18

Магнитопроводимость щелевой модификации графена

© С.В. Крючков [1,2], Е.И. Кухарь [1]

[1] Волгоградский государственный педагогический университет,
Волгоград, Россия
[2] Волгоградский государственный технический университет,
Волгоград, Россия
E-mail: eikuhar@yandex.ru

(Поступила в Редакцию 12 апреля 2011 г.
В окончательной редакции 15 июня 2011 г.)

Исследовано влияние магнитного поля на проводимость щелевой модификации графена. В случае неквантующего поля на основе уравнения Больцмана определены зависимости проводимости и холловской проводимости графена от напряженности магнитного поля. В борновском приближении по потенциалу рассеяния на акустических фононах получена формула для проводимости графена, помещенного в квантующее магнитное поле при низких температурах. Показано, что в этом случае зависимость проводимости от напряженности магнитного поля имеет характер осцилляций.

Работа поддержана грантом РФФИ № 10-02-97001-р_поволжье_а и проводилась в рамках программы „Развитие научного потенциала высшей школы".

1. Введение

Развитие микро- и наноэлектроники непрерывно требует поиска новых материалов и структур. В настоящее время исследователей привлекает изучение электронных свойств графена (монослоя углерода), полученного в лаборатории относительно недавно [1]. Повышенный интерес к электронным свойствам графена в настоящее время связан со следующим. Во-первых, экспериментально показано [1], что длина свободного пробега электрона в графене имеет порядок микрометра. Этот факт позволяет использовать графен для создания микрометровых приборов, работающих в баллистическом режиме. Высокая электрическая проводимость делает графен перспективным материалом для использования в наноэлектронике наряду с углеродными нанотрубками [2]. На его основе уже разработаны образцы полевых транзисторов и ряд других электронных приборов [3,4].

Во-вторых, этот материал обладает рядом необычных свойств, обусловленных особенностями его зонной структуры [5–7]. Непараболичность и неаддитивность электронного спектра графена дает возможность для проявления ряда нелинейных кинетических эффектов в этом материале [8–11]. Кроме того, для бесщелевой модификации графена вблизи так называемых дираковских точек зоны Бриллюэна закон дисперсии линеен по абсолютной величине квазиимпульса, что соответствует безмассовым частицам [7]. Этот факт дает, кроме всего прочего, возможность использовать графен для проверки релятивистских эффектов. Если графеновый лист помещен на подложку (например SiC), то возникает запрещенная зона — так называемая щелевая модификация графена [12–14].

В последнее время активно ведутся теоретические и экспериментальные исследования влияния внешних полей различной конфигурации на транспортные свойства графена [15–23]. В [15] теоретически исследованы осцилляции проводимости графена в пространственно-модулированном магнитном поле. Теория электронного транспорта носителей заряда с дираковским спектром в слабом магнитном поле, учитывающая рассеяние на заряженных примесях, построена в [16]. В [17–23] изучены магнитные осцилляционные эффекты в структурах на основе графена. Влияние магнитного поля на высокочастотную проводимость графена и на поглощение графеном электромагнитного излучения исследованы в [20–23]. Квантовая теория осцилляций поперечной магнитопроводимости (эффект Шубникова–де Гааза) в двумерной системе с дираковским спектром дана в [19].

В настоящей работе исследована зависимость проводимости щелевой модификации графена от напряженности магнитного поля. Электронный спектр щелевой модификации графена можно записать в виде [14]

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \pm\sqrt{\Delta^2 + v_{\mathrm{F}}^2 p^2}, \tag{1}$$

где $\mathbf{p}$ — квазиимпульс с компонентами $\{p_x, p_y\}$, Δ — полуширина запрещенной зоны, v_{F} — скорость на поверхности Ферми. В дальнейшем будем рассматривать низкие температуры ($\theta \sim 0.001{-}0.01\,\mathrm{eV}$), значительно меньшие ширины запрещенной зоны ($2\Delta = 0.26\,\mathrm{eV}$). В этом случае процессы перехода электронов из валентной зоны в зону проводимости маловерятны, валентная зона полностью заполнена, и вклад в проводимость дают только электроны зоны проводимости. При этом в законе дисперсии (1) оставим только знак $+$. Считаем, что графен, расположенный в плоскости xy, помещен в скрещенные магнитное и электрическое поля таким образом, что напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$ направлена перпендикулярно графеновой плоскости, а напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ — вдоль оси Ox.

2. Влияние неквантующего магнитного поля на проводимость щелевой модификации графена

Рассмотрим случай неквантующего магнитного поля

$$\frac{\hbar v_{\mathrm{F}}}{a_H} \le \theta, \tag{2}$$

где θ — температура электронного газа, выраженная в энергетических единицах, $a_H = \sqrt{c\hbar/eH}$ — ларморовский радиус. Для $\theta \sim 0,01\,\mathrm{eV}$ условию (2) соответствует напряженность магнитного поля $H < 1\,\mathrm{T}$. Вектор плотности электрического тока, возникающего в графене в описанных выше условиях, рассчитывается по формуле

$$\mathbf{j} = -e\sum_{\mathbf{p}} \mathbf{V}(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}, t), \tag{3}$$

где $\mathbf{V}$ — скорость электрона, определяемая выражением

$$\mathbf{V} = \frac{v_{\mathrm{F}}^2 \mathbf{p}}{\sqrt{\Delta^2 + v_{\mathrm{F}}^2 p^2}}. \tag{4}$$

Неравновесная функция распределения $f(\mathbf{p}, t)$, входящая в (3), определяется из уравнения Больцмана, записанного в приближении постоянного времени релаксации τ

$$\frac{\partial f}{\partial t} - e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{V}, \mathbf{H}]\right)\frac{\partial f}{\partial p} = -\frac{f - f_0}{\tau}. \tag{5}$$

Решением кинетического уравнения является функция

$$f(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-t'}{\tau}} f_0\big(\mathbf{p}'(\mathbf{p}, t, t')\big)dt', \tag{6}$$

где $f_0(\mathbf{p})$ — равновесная функция распределения. Импульс электрона $\mathbf{p}'(t')$ удовлетворяет классическому уравнению движения

$$\frac{d\mathbf{p}'}{dt'} = -e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{V}', \mathbf{H}]\right) \tag{7}$$

с начальным условием $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}$. Решение уравнения (7) в проекциях на координатные оси имеет вид

$$p_x = p'_x - eE_x(t - t') - \frac{eH}{c}\int_{t'}^{t} V'_y dt_1,$$

$$p_y = p'_y + \frac{eH}{c}\int_{t'}^{t} V'_x dt_1. \tag{8}$$

Решая уравнения (8) итерациями по малому параметру $v_{\mathrm{F}}/c \ll 1$, получаем в линейном приближении по напряженности электрического поля

$$p_x = p'_x - \frac{ev_{\mathrm{F}}^2 H p'_y(t - t')}{c\sqrt{\Delta^2 + v_{\mathrm{F}}^2 p'^2}} - \left(1 + \frac{eHv_{\mathrm{F}}^4 p'_x p'_y(t - t')}{2c\left(\Delta^2 + v_{\mathrm{F}}^2 p'^2\right)^{3/2}}\right) eE_x(t - t'), \tag{9}$$

$$p_y = p'_y + \frac{ev_{\mathrm{F}}^2 H p'_x(t - t')}{c\sqrt{\Delta^2 + v_{\mathrm{F}}^2 p'^2}} + \frac{ev_{\mathrm{F}}^2 H(t - t')}{2c\sqrt{\Delta^2 + v_{\mathrm{F}}^2 p'^2}}\left(\frac{v_{\mathrm{F}}^2 p'^2}{\Delta^2 + v_{\mathrm{F}}^2 p'^2} - 1\right) eE_x(t - t'). \tag{10}$$

Введем следующие обозначения:

$$a_1 = p'_x - \frac{ev_{\mathrm{F}}^2 H p'_y(t - t')}{c\sqrt{\Delta^2 + v_{\mathrm{F}}^2 p'^2}}, \quad b_1 = -\frac{eHv_{\mathrm{F}}^4 p'_x p'_y(t - t')}{2c\left(\Delta^2 + v_{\mathrm{F}}^2 p'^2\right)^{3/2}},$$

$$a_2 = p'_y + \frac{ev_{\mathrm{F}}^2 H p'_x(t - t')}{c\sqrt{\Delta^2 + v_{\mathrm{F}}^2 p'^2}},$$

$$b_2 = -\frac{ev_{\mathrm{F}}^2 H(t - t')(\Delta^2 + v_{\mathrm{F}}^2 p'^2_y)}{2c\left(\Delta^2 + v_{\mathrm{F}}^2 p'^2\right)^{3/2}}. \tag{11}$$

Подставляя (9) и (10) в (4), определяем проекции скорости электрона в линейном приближении по E_x

$$V_x = v_{\mathrm{F}}^2\left(\frac{a_1}{\sqrt{\Delta^2 + v_{\mathrm{F}}^2 a_1^2 + v_{\mathrm{F}}^2 a_2^2}} - \frac{v_{\mathrm{F}}^2 a_1^2(b_1 - 1) + v_{\mathrm{F}}^2 a_1 a_2 b_2}{\left(\Delta^2 + v_{\mathrm{F}}^2 a_1^2 + v_{\mathrm{F}}^2 a_2^2\right)^{3/2}} \times eE_x(t - t') + \frac{(b_1 - 1)eE_x(t - t')}{\sqrt{\Delta^2 + v_{\mathrm{F}}^2 a_1^2 + v_{\mathrm{F}}^2 a_2^2}}\right), \tag{12}$$

$$V_y = v_{\mathrm{F}}^2\left(\frac{a_2}{\sqrt{\Delta^2 + v_{\mathrm{F}}^2 a_1^2 + v_{\mathrm{F}}^2 a_2^2}} - \frac{v_{\mathrm{F}}^2 a_1 a_2(b_1 - 1) + v_{\mathrm{F}}^2 a_2^2 b_2}{\left(\Delta^2 + v_{\mathrm{F}}^2 a_1^2 + v_{\mathrm{F}}^2 a_2^2\right)^{3/2}} \times eE_x(t - t') + \frac{b_2 eE_x(t - t')}{\sqrt{\Delta^2 + v_{\mathrm{F}}^2 a_1^2 + v_{\mathrm{F}}^2 a_2^2}}\right). \tag{13}$$

Подставляя (6), (12) и (13) в (3) и учитывая, что a_1, a_2, b_1 — нечетные функции p'_x и p'_y, получаем для компонент плотности тока следующие выражения:

$$j_x = -\frac{e^2 v_{\mathrm{F}}^4 E_x}{\tau}\int_{-\infty}^{t} dt' e^{-\frac{t-t'}{\tau}}(t - t')\sum_{\mathbf{p}'} f_0(\mathbf{p}') \times\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta^2 + v_{\mathrm{F}}^2(a_1^2 + a_2^2)}} - \frac{\left(a_1^2(b_1 - 1) + a_1 a_2 b_2\right)}{\left(\Delta^2 + v_{\mathrm{F}}^2(a_1^2 + a_2^2)\right)^{3/2}}\right), \tag{14}$$

$$j_y = -\frac{e^2 v_{\mathrm{F}}^2 E_x}{\tau}\int_{-\infty}^{t} dt' e^{-\frac{t-t'}{\tau}}(t - t')\sum_{\mathbf{p}'} f_0(\mathbf{p}') \times\left(\frac{b_2}{\sqrt{\Delta^2 + v_{\mathrm{F}}^2(a_1^2 + a_2^2)}} - \frac{v_{\mathrm{F}}^2\left(a_1 a_2(b_1 - 1) + a_2^2 b_2\right)}{\left(\Delta^2 + v_{\mathrm{F}}^2(a_1^2 + a_2^2)\right)^{3/2}}\right). \tag{15}$$

Подставляя в (14) и (15) формулы (11), вводя безразмерные переменные $x = (t - t')/\tau$, $\mathbf{q} = v_{\mathrm{F}}\mathbf{p}/\Delta$ и обозначая $H_0 = c\Delta/ev_{\mathrm{F}}^2\tau$, преобразуем выражения для компонент плотности тока

$$j_x = \frac{e^2 v_{\mathrm{F}}^2 E_x \tau}{\Delta} \int\limits_0^\infty x e^{-x} dx \sum_{\mathbf{p}} f_0(\mathbf{p}) \Bigg(1 + q^2 \times \left(1 + \frac{H^2x^2}{H_0^2(1+q^2)}\right)\Bigg)^{-3/2} \Bigg(1 + q^2\left(1 + \frac{H^2x^2}{H_0^2(1+q^2)}\right) + q_x^2 + \frac{(q_x^2 - q_y^2 - q_x^2q_y^2 - q_y^4)H^2x^2}{2H_0^2\left(1+q^2\right)^2}\Bigg), \quad (16)$$

$$j_y = \frac{e^2 v_{\mathrm{F}}^2 E_x \tau}{\Delta} \frac{H}{H_0} \int\limits_0^\infty x^2 e^{-x} dx \sum_{\mathbf{p}} f_0(\mathbf{p}) \times \left(1 + q^2\left(1 + \frac{H^2x^2}{H_0^2(1+q^2)}\right)\right)^{-3/2} \times \left(\frac{H_0^2(1 + q^2 + 2q_y^2 + 2q_y^4 - 2q_x^2 - 2q_x^4) + H^2x^2q_y^2}{2H_0^2\left(1+q^2\right)^{3/2}}\right). \quad (17)$$

В случае температур, удовлетворяющих условию (2), электронный газ можно считать невырожденным. Поэтому равновесную функцию распределения $f_0(\mathbf{p})$ выберем в виде функции Больцмана

$$f_0(\mathbf{p}) = A_1 e^{-\frac{\varepsilon(\mathbf{p})}{\theta}}, \quad (18)$$

где A_1 — константа, определяемая из условия нормировки

$$\sum_{\mathbf{p}} f_0(\mathbf{p}) = n_0, \quad (19)$$

n_0 — поверхностная концентрация свободных носителей заряда. Заменим в (16), (17) и (19) суммирование по импульсам $\mathbf{p}$ интегрированием в полярных координатах

$$\sum_{\mathbf{p}} \to \frac{S}{(2\pi\hbar)^2} \iint dp_x dp_y = \frac{S}{(2\pi\hbar)^2} \frac{\Delta^2}{v_{\mathrm{F}}^2} \iint dq_x dq_y.$$

В результате получим следующие выражения для проекций плотности тока:

$$j_x = \frac{n_0 e^2 v_{\mathrm{F}}^2 E_x \tau}{4\theta(1+\theta/\Delta)} \int\limits_0^\infty x e^{-x} dx \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\Delta}{\theta}\left(\sqrt{1+y}-1\right)} \times \left((1+y)\left(1 + \frac{H^2x^2}{H_0^2(1+y)}\right)\right)^{-3/2} \times \left(2 + 3y + \frac{(4+3y)yH^2x^2}{2H_0^2(1+y)}\right) dy, \quad (20)$$

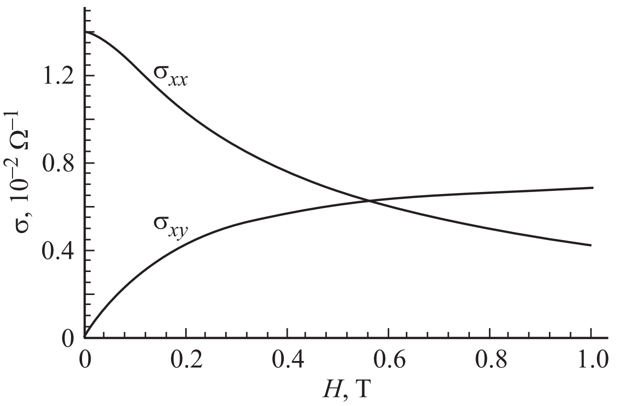

Рис. 1. Зависимость проводимости σ_{xx} и холловской проводимости σ_{xy} от индукции магнитного поля.

$$j_y = \frac{n_0 e^2 v_{\mathrm{F}}^2 E_x \tau}{4\theta(1+\theta/\Delta)} \frac{H}{H_0} \int\limits_0^\infty x^2 e^{-x} dx \times \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\Delta}{\theta}\left(\sqrt{1+y}-1\right)} \left(1 + y\left(1 + \frac{H^2x^2}{H_0^2(1+y)}\right)\right)^{-3/2} \times \left(\frac{2H_0^2(1+y) + H^2x^2y}{2H_0^2(1+y)^{3/2}}\right) dy. \quad (21)$$

Компоненты тензора проводимости определяются из формул $j_x = \sigma_{xx}E_x$, $j_y = \sigma_{xy}E_x$. Следовательно, магнитопроводимость графена равна

$$\sigma_{xx} = \sigma_0 \int\limits_0^\infty x e^{-x} dx \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\Delta}{\theta}\left(\sqrt{1+y}-1\right)} \times \left(1 + y\left(1 + \frac{H^2x^2}{H_0^2(1+y)}\right)\right)^{-3/2} \times \left(2 + 3y + \frac{(4+3y)yH^2x^2}{2H_0^2(1+y)}\right) dy. \quad (22)$$

Холловская проводимость имеет вид

$$\sigma_{xy} = \sigma_0 \frac{H}{H_0} \int\limits_0^\infty x^2 e^{-x} dx \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\Delta}{\theta}\left(\sqrt{1+y}-1\right)} \times \left(1 + y\left(1 + \frac{H^2x^2}{H_0^2(1+y)}\right)\right)^{-3/2} \times \left(\frac{2H_0^2(1+y) + H^2x^2y}{2H_0^2(1+y)^{3/2}}\right) dy. \quad (23)$$

где $\sigma_0 = n_0 e^2 v_{\mathrm{F}}^2 \tau / 4\theta(1 + \theta/\Delta)$.

Зависимости компонент тензора проводимости от напряженности магнитного поля исследованы численно на ЭВМ. Графики зависимости проводимости от индукции магнитного поля, построенные по формулам (22) и (23) для следующих значений параметров [1,12,17,18]: $n_0 = 10^{12}\,\mathrm{cm}^{-2}$, $\Delta = 0.13\,\mathrm{eV}$, $\theta = 0.01\,\mathrm{eV}$, $\tau = 10^{-12}\,\mathrm{s}$, $\upsilon_\mathrm{F} = 10^8\,\mathrm{cm/s}$, показаны на рис. 1. В случае слабых магнитных полей ($H \ll H_0 \sim 0.1\,\mathrm{T}$) формулы (22) и (23) можно приближенно записать в виде

$$\sigma_{xx} = \frac{n_0 e^2 \upsilon_\mathrm{F}^2 \tau}{\Delta}\left(1 - \left(1 + \frac{6e^2\upsilon_F^4\tau^2}{c^2\Delta^2}H^2\right)\frac{\theta}{\Delta}\right), \quad (24)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{n_0 e^3 \upsilon_\mathrm{F}^4 \tau^2}{2c\Delta^2}H\left(1 - 3\left(1 + \frac{4e^2\upsilon_F^4\tau^2}{c^2\Delta^2}H^2\right)\frac{\theta}{\Delta}\right). \quad (25)$$

3. Осцилляции поперечной проводимости щелевой модификации графена в квантующем магнитном поле

Определим магнитопроводимость графена в случае квантующего магнитного поля и низких температур

$$\theta \ll \frac{\hbar\upsilon_\mathrm{F}}{a_H}, \quad \alpha \ll \frac{\hbar\upsilon_\mathrm{F}}{a_H}, \quad (26)$$

где α — феноменологически введенная ширина уровня Ландау, связанная с неоднородностями решетки. Если $\alpha \sim \theta \sim 10^{-3}\,\mathrm{eV}$, то условия (26) соответствуют магнитным полям, для которых $H \gg 10^{-3}\,\mathrm{T}$. В [19], где исследован эффект Шубникова–де Гааза в двумерной системе с дираковским спектром, предполагалось, что уровни Ландау имеют конечную ширину α, связанную с рассеянием носителей заряда на неоднородностях решетки. Однако параметр α вводился в [19] феноменологически. Ниже получено выражение для поперечной магнитопроводимости щелевой модификации графена с учетом упругого рассеяния электронов проводимости на акустических фононах, которое при определенных условиях не зависит от величины уширения уровней Ландау α.

В случае, когда графен помещен во внешнее магнитное поле, напряженность $\mathbf{H}$ которого перпендикулярна плоскости графена, гамильтониан имеет вид

$$\hat{H}_0 = \hbar\upsilon_\mathrm{F}\begin{pmatrix} \frac{\Delta}{\hbar\upsilon_\mathrm{F}} & -i\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} - i\frac{x}{a_H^2} \\ -i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + i\frac{x}{a_H^2} & -\frac{\Delta}{\hbar\upsilon_\mathrm{F}} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Собственными функциями гамильтониана (27) являются

$$\psi_{nk}(x,y) \equiv |kn\rangle = \frac{1}{\sqrt{2La_H}}e^{iky}\begin{pmatrix} \Phi_{n+1}\left(\frac{x-x_k}{a_H}\right) \\ \Phi_n\left(\frac{x-x_k}{a_H}\right) \end{pmatrix}, \quad (28)$$

где $\Phi_n(z)$ — функция гармонического осциллятора, k — проекция волнового вектора электрона но ось Oy, $x_k = -ka_H^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, L — линейный размер графена. Собственные значения энергии электрона имеют вид

$$\varepsilon_n = \sqrt{\Delta^2 + \frac{2\hbar^2\upsilon_\mathrm{F}^2 n}{a_H^2}}. \quad (29)$$

Так как закон дисперсии (1) зависит только от $|\mathbf{p}|$, то для поперечной магнитопроводимости справедлива формула Титейка [24]

$$\sigma_{xx} = -\frac{\pi e^2}{\hbar}\sum_{nk}\sum_{n'k'}\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_n}(x_{k'} - x_k)^2 \times \left|\langle k'n'|V|kn\rangle\right|^2\delta(\varepsilon_{n'} - \varepsilon_n). \quad (30)$$

Пусть электроны в графене рассеиваются на акустических фононах. Тогда потенциал рассеяния можно представить в следующм виде [25]:

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}}\exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}), \quad (31)$$

где $V_{\mathbf{q}} = \sqrt{\hbar\Lambda^2 q/2\rho\nu S}$, $\mathbf{q}$ — волновой вектор акустических фононов, Λ — деформационный потенциал, ρ — поверхностная плотность графена, ν — скорость звука в графене, S — площадь образца. После подстановки (31) в (30) получаем

$$\sigma_{xx} = -\frac{\pi e^2}{\hbar}\sum_{nk}\sum_{n'k'}\sum_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}}^2\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_n}(x_{k'} - x_k)^2 \times \left|\langle k'n'|e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}|kn\rangle\right|^2\delta(\varepsilon_{n'} - \varepsilon_n). \quad (32)$$

Используя равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi_n^2(z)e^{iaz}dz = \mathrm{L}_n\left(\frac{a^2}{2}\right)e^{-\frac{a^2}{4}},$$

найдем модуль матричного элемента, входящего в формулу (32), при $n = n'$

$$\left|\langle k'n|e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}|kn\rangle\right| = \left|\mathrm{L}_{n+1}\left(\frac{a_H^2 q^2}{2}\right) + \mathrm{L}_n\left(\frac{a_H^2 q^2}{2}\right)\right|\exp\left(-\frac{a_H^2 q^2}{4}\right)\delta_{k'k+q_y}, \quad (33)$$

где $\mathrm{L}_n(z)$ — полином Лагерра. После подстановки (33) в (32) и вычисления сумм по k и k' получаем

$$\sigma_{xx} = -\frac{e^2\Lambda^2}{8\sqrt{2}\pi^2\rho\nu}\frac{1}{a_H^3}\sum_n\sum_{n'}F_n\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_n}\delta(\varepsilon_{n'} - \varepsilon_n), \quad (34)$$

где

$$F_n = \int\limits_0^\infty z^{3/2}\big(L_{n+1}(z) + L_n(z)\big)^2\exp(-z)dz. \quad (35)$$

Применив к сумме по n' в формуле (34) формулу Пуассона [26], представим проводимость в виде двух слагаемых

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx1} + \sigma_{xx2}, \tag{36}$$

$$\sigma_{xx1} = -\frac{A}{\hbar^2 v_{\mathrm{F}}^2 a_H} \sum_n F_n \varepsilon_n \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_n}, \tag{37}$$

$$\sigma_{xx2} = -\frac{2A}{a_H^3} \sum_n F_n \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_n} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \cos(2\pi\kappa n')\delta(\varepsilon_{n'} - \varepsilon_n)dn', \tag{38}$$

где введено обозначение $A = e^2\Lambda^2/8\sqrt{2}\pi^2\rho\nu$. Чтобы вычислить слагаемое σ_{xx2}, заменим δ-функцию в (38) на выражение, учитывающее уширение уровней Ландау α

$$\delta(\varepsilon_{n'} - \varepsilon_n) \to \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\varepsilon_{n'} - \varepsilon_n)^2}. \tag{39}$$

В этом случае выражение (38) можно переписать в виде

$$\sigma_{xx2} = -\frac{2A}{\pi a_H^3} \sum_n F_n \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_n} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\cos(2\pi\kappa n')}{\alpha^2 + (\varepsilon_{n'} - \varepsilon_n)^2}\, dn'. \tag{40}$$

В случае низких температур (26) электронный газ является вырожденным, поэтому в качестве $f(\varepsilon)$ в формулах (37) и (40) используем функцию распределения Ферми–Дирака. При низких температурах величина $\partial f/\partial\varepsilon$, входящая в (37) и (40), близка к δ-функции. Поэтому с изменением напряженности магнитного поля H проводимость σ_{xx} испытывает резонанс каждый раз, когда уровень Ландау совпадает с уровнем химического потенциала μ. Таким образом, зависимость проводимости от напряженности магнитного поля имеет характер осцилляций.

Множитель F_n представляет собой медленно меняющуюся функцию n по сравнению с осциллирующей частью в подынтегральном выражении (35), а его численное значение имеет порядок еденицы. Преобразуем (37) и (40) к следующему виду:

$$\sigma_{xx1} = -\frac{A}{\hbar^2 v_{\mathrm{F}}^2 a_H} \sum_n \varepsilon_n \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_n}, \tag{41}$$

$$\sigma_{xx2} = -\frac{2A\alpha}{\pi a_H^3} \sum_n \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_n} \sum_{\kappa=1} \int_0^{\infty} \frac{\cos(2\pi\kappa n')}{\alpha^2 + (\varepsilon_{n'} - \varepsilon_n)^2} dn'. \tag{42}$$

Для вычисления интеграла, входящего в выражение (42) заметим, что наибольший вклад в интегральную сумму дают слагаемые, для которых $\varepsilon_{n'} \sim \varepsilon_n$ или $|\varepsilon_{n'} - \varepsilon_n| \ll \varepsilon_n$. Поэтому формулу (42) приближенно можно записать

$$\sigma_{xx2} = -\frac{2A\alpha}{\pi\hbar^2 v_{\mathrm{F}}^2 a_H} \sum_n \varepsilon_n \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_n} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left[\frac{2\pi\kappa a_H^2 \varepsilon_n}{\hbar^2 v_{\mathrm{F}}^2}\varepsilon + \frac{\pi\kappa a_H^2}{\hbar^2 v_{\mathrm{F}}^2}\left(\varepsilon_n^2 - \Delta^2\right)\right] \frac{d\varepsilon}{\alpha^2 + \varepsilon^2}. \tag{43}$$

Используя равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(pz + q)dz}{\alpha^2 + z^2} = \frac{\pi e^{-pa}\cos q}{\alpha},$$

определим

$$\sigma_{xx2} = -\frac{2A\alpha}{\hbar^2 v_{\mathrm{F}}^2 a_H} \sum_n \varepsilon_n \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_n} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{2\pi\kappa a_H^2 \varepsilon_n \alpha}{\hbar^2 v_{\mathrm{F}}^2}\right) \times \cos\left[\frac{\pi\kappa a_H^2}{\hbar^2 v_{\mathrm{F}}^2}\left(\varepsilon_n^2 - \Delta^2\right)\right]. \tag{44}$$

Применяя в суммах по n в (41) и (44) формулу Пуассона, перепишем

$$\sigma_{xx1} = \frac{A}{4\theta\hbar^2 v_{\mathrm{F}}^2 a_H} \sum_{\kappa=-\infty}^{\kappa=+\infty} \int_0^{\infty} \varepsilon(n)\,\mathrm{ch}^{-2}\frac{\varepsilon(n) - \mu}{2\theta}\, e^{2\pi i\kappa n} dn, \tag{45}$$

$$\sigma_{xx2} = \frac{A}{2\theta\hbar^2 v_{\mathrm{F}}^2 a_H} \sum_{\kappa'=-\infty}^{\kappa'=+\infty} \int_0^{\infty} \varepsilon(n)\,\mathrm{ch}^{-2}\frac{\varepsilon(n) - \mu}{2\theta}\, e^{2\pi i\kappa' n} dn \times \sum_{\kappa=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{2\pi\kappa a_H^2 \varepsilon(n)\alpha}{\hbar^2 v_{\mathrm{F}}^2}\right) \cos\left[\frac{\pi\kappa a_H^2}{\hbar^2 v_{\mathrm{F}}^2}\left(\varepsilon^2(n) - \Delta^2\right)\right]. \tag{46}$$

Отметим, что наибольший вклад при низких температурах θ в интегральную сумму дают слагаемые, для которых $\varepsilon_n \sim \mu$. Учитывая также, что $\mu \gg \theta$, выражения (45) и (46) можно приближенно представить в виде

$$\sigma_{xx1} = \frac{A\mu^2 a_H}{2\hbar^4 v_{\mathrm{F}}^4} \sum_{\kappa=-\infty}^{\kappa=+\infty} \exp\left[\frac{\pi i\kappa a_H^2(\mu^2 - \Delta^2)}{\hbar^2 v_{\mathrm{F}}^2}\right] \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{4\pi i\kappa\mu\theta a_H^2}{\hbar^2 v_{\mathrm{F}}^2} z\right) \mathrm{ch}^{-2} z\, dz, \tag{47}$$

$$\sigma_{xx2} = \frac{A\mu^2 a_H}{\hbar^4 v_{\mathrm{F}}^4} \sum_{\kappa'=-\infty}^{\kappa'=+\infty} \exp\left[\frac{\pi i\kappa' a_H^2(\mu^2 - \Delta^2)}{\hbar^2 v_{\mathrm{F}}^2}\right] \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{4\pi i\kappa'\mu\theta a_H^2}{\hbar^2 v_{\mathrm{F}}^2} z\right) \mathrm{ch}^{-2} z\, dz \times \sum_{\kappa=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{2\pi\kappa a_H^2\mu\alpha}{\hbar^2 v_{\mathrm{F}}^2}\right) \cos\left[\frac{\pi\kappa a_H^2}{\hbar^2 v_{\mathrm{F}}^2}\left(\mu^2 - \Delta^2\right)\right]. \tag{48}$$

Так как справедливо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iaz}\,\mathrm{ch}^{-2} z\, dz = \pi a\,\mathrm{sh}^{-1}\left(\frac{\pi a}{2}\right),$$

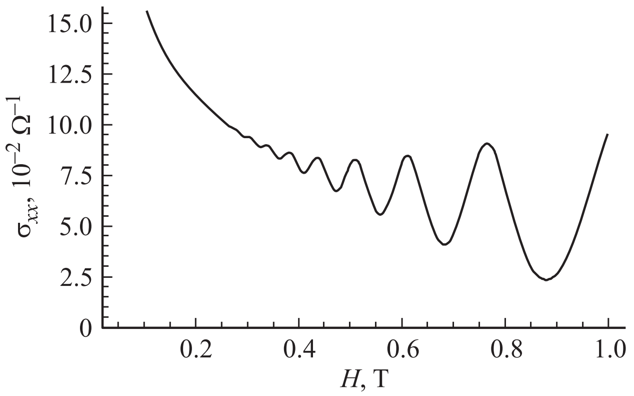

Рис. 2. Зависимость проводимости графена от индукции магнитного поля. $\mu/\Delta = 1.27$, $\theta/\Delta = 0.01$.

то формулы (47) и (48) можно записать следующим образом:

$$\sigma_{xx1} = \frac{A\mu^2 a_H}{\hbar^4 v_F^4}\left(1 + \frac{4\pi^2\mu\theta a_H^2}{\hbar^2 v_F^2}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\kappa\,\mathrm{sh}^{-1}\left(\frac{2\pi^2\mu\theta\kappa a_H^2}{\hbar^2 v_F^2}\right)\right.$$
$$\left.\times\cos\left[\frac{\pi\kappa a_H^2}{\hbar^2 v_F^2}\left(\mu^2-\Delta^2\right)\right]\right), \tag{49}$$

$$\sigma_{xx2} = \frac{2A\mu^2 a_H}{\hbar^4 v_F^4}\left(1 + \frac{4\pi^2\mu\theta a_H^2}{\hbar^2 v_F^2}\sum_{\kappa'=1}^{\infty}\kappa'\,\mathrm{sh}^{-1}\left(\frac{2\pi^2\mu\theta\kappa' a_H^2}{\hbar^2 v_F^2}\right)\right.$$
$$\left.\times\cos\left[\frac{\pi\kappa' a_H^2}{\hbar^2 v_F^2}\left(\mu^2-\Delta^2\right)\right]\right)$$
$$\times\sum_{\kappa=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{2\pi\mu\alpha\kappa a_H^2}{\hbar^2 v_F^2}\right)\cos\left[\frac{\pi\kappa a_H^2}{\hbar^2 v_F^2}\left(\mu^2-\Delta^2\right)\right]. \tag{50}$$

Подставив (49) и (50) в (36), получим

$$\sigma_{xx} = \frac{A\mu^2 a_H}{\hbar^4 v_F^4}\left(1 + \frac{4\pi^2\mu\theta a_H^2}{\hbar^2 v_F^2}\sum_{\kappa'=1}^{\infty}\kappa'\,\mathrm{sh}^{-1}\left(\frac{2\pi^2\mu\theta\kappa' a_H^2}{\hbar^2 v_F^2}\right)\right.$$
$$\left.\times\cos\left[\frac{\pi\kappa' a_H^2}{\hbar^2 v_F^2}\left(\mu^2-\Delta^2\right)\right]\right)$$
$$\times\left(1+2\sum_{\kappa=1}^{\infty}R_D(\kappa, a_H, \alpha)\cos\left[\frac{\pi\kappa a_H^2}{\hbar^2 v_F^2}\left(\mu^2-\Delta^2\right)\right]\right), \tag{51}$$

где $R_D(\kappa, a_H, \alpha)$ — так называемый множитель Дингля, равный

$$R_D(\kappa, a_H, \alpha) = \exp\left(-\frac{2\pi\mu\alpha\kappa a_H^2}{\hbar^2 v_F^2}\right). \tag{52}$$

Если выполняется условие

$$\alpha > \frac{\hbar^2 v_F^2}{2\pi\mu a_H^2}, \tag{53}$$

то $R_D \ll 1$ и формулу (51) можно приближенно переписать

$$\sigma_{xx} = \frac{A\mu^2 a_H}{\hbar^4 v_F^4}\left(1 + \frac{4\pi^2\mu\theta a_H^2}{\hbar^2 v_F^2}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\kappa\,\mathrm{sh}^{-1}\left(\frac{2\pi^2\mu\theta\kappa a_H^2}{\hbar^2 v_F^2}\right)\right.$$
$$\left.\times\cos\left[\frac{\pi\kappa a_H^2}{\hbar^2 v_F^2}\left(\mu^2-\Delta^2\right)\right]\right). \tag{54}$$

Если $\mu \sim 0.17$ eV и $\alpha \sim 10^{-3}$ eV, то условие (53) соответствует магнитным полям, для которых $H < 10$ T. Как видно из (54), в случае, если выполняется условие (53), проводимость не зависит от α. На рис. 2 показана зависимость проводимости графена от индукции магнитного поля, построенная по формлуе (54).

4. Заключение

В случае слабых магнитных полей, когда квантование не проявляется, магнитопроводимость σ_{xx} графена, как это видно из рис. 1 и формулы (24), уменьшается с ростом магнитного поля. Необходимо отметить, что формулы (22) и (23) перестают быть справедливыми для сильных магнитных полей, так как они получены на основе уравнений движения (7), которые, в свою очередь, решались итерациями по параметру v_F/c. Такой метод оправдан для малых H.

В сильных (квантующих) магнитных полях для графена, так же как и для вырожденных объемных полупроводников, имеют место осцилляции поперечной магнитопроводимости σ_{xx}, обусловленные немонотонной зависимостью плотности состояний от энергии и периодичные по обратному магнитному полю, причем период осцилляций составляет по порядку величины $8\,\mathrm{T}^{-1}$, что согласуется с результатами, полученными в [15,17,19]. Кроме того, период магнитных осцилляций не пропорционален μ, как в случае материалов с квадратичным законом дисперсии, а имеет более сложную зависимость от μ. Для щелевой модификации графена в случае $\mu \gg \theta$, как это видно из формулы (51), период осцилляций пропорционален разнице $\mu^2 - \Delta^2$. Таким образом, изменения величины Δ дают возможность управлять периодом осцилляций магнитопроводимости. Такой же результат получен и в [19]. Однако следует отметить, что если выполняется условие (53), то в выражение для проводимости не входит феноменологически введенная ширина уровней Ландау α. При этом осцилляции проводимости имеют место, если температура электронного газа удовлетворяет условию (26). Как показано выше, условия (26) и (53) выполняются для достаточно широкого интервала индукций магнитного поля. Условие (26) дает нижний предел порядка 0.01 T. Условие (53) соответствует верхнему пределу для индукции магнитного поля порядка 10 T. В [19] зависимость осцилляционной части проводимости от ширины уровней Ландау α в виде множителя Дингля остается при любых значениях индукции магнитного поля.

Список литературы

[1] K.S. Novoselov, A.K. Geim, S.V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S.V. Dubonos, I.V. Grigorieva, A.A. Firsov. Science **306**, 666 (2004).
[2] J. Milton Pereira Jr., P. Vosilopoulos, F.M. Peeters. Appl. Phys. Lett. **90**, 132 122 (2007).
[3] Z. Chen, Y.-M. Lin, M.J. Rooks, P. Avouris. Physica E **40**, 228 (2007).
[4] Y.Q. Wu, P.D. Ye, M.A. Capano, Y. Xuan, Y. Sui, M. Qi, J.A. Cooper, T. Shen, D. Pandey, G. Prakash, R. Reifenberger. Appl. Phys. Lett. **92**, 092 102 (2008).
[5] A.H. Castro Neto, F. Guinea, N.M.R. Peres, K.S. Novoselov, A.K. Geim. Rev. Mod. Phys. **81**, 109 (2009).
[6] S. Reich, J. Maultzsch, C. Thomsen, P. Ordejon. Phys. Rev. B **66**, 035 412 (2002).
[7] P.R. Wallace. Phys. Rev. **71**, 622 (1947).
[8] S.A. Mikhailov. Phys. Rev. B **79**, 241 309 (2009).
[9] Д.В. Завьялов, С.В. Крючков, Э.В. Марчук. ПЖТФ **34** (21), 21 (2008).
[10] Д.В. Завьялов, В.И. Конченков, С.В. Крючков. ФТТ **51**, 2033 (2009).
[11] Д.В. Завьялов, В.И. Конченков, С.В. Крючков. ФТТ **52**, 746 (2010).
[12] S.Y. Zhou, G.-H. Gweon, A.V. Fedorov, P.N. First, W.A. de Heer, D.-H. Lee, F. Guinea, A.H. Castro Neto, A. Lanzara. Nature Mater. **6**, 770 (2007).
[13] A. Mattausch, O. Pankratov. Phys. Rev. Lett. **99**, 076 802 (2007).
[14] E. McCann, V.I. Fal'ko. Phys. Rev. Lett. **96**, 086 805 (2006).
[15] M. Tahir, K. Sabeeh. Phys. Rev. B **77**, 195 421 (2008).
[16] X.-Z. Yan, C.S. Ting. New J. Phys. **11** (9), 093 026 (2009).
[17] T. Shen, Y.Q. Wu, M.A. Capano, L.P. Rokhinson, L.W. Engel, P.D. Ye. Appl. Phys. Lett. **93**, 122 102 (2008).
[18] J. Jobst, D. Waldmann, F. Speck, R. Hirner, D.K. Maude, T. Seyller, H.B. Weber. Phys. Rev. B **81**, 195 434 (2010).
[19] S.G. Sharapov, V.P. Gusynin. Phys. Rev. B **71**, 125 124 (2005).
[20] K.Y. Bliokh. Phys. Lett. A **344**, 127 (2005).
[21] V.P. Gusynin, S.G. Sharapov, J.P. Carbotte. J. Phys.: Cond. Matter **19**, 026 222 (2007).
[22] N.M.R. Peres, F. Guinea, A.H. Castro Neto. Phys. Rev. B **73**, 125 411 (2006).
[23] V.P. Gusynin, S.G. Sharapov. Phys. Rev. B **73**, 245 411 (2006).
[24] E. Adams, T. Holstein. J. Phys. Chem. Solids **10**, 254, (1959).
[25] E.H. Hwang, S. Das Sarma. Phys. Rev. B **75**, 205 418 (2007).
[26] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Физическая кинетика. Физматлит, М. (2001). 536 с.