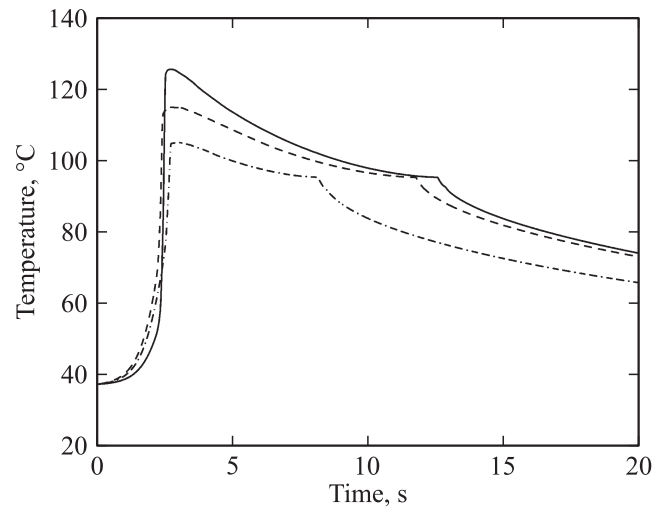


Рис. 5. Сходимость итерационного алгоритма решения задачи оптимального управления: сплошная линия — температурный профиль, соответствующий $P = (P_\varphi, P_\theta) = (7, 3)$, который требуется приблизить; штрихпунктирная линия — температурный профиль, соответствующий начальному приближению $P^{(0)} = (12, 0)$; штриховая линия — температурный профиль, полученный после первой итерации, $P^{(1)} = (14.99, 0.05)$.

При реализации итерационного алгоритма, следуя [12–14], на каждом n -м шаге при нахождении C_i , $i = 1, 2, \dots, 5$, будем использовать следующее представление для коэффициента теплопроводности крови:

$$k(x, t) = \begin{cases} k_0, & \text{если } P_\varphi^{(n-1)}\theta_1 + P_\theta^{(n-1)}\theta_2 + \theta_3 < 95, \\ 200k_0, & \text{если } P_\varphi^{(n-1)}\theta_1 + P_\theta^{(n-1)}\theta_2 + \theta_3 \geq 95, \end{cases}$$

где k_0 — значение коэффициента теплопроводности крови, соответствующее температуре в начальный момент времени.

Возьмем в качестве заданной функции θ_d , которую требуется приблизить с помощью представленного выше итерационного алгоритма, температурный профиль в точке $(1.5, 10)$, найденный путем численного решения задачи (1)–(5) при $(P_\varphi, P_\theta) = (7, 3)$ (рис. 2). Такой выбор функции θ_d сделан для иллюстрации работы алгоритма и позволяет заранее знать управление (P_φ, P_θ) , обеспечивающее минимум функции J_0 . Это дает возможность проанализировать сходимость к нему итерационного алгоритма.

В качестве начального приближения $P_\varphi^{(0)}$ и $P_\theta^{(0)}$ возьмем значения 12 и 0. После первой итерации получаем приближение управления $(P_\varphi^{(1)}, P_\theta^{(1)}) = (14.99, 0.05)$. Температурные профили, соответствующие нулевому и первому приближению, представлены на рис. 5. После второй итерации получаем приближение управления $(P_\varphi^{(2)}, P_\theta^{(2)}) = (8.01, 2.51)$, соответствующий температурный профиль представлен на рис. 6. После четвертой итерации полученное приближение температурного профиля визуально неразличимо с

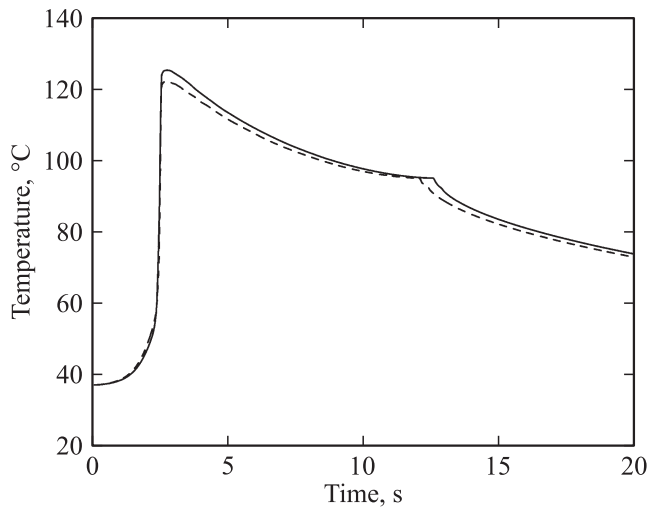


Рис. 6. Сходимость итерационного алгоритма решения задачи оптимального управления: сплошная линия — температурный профиль, соответствующий $P = (P_\phi, P_\theta) = (7, 3)$, который требуется приблизить; штриховая линия — температурный профиль, полученный после двух итераций, $P^{(2)} = (8.01, 2.51)$. График, полученный после четырех итераций и соответствующий $P^{(4)} = (6.75, 3.07)$, визуально неразличим со сплошной линией.

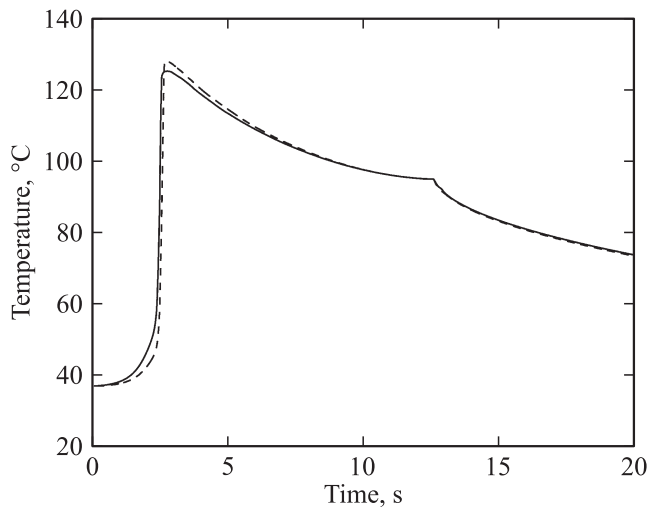


Рис. 7. Решение задачи оптимального управления при фиксированной черноте карбонизированного слоя $\sigma = 0.5$: сплошная линия — температурный профиль, соответствующий $P = (P_\phi, P_\theta) = (7, 3)$, который требуется приблизить; штриховая линия — температурный профиль, полученный по формулам (17), (18) после трех итераций, $P^{(3)} = (3.97, 3.97)$.

функцией θ_d , соответствующее значение управления $(P_\phi^{(4)}, P_\theta^{(4)}) = (6.75, 3.07)$. На основе представленного эксперимента можно сделать вывод о быстрой сходимости итерационного алгоритма.

Целью следующего эксперимента было получить приближение функции θ_d при фиксированной черноте наконечника. С практической точки зрения это означает,

что не требуется, используя специальные технологии, подгонять черноту наконечника под значение, полученное с помощью формул (15) и (16). Можно измерить черноту наконечника имеющегося оптоволокну и затем с помощью формул (17) и (18) определить оптимальную мощность, которая будет обеспечивать наилучшее приближение. Как и ранее, заданная функция θ_d соответствует $(P_\phi, P_\theta) = (7, 3)$, что соответствует мощности лазера 10 W и черноте наконечника $\sigma = 0.3$. Пусть имеется оптоволокну с чернотой наконечника $\sigma = 0.5$. Требуется подобрать суммарную мощность $P_\phi + P_\theta$, чтобы приблизить решение задачи (1)–(5) к функции θ_d . После трех итераций алгоритма с использованием формул (17) и (18) получено достаточно хорошее приближение функции θ_d (рис. 7), соответствующее управлению $(P_\phi^{(3)}, P_\theta^{(3)}) = (3.97, 3.97)$. То есть при изменении черноты наконечника с 0.3 до 0.5, возникшего, например, в результате эксплуатации оптоволокну [18], для достижения хорошего приближения функции θ_d достаточно уменьшить мощность лазера с 10 до 8 W.

При реализации итерационной процедуры на каждом временном шаге функции θ_1, θ_2 и θ_3 находились с помощью метода конечных элементов с использованием пакета FreeFEM++ [24].

Заключение

В работе предложен и реализован итерационный алгоритм, определяющий оптимальные параметры излучения (мощности источника, идущие на излучение и на нагрев наконечника оптоволокну) при проведении процедуры ВВЛА для получения наилучшего приближения к заданному температурному профилю в некоторой точке модельной области. Предложенный алгоритм обладает быстрой сходимостью и обеспечивает хорошую аппроксимацию. Направления дальнейших исследований авторов будут связаны с обобщением алгоритма на случай, позволяющий аппроксимировать требуемый температурный профиль на внутренней стенке вены для обеспечения облитерации сосуда и одновременно гарантировать безопасную температуру в перивенозной ткани.

Финансирование работы

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-01-00113 (а).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] Boné S.C. // Rev. Patol. Vasc. 1999. V. 5. P. 35.
- [2] Van den Bos R.R., Neumann M., De Roos K.-P., Nijsten T. // Dermatol. Surg. 2009. V. 35. N 8. P. 1206.

- [3] Ahadiat O., Higgins S., Ly A., Nazemi A., Wysong A. // *Dermatol. Surg.* 2018. V. 44. N 5. P. 679.
- [4] Malskat W.S.J., Stokbroekx M.A.L., Van der Geld C.W.M., Nijsten T.E.C., Van den Bos R.R. // *Lasers Med. Sci.* 2014. V. 29. P. 423.
- [5] Красников И.В., Сетейкин А.Ю., Попов А.П. // *Опт. и спектр.* 2015. Т. 118. № 4. С. 698; Krasnikov I.V., Seteikin A.Y., Popov A.P. // *Opt. Spectrosc.* 2015. V. 118. N 4. P. 668.
- [6] Прохоров И.В., Яровенко И.П. // *Опт. и спектр.* 2006. Т. 101. № 5. С. 817; Prokhorov I.V., Yarovenko I.P. // *Opt. Spectrosc.* 2006. V. 101. N 5. P. 769.
- [7] Яровенко И.П., Прохоров И.В. // *Опт. и спектр.* 2018. Т. 124. № 4. С. 534; Yarovenko I.P., Prokhorov I.V. // *Opt. Spectrosc.* 2018. V. 124. N 4. P. 567.
- [8] Сетейкин А.Ю. // *Опт. и спектр.* 2005. Т. 99. № 4. С. 685; Seteikin A.Y. // *Opt. Spectrosc.* 2005. V. 99. N 4. P. 659.
- [9] Ковтанюк А.Е., Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю. // *Опт. и спектр.* 2017. Т. 123. № 2. С. 194; Kovtanyuk A.E., Grenkin G.V., Chebotarev A.Y. // *Opt. Spectrosc.* 2017. V. 123. N 2. P. 205.
- [10] Chebotarev A.Y., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H. // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2018. V. 57. P. 290.
- [11] De Boer A., Oliveira J.L.G., Van der Geld C.W.M., Malskat W.S.J., Van den Bos R., Nijsten T., Van Gemert M.J.C. // *Int. J. Heat and Mass Transfer.* 2017. V. 113. P. 153.
- [12] Van Ruijven P.W.M., Poluektova A.A., Van Gemert M.J.C., Neumann H.A.M., Nijsten T., Van der Geld C.W.M. // *Lasers Med. Sci.* 2014. V. 29. P. 431.
- [13] Poluektova A.A., Malskat W.S.J., Van Gemert M.J.C., Vuylsteke M.E., Bruijninx C.M.A., Neumann H.A.M., Van der Geld C.W.M. // *Lasers Med. Sci.* 2014. V. 29. P. 441.
- [14] Malskat W.S.J., Poluektova A.A., Van der Geld C.W.M., Neumann H.A.M., Weiss R.A., Bruijninx C.M.A., Van Gemert M.J.C. // *Lasers Med. Sci.* 2014. V. 29. P. 393.
- [15] Mordon S., Wassmer B., Zemmouri J. // *BioMedical Engineering OnLine.* 2006. V. 5. N. art. 26.
- [16] Mordon S., Wassmer B., Zemmouri J. // *Lasers Surg. Med.* 2007. V. 39. P. 256.
- [17] Marshak R. // *Phys. Rev.* 1947. V. 71. N 7. P. 443.
- [18] Amzayyb M., Van den Bos R.R., Kodach V.M., De Bruin D.M., Nijsten T., Neumann H.A.M., Van Gemert M.J.C. // *Lasers Med. Sci.* 2010. V. 25. P. 439.
- [19] Yusupov V.I., Chudnovskii V.M., Bagratashvili V.N. // *Laser Physics.* 2010. V. 20. N 7. P. 1641.
- [20] Жигарьков В.С., Юсупов В.И., Цыпина С.И., Баграташвили В.Н. // *Квант. электрон.* 2017. Т. 47. № 10. С. 942; Zhigarkov V.S., Yusupov V.I., Tsykina S.I., Bagratashvili V.N. // *Quant. Electron.* 2017. V. 47. N 10. P. 942.
- [21] Беликов А.В., Скрипник А.В., Курнышев В.Ю., Шатулова К.В. // *Квант. электрон.* 2016. Т. 46. № 6. С. 534; Belikov A.V., Skrypnik A.V., Kurnyshev V.Yu., Shatilova K.V. // *Quant. Electron.* 2016. V. 46. N 6. P. 534.
- [22] Беликов А.В., Скрипник А.В. // *Квант. электрон.* 2020. Т. 50. № 2. С. 95; Belikov A.V., Skrypnik A.V. // *Quant. Electron.* 2020. V. 50. N 2. P. 95.
- [23] Bredikhin V.I. // *Mater. Res. Express.* 2019. V. 6. N. art. 065412.
- [24] Hecht F. // *J. Numer. Math.* 2012. V. 20. N 3–4. P. 251.