06

Нелинейные акустические эффекты в поликристаллических твердых телах с дислокациями

© В.Е. Назаров

Институт прикладной физики РАН,
603950 Нижний Новгород, Россия
e-mail: v.e.nazarov@appl.sci-nnov.ru

Поступило в Редакцию 16 января 2020 г.
В окончательной редакции 2 июня 2020 г.
Принято к публикации 6 июня 2020 г.

В рамках модифицированной линейной части дислокационной теории поглощения Гранато–Люкке получено уравнение состояния для поликристаллических твердых тел с дислокационной диссипативной и реактивной акустической нелинейностью. Проведено теоретическое исследование нелинейных эффектов, связанных с влиянием статической нагрузки и мощной низкочастотной стоячей упругой волны в стержневом резонаторе на распространение слабой (пробной) волны, а также эффектов самовоздействия интенсивной бегущей волны и генерации ее третьей гармоники.

Ключевые слова: поликристаллы, дислокационная теория поглощения, диссипативная и реактивная нелинейности, упругие волны.

DOI: 10.21883/JTF.2020.12.50126.17-20

Введение

Акустические свойства поликристаллических твердых тел, в частности, металлов и горных пород, во многом определяются дислокациями — одномерными (или линейными — в геометрическом смысле) дефектами их кристаллической решетки. Дислокации — это линии, вдоль (и вблизи) которых нарушено правильное расположение атомных плоскостей кристалла. Дислокации образуются при кристаллизации, в процессе роста поликристалла и при его пластической деформации (наклепе) [1–6]. Для металлов плотность дислокаций изменяется при термической обработке (отжиге) и при наклепе, причем при отжиге плотность дислокаций падает, а при наклепе — растет [1–6].

Существуют два основных вида дислокаций: краевые и винтовые. Краевая дислокация — это граница неполной атомной плоскости (экстраплоскости) в кристаллической решетке кристалла. Винтовая дислокация такой экстраплоскости не содержит, при этом все атомы кристалла находятся на одной винтовой поверхности, закрученной вокруг дислокационной линии (оси дислокации). В реальных поликристаллах дислокации являются смешанными; они представляют собой сочетание основных видов дислокаций и содержат как краевую, так и винтовую составляющие. Имеют место два разных типа движения дислокаций: консервативное (или скольжение) и неконсервативное (или переползание) [1–6].

Консервативное движение происходит в плоскости скольжения дислокации под действием относительно малых сдвиговых напряжений. Скольжение представляет собой перераспределение (т. е. разрыв старых и образование новых) атомных связей вблизи линии дислокации. Консервативное движение дислокаций не связано с перемещением атомов вещества, оно практически не зависит от температуры. Скольжение могут совершать как краевые, так и винтовые дислокации [1–6].

Неконсервативное движение, наоборот, происходит в направлении, перпендикулярном плоскости скольжения дислокации, под действием относительно больших продольных напряжений. Неконсервативное движение связано с перемещением атомов вещества вблизи линии дислокации. В зависимости от знака напряжения (т. е. от растяжения или сжатия) атомы кристалла перемещаются к линии дислокации или от нее. Переползание дислокаций — это диффузионный, термически активируемый процесс, его скорость растет с ростом температуры. При небольших напряжениях, характерных для акустических волн, и не очень высокой температуре переползание дислокаций маловероятно. Переползание могут совершать только краевые дислокации [1–6].

Важным и отличительным свойством дислокаций является их высокая подвижность (под действием внешнего напряжения) и сильное упругое взаимодействие между собой и точечными дефектами решетки (вакансиями, межузельными и примесными атомами), что существенно влияет на механические и акустические (упругие и неупругие, линейные и нелинейные) свойства поликристаллов. Поле упругих напряжений для дислокаций уменьшается как s^{-1}, а для точечных дефектов — как s^{-3}, где s — расстояние от ядра дислокации или от точечного дефекта до точки наблюдения. Вынужденные под действием слабых высокочастотных (ВЧ) напряжений колебания дислокаций являются причиной линейного резонансного внутреннего трения — амплитудно-независимых поглощения и дисперсии ВЧ акустических волн в поликристаллах [7–14]. При относительно сильных низкочастотных (НЧ) напряжениях колебания дислокаций и их взаимодействие с примесными атомами приводит к гистерезисной нелинейности поликристаллов и к проявлению в таких средах эффектов амплитудно-зависимого внутреннего трения (АЗВТ) [7–14], генерации высших гармоник и других нелинейных акустических эффектов (НАЭ).

В разных поликристаллических твердых телах НАЭ проявляются по-разному, что свидетельствует о различной нелинейной динамике дислокаций, зависящей от большого числа структурных характеристик поликристалла (типа решетки, функции распределения, плотности и вида дислокаций, концентрации вакансий, межузельных и примесных атомов, размеров зерна и т. д.). Нелинейные акустические (упругие и неупругие) свойства поликристаллов более чувствительны к их дислокационной структуре, чем линейные, поэтому исследования нелинейных волновых процессов в таких средах способствуют изучению динамики дислокаций и созданию моделей их движения под действием динамических напряжений, что необходимо для развития теории прочности и пластичности — одного из актуальных направлений физики твердого тела [1–14].

Для объяснения явления внутреннего трения поликристаллических металлов Гранато и Люкке на основе струнной модели дислокации Келера [15] создали дислокационную теорию поглощения [7–14]. В этой теории полагается, что под действием переменного напряжения упругой волны дислокации, жестко закрепленные в узлах сетки — в точках пересечения дислокаций — совершают вынужденные колебания консервативного типа. Дислокационная теория Гранато–Люкке состоит из двух частей — ВЧ линейной и НЧ гистерезисной (нелинейной), и определяет соответственно линейные (амплитудно-независимые) и нелинейные (амплитудно-зависимые) потери и дефект модуля упругости. Линейные потери и дефект модуля упругости имеют место при малых динамических напряжениях, недостаточных для отрыва сегментов дислокаций от примесных атомов; они связаны с торможением движущихся дислокаций в вязкой среде, зависят от частоты и проявляются на высоких частотах — в области резонансных частот дислокаций (в диапазоне десятков и сотен мегагерц). Нелинейные потери и дефект модуля упругости наблюдаются при относительно больших напряжениях на относительно низких частотах. Они связаны с отрывом сегментов дислокаций от примесных атомов и с различным их поведением на стадиях нагрузки и разгрузки; это определяет гистерезисный характер уравнения состояния поликристалла. В теории Гранато–Люкке гистерезисная нелинейность безынерционна, и эффекты АЗВТ от частоты волны не зависят. В действительности же с ростом частоты деформирования гистерезисная нелинейность поликристаллов уменьшается [16].

Теория Гранато–Люкке вполне удовлетворительно описывает эффекты линейного внутреннего трения и качественно объясняет результаты измерений амплитудно-зависимых декремента затухания и дефекта модуля упругости во многих достаточно чистых металлах (в НЧ диапазоне). Для металлов же с высокой концентрацией примесей результаты измерений часто не соответствуют теории, при этом могут наблюдаться различные амплитудные зависимости гистерезисных эффектов для, казалось бы, одного и того же металла [17–19], что связано с большой чувствительностью АЗВТ к малому изменению концентрации примесей и плотности дислокаций. Кроме того, в некоторых поликристаллических металлах и горных породах (отожженная медь, цинк, свинец, гранит, мрамор, песчаник, известняк, магнезит, кварцит и т. д.) наблюдаются также и другие чрезвычайно сильные нелинейные эффекты, в частности, затухание и фазовая задержка несущей слабой ВЧ волны под действием сильной НЧ волны накачки, не описываемые теорией Гранато–Люкке и обусловленные не НЧ гистерезисной, а ВЧ диссипативной (неупругой) и реактивной (упругой) нелинейностью [20–30]. Изучение НАЭ в поликристаллических твердых телах можно использовать для развития дислокационной теории поглощения и уточнения (или модификации) уравнения движения дислокации — основного дефекта поликристалла, ответственного за его физические свойства: упругость, вязкость, пластичность, прочность, акустическую нелинейность и т. д.

В настоящей работе проводится теоретическое исследование эффектов влияния статической нагрузки и мощной НЧ стоячей упругой волны на распространение слабой (пробной) ВЧ волны в поликристаллах, обладающих дислокационной диссипативной и реактивной акустической нелинейностью, а также эффектов самовоздействия интенсивной бегущей волны и генерации ее третьей гармоники. Описание этих эффектов проводится в рамках нелинейно-модифицированной линейной ВЧ части дислокационной теории Гранато–Люкке. При получении уравнения состояния поликристалла с дислокациями мы не будем учитывать линейную диссипацию однородного твердого тела (не содержащего дислокаций) и его слабую решеточную упругую нелинейность, описываемую пятиконстантной теорией упругости [31].

1. Основные уравнения для поликристаллических твердых тел с диссипативной и реактивной дислокационной нелинейностью

Для описания нелинейных акустических эффектов, в частности, затухания и фазовой задержки несущей слабой ВЧ волны под действием сильной НЧ волны накачки, не связанных с НЧ гистерезисной нелинейностью, модифицируем ВЧ линейную часть дислокационной теории Гранато–Люкке [7–10] и получим нелинейное уравнение состояния поликристалла. Для этого смещение $\xi = \xi(y,t)$ сегмента дислокации длины l под действием переменного сдвигового напряжения $\tau = \tau(t)$

будем также описывать уравнением колебаний струны, но содержащим малые нелинейные диссипативное (неупругое) и реактивное (упругое) слагаемые, учитывающие нелинейные трение и натяжение дислокации:

$$A\xi_{tt} + B\left[1 + \mu\left(|\xi/b|^{m-q}|\xi_t/C_\perp|^q\right)\right]\xi_t - C\left[1 - \eta\left(|\xi/b|^{n-r}|\xi_t/C_\perp|^r\right)\right]\xi_{yy} = b\tau(t), \quad (1)$$

где $A = \pi\rho b^2$ — масса единицы длины дислокации; B — коэффициент линейного трения ($B > 0$); $C = 2Gb^2/\pi(1-\nu)$ — коэффициент линейного натяжения; G, υ, ρ и $C_\perp = (G/\rho)^{1/2}$ — модуль сдвига, коэффициент Пуассона, плотность и скорость сдвиговой волны; b — модуль вектора Бюргерса; y — координата вдоль линии дислокации; $\xi(0,t) = \xi(l,t) = 0$; μ, η и m, q, n, r — безразмерные параметры и показатели степени диссипативной и реактивной нелинейности; $m \geq q \geq 0$, $n \geq r \geq 0$; $\mu|\xi/b|^{m-q}|\xi_t/C_\perp|^q \ll 1$, $\eta|\xi/b|^{n-r}|\xi_t/C_\perp|^r \ll 1$.

Функционально структуры введенных в уравнение (1) диссипативного $B\mu|\xi/b|^{m-q}|\xi_t/C_\perp|^q\xi_t \propto \xi_t$ и реактивного $C\eta|\xi/b|^{n-r}|\xi_t/C_\perp|^r\xi_{yy} \propto \xi_{yy}$ нелинейных слагаемых задаются в соответствии с экспериментально наблюдаемыми степенными зависимостями нелинейных коэффициента затухания и фазовой задержки несущей слабой ВЧ волны под действием мощной НЧ волны накачки от ее амплитуды и частоты, при этом параметры нелинейности μ, η и показатели степени m, q, n, r для каждого поликристаллического твердого тела определяются из сравнения аналитических зависимостей НАЭ с результатами эксперимента. Наличие таких слагаемых в уравнении движения дислокации приведет соответственно к диссипативной и реактивной нелинейности уравнения состояния поликристалла, причем последние не будет давать вклада в эффекты АЗВТ, обусловленные НЧ гистерезисной нелинейностью.

Для многих поликристаллических твердых тел (цинк, свинец, гранит, магнезит, мрамор, песчаник, известняк) нелинейные эффекты затухания и фазовой задержки несущей слабой продольной ВЧ волны под действием мощной НЧ продольной волны накачки не зависят от ее частоты, так что для них $q = 0$, $r = 0$, однако в общем случае $q \neq 0$, $r \neq 0$. Довольно разнообразно ведут себя показатели степени m диссипативной нелинейности: для отожженной меди (в зависимости от температуры отжига) $m = 1, 3/2, 2$ [20–23], для неотожженного цинка $m = 3/2$, а для отожженного — $m = 2$ [24], для свинца $m = 1$ [25], для мрамора $m = 2$ [26], для гранита [27] и магнезита $m = 1$ [27], для кварцита $m = 5/4$ [28]. Аналогично ведут себя показатели степени n реактивной нелинейности: для гранита $n = 1$ [29], для мрамора $n = 3/2$ [30], для магнезита $n = 1$ [28], для кварцита $n = 3/2, 1/2$ [28]. Таким образом, для одного и того же поликристалла, как правило, $m \neq n$ и $q \neq r$. Из различий амплитудно-частотных зависимостей эффектов затухания и фазовой задержки несущей слабой ВЧ волны под действием мощной НЧ волны накачки следует, что механизмы диссипативной и реактивной нелинейностей поликристаллических твердых тел различны. Здесь диссипативная и реактивная нелинейности поликристалла связаны с вынужденным (под действием интенсивной упругой волны) колебательным консервативным движением (скольжением) дислокаций. С одной стороны, такое движение сопровождаются периодическими разрывами „старых“ и образованием „новых“ атомных связей (вблизи линии дислокации), на что затрачивается энергия упругой волны. С другой стороны, вынужденные колебания дислокаций сопровождаются периодическими изменениями их эффективного натяжения. Эти процессы приводят соответственно к диссипативной и к реактивной дислокационной нелинейности поликристалла.

Для получения уравнения состояния поликристалла определим его сдвиговую деформацию γ под действием сдвигового напряжения τ [7–9]:

$$\gamma(\tau) = (\tau/G) + \gamma_{dis}(\tau), \quad (2)$$

где

$$\gamma_{dis}(\tau) = b\int_0^\infty\int_0^l \xi(y,t)N(l)\,dy\,dl$$

— сдвиговая дислокационная деформация, связанная со смещением $\xi(y,t)$ сегментов дислокаций, $N = N(l)$ — функция распределения сегментов дислокаций по длинам l, $\int_0^\infty lN(l)dl = \Lambda$ — плотность дислокаций.

Решение уравнения (1) будем искать методом возмущений, полагая при этом, что вынужденные колебания сегмента дислокации на основной моде являются доминирующими:

$$\xi(y,t) \cong \left[\xi_0(t) + \xi_1(t)\right]\sin\frac{\pi y}{l}, \quad |\xi_1(t)| \ll |\xi_0(t)|. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1), получаем уравнения для $\xi_0(t)$ и $\xi_1(t)$:

$$\ddot{\xi}_0 + d_0\dot{\xi}_0 + \Omega^2\xi_0 = (4b/\pi A)\tau, \quad (4)$$

$$\ddot{\xi}_1 + d_0\dot{\xi}_1 + \Omega^2\xi_1 = -\delta d_0|\xi_0|^{m-q}|\dot{\xi}_0|^q\dot{\xi}_0 + g\Omega^2|\xi_0|^{n-r}|\dot{\xi}_0|^r\xi_0, \quad (5)$$

где

$$\delta = \frac{2\mu}{\pi^{1/2}b^{m-q}C_\perp^q}\,\frac{\Gamma[(m+3)/2]}{\Gamma[(m+4)/2]},$$

$$g = \frac{2\eta}{\pi^{1/2}b^{n-r}C_\perp^r}\,\frac{\Gamma[(n+3)/2]}{\Gamma[(n+4)/2]},$$

$$\Omega = (\pi/l)(C/A)^{1/2} = [2/(1-\nu)]^{1/2}(C_\perp/l)$$

— резонансная частота основной моды колебания сегмента дислокации длины l, $d_0 = B/A$ — параметр демпфирования, $\Gamma(m)$ — гамма-функция. (Для меди резонансная частота Ω сегмента дислокации длиной $l = 10^{-5}$ m является достаточно высокой и составляет $3.9 \cdot 10^8$ rad/s [6,7].)

Решения уравнений (4), (5) имеют вид [32]:

$$\xi_0(t)=\frac{8b}{\pi\lambda A}\int\limits_{-\infty}^{t}\tau(t_1)\exp\left(\frac{d_0}{2}(t_1-t)\right)\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)dt_1,$$

$$\dot{\xi}_0(t)=-\frac{4b}{\pi\lambda A}\int\limits_{-\infty}^{t}\tau(t_1)\exp\left(\frac{d_0}{2}(t_1-t)\right)$$
$$\times\left[d_0\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)-\lambda\cos\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)\right]dt_1, \quad (6)$$

где $D_\tau(t)=|\xi_0(t)|^{m-q}|\dot{\xi}_0(t)|^q$, $G_\tau(t)=|\xi_0(t)|^{n-r}|\dot{\xi}_0(t)|^r$, $\lambda^2=4\Omega^2-d_0^2$.

Подставляя (3), (6) в уравнение (2) получаем зависимость $\gamma=\gamma(\tau)$ для сдвиговых напряжений τ и деформаций γ поликристалла:

$$\gamma(\tau)=\frac{\tau}{G}+\frac{16}{\pi^3\rho}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^{t}\tau(t_1)\exp\left(\frac{d_0}{2}(t_1-t)\right)$$
$$\times\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)dt_1\frac{lN(l)dl}{\lambda}+\frac{16}{\pi^3\rho}$$
$$\times\left[\delta d_0\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{-\infty}^{t_1}D_\tau(t_1)\tau(t_2)\exp\left(\frac{d_0}{2}(t_2-t)\right)\right.$$
$$\times\left\{d_0\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t_1-t_2)\right)-\lambda\cos\left(\frac{\lambda}{2}(t_1-t_2)\right)\right\}$$
$$\times\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)dt_1dt_2\frac{lN(l)dl}{\lambda^2}$$
$$+2g\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{-\infty}^{t_1}G_\tau(t_1)\tau(t_2)\exp\left(\frac{d_0}{2}(t_2-t)\right)$$
$$\left.\times\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t_1-t_2)\right)\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)dt_1dt_2\frac{\Omega^2lN(l)dl}{\lambda^2}\right], \quad (7)$$

где

$$\begin{pmatrix}D_\tau(t)\\G_\tau(t)\end{pmatrix}=\left(\frac{4}{\pi^2b\rho}\right)^{\binom{m}{n}}\left|\frac{2}{\lambda}\int\limits_{-\infty}^{t}\tau(t_1)\exp\left(\frac{d_0}{2}(t_1-t)\right)\right.$$
$$\left.\times\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)dt_1\right|^{\binom{m-q}{n-r}}\left|\frac{1}{\lambda}\int\limits_{-\infty}^{t}\tau(t_1)\right.$$
$$\times\exp\left(\frac{d_0}{2}(t_1-t)\right)\left[d_0\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)\right.$$
$$\left.\left.-\lambda\cos\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)\right]dt_1\right|^{\binom{q}{r}}.$$

Переходя в (7) от сдвиговых напряжений τ и деформаций γ_{dis} к продольным напряжениям $\sigma=\tau/R$ и деформациям $\varepsilon_{dis}=R\gamma_{dis}$ [1,7,8], получим аналогичную а зависимость $\varepsilon=\varepsilon(\sigma)$ для продольных напряжений σ и деформаций ε для стержня (вдоль его оси x):

$$\varepsilon(\sigma)=\frac{\sigma}{E}+\frac{16R^2}{\pi^3\rho}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^{t}\sigma(t_1)\exp\left(\frac{d_0}{2}(t_1-t)\right)$$
$$\times\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)dt_1\frac{lN(l)dl}{\lambda}+\frac{16R^2}{\pi^3\rho}$$
$$\times\left[\delta d_0\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{-\infty}^{t_1}D_\sigma(t_1)\sigma(t_2)\exp\left(\frac{d_0}{2}(t_2-t)\right)\right.$$
$$\times\left\{d_0\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t_1-t_2)\right)-\lambda\cos\left(\frac{\lambda}{2}(t_1-t_2)\right)\right\}$$
$$\times\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)dt_1dt_2\frac{lN(l)dl}{\lambda^2}$$
$$+2g\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{-\infty}^{t_1}G_\sigma(t_1)\sigma(t_2)\exp\left(\frac{d_0}{2}(t_2-t)\right)$$
$$\left.\times\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t_1-t_2)\right)\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)dt_1dt_2\frac{\Omega^2lN(l)dl}{\lambda^2}\right], \quad (8)$$

где

$$\begin{pmatrix}D_\sigma(t)\\G_\sigma(t)\end{pmatrix}=\left(\frac{4R}{\pi^2b\rho}\right)^{\binom{m}{n}}\left|\frac{2}{\lambda}\int\limits_{-\infty}^{t}\sigma(t_1)\exp\left(\frac{d_0}{2}(t_1-t)\right)\right.$$
$$\left.\times\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)dt_1\right|^{\binom{m-q}{n-r}}\left|\frac{1}{\lambda}\int\limits_{-\infty}^{t}\sigma(t_1)\right.$$
$$\times\exp\left(\frac{d_0}{2}(t_1-t)\right)\left[d_0\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)\right.$$
$$\left.\left.-\lambda\cos\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)\right]dt_1\right|^{\binom{q}{r}},$$

$E=2G(1+\nu)$ — модуль Юнга, $R=R(\theta,\varphi)=\sin\theta\cos\theta\times\cos\varphi$ множитель, учитывающий ориентацию направления распространения продольной волны по отношению к плоскостям и направлениям скольжения дислокации в поликристалле, θ — угол между осью стержня и нормалью к плоскости скольжения дислокации, φ — угол между направлением скольжения дислокации и проекцией оси стержня на плоскость скольжения, $0\le\theta\le\pi/2$, $|\varphi|\le\pi/2$ [1]. (Для изотропных поликристаллов $\langle R(\theta,\varphi)\rangle = \frac{4}{3\pi^2} \approx 1.35\cdot 10^{-1}$, $\langle R^2(\theta,\varphi)\rangle = \frac{4}{15\pi} \approx 8.5\cdot 10^{-2}$).

При малой плотности дислокаций, когда выполняется условие

$$\frac{16R^2C_0^2}{\pi^3}\left|\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^t \varepsilon(t_1)\exp\left(\frac{d_0}{2}(t_1-t)\right)\right.$$

$$\left.\times\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)dt_1\,\frac{lN(l)dl}{\lambda}\right| \ll |\varepsilon| \ll 1,$$

из (8) получаем уравнение состояния $\sigma=\sigma(\varepsilon)$ для стержня в „каноническом" виде

$$\sigma(\varepsilon) = E\left[\varepsilon - \frac{16R^2C_0^2}{\pi^3}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^t \varepsilon(t_1)\exp\left(\frac{d_0}{2}(t_1-t)\right)\right.$$

$$\left.\times\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)dt_1\,\frac{lN(l)dl}{\lambda}\right] - E\,\frac{16R^2C_0^2}{\pi^3}$$

$$\times\left[\delta d_0\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^t\int\limits_{-\infty}^{t_1} D_\varepsilon(t_1)\varepsilon(t_2)\exp\left(\frac{d_0}{2}(t_2-t)\right)\right.$$

$$\times\left\{d_0\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t_1-t_2)\right) - \lambda\cos\left(\frac{\lambda}{2}(t_1-t_2)\right)\right\}$$

$$\times\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)dt_1dt_2\,\frac{lN(l)dl}{\lambda^2}$$

$$+2g\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^t\int\limits_{-\infty}^{t_1} G_\varepsilon(t_1)\varepsilon(t_2)\exp\left(\frac{d_0}{2}(t_2-t)\right)$$

$$\left.\times\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t_1-t_2)\right)\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)dt_1dt_2\,\frac{\Omega^2 lN(l)dl}{\lambda^2}\right], \tag{9}$$

где $C_0=(E/\rho)^{1/2}$,

$$\begin{pmatrix}D_\varepsilon(t)\\ G_\varepsilon(t)\end{pmatrix} = \left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2 b}\right)^{\binom{m}{n}}\left|\frac{2}{\lambda}\int\limits_{-\infty}^t \varepsilon(t_1)\exp\left(\frac{d_0}{2}(t_1-t)\right)\right.$$

$$\left.\times\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)dt_1\right|^{\binom{m-q}{n-r}}\left|\frac{1}{\lambda}\int\limits_{-\infty}^t \varepsilon(t_1)\right.$$

$$\times\exp\left(\frac{d_0}{2}(t_1-t)\right)\left[d_0\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)\right.$$

$$\left.\left.-\lambda\cos\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)\right]dt_1\right|^{\binom{q}{r}}. \tag{10}$$

Заметим, что в отличие от традиционно используемых выражений для линейных декремента затухания и дефекта модуля упругости [7–12], нелинейное уравнение состояния (9) поликристалла наиболее полно определяет его акустические свойства, поскольку именно уравнение состояния позволяет в полной мере исследовать нелинейные волновые процессы в поликристалле с дислокациями и определить не только линейные, но и нелинейные выражения для декремента затухания и дефекта модуля упругости, а также и любые другие характеристики нелинейного взаимодействия упругих волн.

В НЧ приближении, когда $\omega \ll \Omega$, $\omega d_0 \ll \Omega^2$ (ω — частота волны), уравнение состояния (6) имеет простой вид, при этом, поскольку $(d_0/\Omega^2)|\dot\varepsilon| \ll |\varepsilon|$, диссипативная и реактивная нелинейности входят практически раздельно:

$$\sigma(\varepsilon) = E\left\{\left(1-\frac{8R^2C_0^2}{\pi^3}\int\limits_0^\infty\frac{lN(l)dl}{\Omega^2}\right)\varepsilon + \frac{8R^2C_0^2}{\pi^3}\right.$$

$$\left.\times\left(\int\limits_0^\infty\frac{lN(l)dl}{\Omega^2}\right)d_0\dot\varepsilon\right\} + E\,\frac{8R^2C_0^2}{\pi^3}\left[\left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2 b}\right)^m\right.$$

$$\times\delta d_0|\dot\varepsilon|^q\dot\varepsilon\int\limits_0^\infty\left|\varepsilon-\frac{d_0}{\Omega^2}\dot\varepsilon\right|^{m-q}\frac{lN(l)dl}{\Omega^{2(m+2)}} - \left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2 b}\right)^n$$

$$\left.\times g|\dot\varepsilon|^r\int\limits_0^\infty\left(\varepsilon-\frac{2d_0}{\Omega^2}\dot\varepsilon\right)\left|\varepsilon-\frac{d_0}{\Omega^2}\dot\varepsilon\right|^{n-r}\frac{lN(l)dl}{\Omega^{2(n+2)}}\right].$$

Из этого уравнения видно, что структура диссипативной и реактивной нелинейностей поликристалла повторяет структуру соответствующих нелинейных слагаемых в уравнении (1) движения дислокации. В НЧ диапазоне (при $\delta, g > 0$) при увеличении амплитуды волны коэффициент поглощения волны увеличивается, а ее фазовая скорость — уменьшается. В общем же случае каждая нелинейность (и диссипативная, и реактивная) приводит как к нелинейному поглощению волны, так и к нелинейному изменению ее фазовой скорости. Из анализа амплитудно-частотных зависимостей НАЭ и сравнения их с результатами соответствующих экспериментов можно определить параметры дислокационной нелинейности и эффективные характеристики дислокационной структуры поликристаллических твердых тел.

Подставляя уравнение состояния (9) в уравнение движения $\rho U_{tt} = \sigma_x(\varepsilon)$ [31], где $U=U(x,t)$ — продольное (вдоль оси x) смещение, $\varepsilon = \partial U(x,t)/\partial x$, получим нелинейное волновое уравнение для деформации $\varepsilon(x,t)$, определяющее волновые процессы в стержне с дислокационной диссипативной и реактивной нелинейностью:

$$\varepsilon_{tt}(x,t) - C_0^2\varepsilon_{xx}(x,t) = -\frac{16R^2C_0^4}{\pi^3}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^{t}\varepsilon_{xx}(x,t_1)$$

$$\times\exp\left(\frac{d_0}{2}(t_1-t)\right)\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)dt_1\frac{lN(l)dl}{\lambda}$$

$$-\frac{16R^2C_0^4}{\pi^3}\Bigg[\delta d_0\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{-\infty}^{t_1}D_\varepsilon(x,t_1)\varepsilon(x,t_2)$$

$$\times\exp\left(\frac{d_0}{2}(t_2-t)\right)\left\{d_0\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t_1-t_2)\right)\right.$$

$$\left.-\lambda\cos\left(\frac{\lambda}{2}(t_1-t_2)\right)\right\}\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)dt_1dt_2\frac{lN(l)dl}{\lambda^2}$$

$$+2g\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{-\infty}^{t_1}G_\varepsilon(x,t_1)\varepsilon(x,t_2)\exp\left(\frac{d_0}{2}(t_2-t)\right)$$

$$\times\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t_1-t_2)\right)\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)dt_1dt_2\frac{\Omega^2lN(l)dl}{\lambda^2}\Bigg]_{xx}. \quad (11)$$

В линейном приближении из уравнения (11) следуют дисперсионное соотношение $\kappa=\kappa(\omega)$, выражения для фазовой скорости $C(\omega)=\omega/\kappa(\omega)$ и коэффициента затухания $\alpha=\alpha(\omega)$ слабой гармонической волны $\varepsilon(x,t)\propto\exp\{j[\omega t-\kappa(\omega)x]-\alpha(\omega)x\}$, соответствующие результатам линейной части дислокационной теории поглощения Гранато−Люкке [7–9]:

$$\kappa(\omega)=\frac{\omega}{C_0}\left(1+\frac{4R^2C_0^2}{\pi^3}\int\limits_0^\infty\frac{(\Omega^2-\omega^2)lN(l)dl}{(\Omega^2-\omega^2)^2+d_0^2\omega^2}\right), \quad (12)$$

$$C(\omega)=\frac{C_0}{1+\frac{4R^2C_0^2}{\pi^3}\int\limits_0^\infty\frac{(\Omega^2-\omega^2)lN(l)dl}{(\Omega^2-\omega^2)^2+d_0^2\omega^2}}$$

$$\approx C_0\left(1-\frac{4R^2C_0^2}{\pi^3}\int\limits_0^\infty\frac{(\Omega^2-\omega^2)lN(l)dl}{(\Omega^2-\omega^2)^2+d_0^2\omega^2}\right),$$

$$\alpha(\omega)=\frac{4R^2C_0}{\pi^3}d_0\omega^2\int\limits_0^\infty\frac{lN(l)dl}{(\Omega^2-\omega^2)^2+d_0^2\omega^2},$$

где $\kappa(\omega)$ — волновое число для волны с частотой ω.

2. Влияние статического напряжения на затухание и фазовую задержку несущей упругой гармонической волны

Вначале рассмотрим эффекты, связанные с влиянием продольного (вдоль стержня) статического напряжения $\sigma_{xx}=\sigma_0=\text{const}$ (при котором еще не возникает пластической деформации поликристалла и размножения в нем дислокаций [1–6]) на затухание и фазовую задержку несущей слабой (пробной) продольной гармонической волны в стержне. Такие эффекты, линейные по амплитуде слабой волны, имеют место при $q=r=0$, при этом слабая волна распространяется линейно: скорость и затухание волны не зависят от ее амплитуды.

Подставляя в уравнение (11)$\varepsilon(x,t)=\varepsilon_0+\varepsilon_1(x,t)$, $\varepsilon_0=\sigma_0/E$ — продольная статическая упругая деформация, $\varepsilon_1(x,t)=a(x)\cos[\omega t-kx-\varphi(x)]$, $\varepsilon_1(x=0,t)=a_0\cos\omega t$, $k=\omega/C_0$, $|\varepsilon_1(x,t)|\ll|\varepsilon_0|$, $da(x)/dx\ll ka(x)$, $d\varphi(x)/dx\ll k\varphi(x)$, $\frac{a(x)}{|\varepsilon_0|}\ll\frac{1}{\sqrt{1+(\omega/d_0)^2}}$, и выделяя в нем слагаемые на частоте ω, получим уравнения для амплитуды $a(x)$ и фазы $\varphi(x)$ волны $\varepsilon_1(x,t)$:

$$\frac{1}{a(x)}\frac{da(x)}{dx}=-\frac{4R^2C_0}{\pi^3}Z(\omega)-\mu P_0|\varepsilon_0|^m d_0\omega^2$$

$$\times\int\limits_0^\infty\frac{[(\Omega^2-\omega^2)^2-d_0^2\omega^2]lN(l)dl}{\Omega^{2m}[(\Omega^2-\omega^2)^2+d_0^2\omega^2]^2}-2\eta Q_0|\varepsilon_0|^n d_0\omega^2$$

$$\times\int\limits_0^\infty\frac{(\Omega^2-\omega^2)lN(l)dl}{\Omega^{2(n-1)}[(\Omega^2-\omega^2)^2+d_0^2\omega^2]^2}, \quad (13)$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}=\frac{4R^2C_0}{\pi^3}W(\omega)-2\mu P_0|\varepsilon_0|^m d_0^2\omega^3$$

$$\times\int\limits_0^\infty\frac{(\Omega^2-\omega^2)lN(l)dl}{\Omega^{2m}[(\Omega^2-\omega^2)^2+d_0^2\omega^2]^2}+\eta Q_0|\varepsilon_0|^n\omega$$

$$\times\int\limits_0^\infty\frac{[(\Omega^2-\omega^2)^2-d_0^2\omega^2]lN(l)dl}{\Omega^{2(n-1)}[(\Omega^2-\omega^2)^2+d_0^2\omega^2]^2}. \quad (14)$$

где

$$Z(\omega)=d_0\omega^2\int\limits_0^\infty\frac{lN(l)dl}{(\Omega^2-\omega^2)^2+d_0^2\omega^2},$$

$$W(\omega)=\omega\int\limits_0^\infty\frac{(\Omega^2-\omega^2)lN(l)dl}{(\Omega^2-\omega^2)^2+d_0^2\omega^2},$$

$$P_0=\frac{8R^2C_0}{\pi^{7/2}}\left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2b^2}\right)^m\frac{\Gamma[(m+3)/2]}{\Gamma[(m+4)/2]},$$

$$Q_0=\frac{8R^2C_0}{\pi^{7/2}}\left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2b^2}\right)^n\frac{\Gamma[(n+3)/2](n+1)}{\Gamma[(m+4)/2]}.$$

Из уравнений (13), (14) находим выражения для коэффициента затухания $\xi(\varepsilon_0,\omega)=\ln[a(0,x=L)/a(\varepsilon_0,x=L)]$ и фазовой задержки несущей $\tau(\varepsilon_0,\omega)=[\varphi(\varepsilon_0,x=L)-\varphi(0,x=L)]/\omega$ слабой волны при $x=L$, обусловленные диссипативной и реактивной нелинейностью поликристалла:

$$\chi(\varepsilon_0, \omega) = \mu P_0 |\varepsilon_0|^m L d_0 \omega^2 \int\limits_0^\infty \frac{[(\Omega^2-\omega^2)^2 - d_0^2\omega^2] l N(l) dl}{\Omega^{2m}[(\Omega^2-\omega^2)^2 + d_0^2\omega^2]^2}$$

$$+ 2\eta Q_0 |\varepsilon_0|^n L d_0 \omega^2 \int\limits_0^\infty \frac{(\Omega^2-\omega^2) l N(l) dl}{\Omega^{2(n-1)}[(\Omega^2-\omega^2)^2 + d_0^2\omega^2]^2}, \quad (15)$$

$$\tau(\varepsilon_0, \omega) = -2\mu P_0 |\varepsilon_0|^m L d_0^2 \omega^2 \int\limits_0^\infty \frac{(\Omega^2-\omega^2) l N(l) dl}{\Omega^{2m}[(\Omega^2-\omega^2)^2 + d_0^2\omega^2]^2}$$

$$+ \eta Q_0 |\varepsilon_0|^n L \int\limits_0^\infty \frac{[(\Omega^2-\omega^2)^2 - d_0^2\omega^2] l N(l) dl}{\Omega^{2(n-1)}[(\Omega^2-\omega^2)^2 + d_0^2\omega^2]^2}. \quad (16)$$

Из уравнений (13)−(16) видно, что диссипативная и реактивная нелинейности приводят к изменениям амплитуды и фазы несущей пробной волны под действием статической нагрузки, при этом эффективные параметры нелинейности поликристалла зависят от частоты волны. Таким образом, по измеренным в эксперименте зависимостям $\chi(\varepsilon_0, \omega)$ и $\tau(\varepsilon_0, \omega)$ от ε_0 и ω можно определить параметры уравнения движения дислокации (μ, η, m, n, d_0) и функцию распределения $N = N(l)$ дислокаций.

Приведем оценки для параметров μ и η диссипативной и реактивной нелинейностей дислокации для изотропного поликристалла ($\langle R(\theta, \varphi)\rangle = \frac{4}{3\pi^2} \approx 1.35 \cdot 10^{-1}$, $\langle R^2(\theta, \varphi)\rangle = \frac{4}{15\pi} \approx 8.5 \cdot 10^{-2}$) при $m = n = 1$, $q = r = 0$, $b = 3 \cdot 10^{-8}$ cm, $N(l) = (\Lambda/l_0)\delta(l - l_0)$, $\Lambda = 10^{11}\,\mathrm{m}^{-2}$, $l_0 = 10^{-5}$ m, $C_\perp = 2.3 \cdot 10^3$ m/s, $C_0 = 3.7 \cdot 10^3$ m/s, $\Omega \approx 3.9 \cdot 10^8$ rad/s, $\nu = 0.3$, $d_0 = 10^8$ rad/s, $\varepsilon_0 = 10^{-5}$, $x = L = 0.3$ m, $T = L/C_0 \approx 8 \cdot 10^{-5}$ s, $\chi(\varepsilon_0, \omega) = 1$, $\tau(\varepsilon_0, \omega)/T = 10^{-2}$. Полагая, что при распространении в таком поликристалле пробной волны с частотой $\omega = 2\pi f \ll \Omega$, $f = 500$ kHz ее нелинейное затухание возникает только за счет диссипативной нелинейности ($\eta = 0$), а фазовая задержка несущей — только за счет реактивной нелинейности ($\mu = 0$), получим: $\mu \approx 2 \cdot 10^{-1}$ и $\eta \approx 3.7 \cdot 10^{-4}$.

3. Затухание и фазовая задержка несущей слабой высокочастотной волны под действием сильной низкочастотной волны в резонаторе

Исследуем нелинейные эффекты, связанные с влиянием сильной резонансной стоячей НЧ волны накачки на затухание и скорость распространение слабого ВЧ импульса в стержне, когда для НЧ волны накачки стержень является резонатором, а для ВЧ импульса — безграничной средой. (Эффекты такого влияния наблюдались в стержнях из многих поликристаллических металлов и горных пород [20–30]. При возбуждении сильной резонансной НЧ волны накачки в резонаторе на частоте $F \approx 3$ kHz с амплитудой деформации $\varepsilon_m \approx 10^{-5}$ амплитуда ВЧ импульса с несущей частотой $f = \omega/2\pi \approx 300$ kHz уменьшалась в несколько раз, а относительная фазовая задержка его несущей достигала 1%.) Для резонатора с жесткой ($x = 0$) и мягкой ($x = L$) границами выражение для деформации НЧ волны накачки (в резонансе) имеет вид: $\varepsilon_1(x, t) = \varepsilon_m \cos K_p x \cos(\Omega_p t + \theta)$, где $K_p L = \pi(2p - 1)/2$, L — длина стержня, $\Omega_p = C_0 K_p$, p — номер продольной моды резонатора, $\theta = \mathrm{const}$.

Решение волнового уравнения (11) будем искать в виде $\varepsilon(x, t) = \varepsilon_1(x, t) + \varepsilon_2(x, t)$, $\varepsilon_2(x, t) = a(x)\cos[\omega t - kx - \varphi(x)]$, $\varepsilon_m \gg a(x)$, $\varepsilon_2(x = 0, t) = a_0 \cos\omega t$, $\Omega_p \varepsilon_m \gg \omega a(x)$, $\omega \gg \Omega_p$, $k = \omega/C_0 \gg K_p$, $da(x)/dx \ll ka(x)$, $d\varphi(x)/dx \ll k\varphi(x)$. Здесь, однако, выражения для интегралов $I_{1,2}[\varepsilon(x, t_1)]$ в степенных модульных (вообще говоря, неаналитических) множителях $D_\varepsilon(xt_1)$ и $G_\varepsilon(x, t_1)$ в уравнении необходимо преобразовать к „мультипликативному“ (квазигармоническому) виду [33]:

$$I_1[\varepsilon(x, t_1)] = \frac{2}{\lambda} \int\limits_{-\infty}^{t_1} \varepsilon(t_2) \exp\left(\frac{d_0}{2}(t_2 - t_1)\right) \sin\left(\frac{\lambda}{2}(t_1 - t_2)\right)$$

$$\times dt_2 = \frac{\varepsilon_m \cos K_p x \cos(\Omega_p t_1 + \theta - \Psi_1)}{[(\Omega^2 - \Omega_p^2)^2 + d_0^2\Omega_p^2]^{1/2}}$$

$$+ \frac{a(x)\cos[\omega t_1 - kx - \varphi(x) - \Psi_2]}{[(\Omega^2 - \omega^2)^2 + d_0^2\omega^2]^{1/2}}$$

$$= \in_m(x, t_1)\cos[\Omega_p t_1 + \theta - \Psi_1 + \Phi_1(x, t_1)], \quad (17)$$

$$I_2[\varepsilon(x, t_1)] = \frac{1}{\lambda} \int\limits_{-\infty}^{t_1} \varepsilon(t_2) \exp\left(\frac{d_0}{2}(t_2 - t_1)\right)$$

$$\times \left[d_0 \sin\left(\frac{\lambda}{2}(t_1 - t_2)\right) - \lambda \cos\left(\frac{\lambda}{2}(t_1 - t_2)\right)\right] dt_2$$

$$= -\frac{\varepsilon_m \Omega_p \cos K_p x \sin(\Omega_p t_1 + \theta - \Psi_1)}{[(\Omega^2 - \Omega_p^2)^2 + d_0^2\Omega_p^2]^{1/2}}$$

$$- \frac{a(x)\omega \sin[\omega t_1 - kx - \varphi(x) - \Psi_2]}{[(\Omega^2 - \omega^2)^2 + d_0^2\omega^2]^{1/2}}$$

$$= -S_m(x, t_1)\sin[\Omega_p t_1 + \theta - \Psi_1 + \Phi_2(x, t_1)], \quad (18)$$

где

$$\in_m(x, t_1) \approx \frac{\varepsilon_m |\cos K_p x|}{[(\Omega^2 - \Omega_p^2)^2 + d_0^2\Omega_p^2]^{1/2}}$$

$$\times \left(1 + \frac{a(x)\cos[\Delta\Psi(x, t_1)]}{\varepsilon_m \cos K_p x} \sqrt{\frac{(\Omega^2 - \Omega_p^2)^2 + d_0^2\Omega_p^2}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + d_0^2\omega^2}}\right),$$

$$\Delta\Psi(x, t_1) = [\omega t_1 - kx - \varphi(x) - \Psi_2] - [\Omega_p t_1 + \theta - \Psi_1],$$

$$\Psi_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{d_0\Omega_p}{\Omega^2 - \Omega_p^2}\right), \quad \Psi_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{d_0\omega}{\Omega^2 - \omega^2}\right),$$

$$\Phi_1(x,t_1) \approx \frac{a(x)\sin[\Delta\Psi(x,t_1)]}{\varepsilon_m \cos K_p x}\sqrt{\frac{(\Omega^2-\Omega_p^2)^2 + d_0^2\Omega_p^2}{(\Omega^2-\omega^2)^2 + d_0^2\omega^2}} \ll 1,$$

$$S_m(x,t_1) \approx \frac{\varepsilon_m\Omega_p|\cos K_p x|}{[(\Omega^2-\Omega_p^2)^2 + d_0^2\Omega_p^2]^{1/2}}$$

$$\times\left(1 + \frac{a(x)\omega\cos[\Delta\Psi(x,t_1)]}{\varepsilon_m\Omega_p\cos K_p x}\sqrt{\frac{(\Omega^2-\Omega_p^2)^2 + d_0^2\Omega_p^2}{(\Omega^2-\omega^2)^2 + d_0^2\omega^2}}\right),$$

$$\Phi_2(x,t_1) \approx \frac{a(x)\omega\sin[\Delta\Psi(x,t_1)]}{\varepsilon_m\Omega_p\cos K_p x}\sqrt{\frac{(\Omega^2-\Omega_p^2)^2 + d_0^2\Omega_p^2}{(\Omega^2-\omega^2)^2 + d_0^2\omega^2}} \ll 1,$$

$$\frac{a(x)\omega}{\varepsilon_m\Omega_p|\cos K_p x|}\sqrt{\frac{(\Omega^2-\Omega_p^2)^2 + d_0^2\Omega_p^2}{(\Omega^2-\omega^2)^2 + d_0^2\omega^2}} \ll 1,$$

$$|\Phi_2(x,t_1) - \Phi_1(x,t_1)| \ll 1.$$

Подставляя выражения (17), (18) в уравнение (11) и выделяя в нем слагаемые на частоте ω, получим уравнения для амплитуды $a(x)$ и фазы $\varphi(x)$ слабой ВЧ волны:

$$\frac{1}{a(x)}\frac{da(x)}{dx} = -\frac{4R^2C_0}{\pi^3}d_0\omega^2\int_0^\infty \frac{lN(l)dl}{[(\Omega^2-\omega^2)^2 + d_0^2\omega^2]}$$

$$-\mu P\varepsilon_m^m|\cos K_p x|^m\Omega_p^q d_0\omega^2$$

$$\times\int_0^\infty \frac{[(\Omega^2-\omega^2)^2 - d_0^2\omega^2]lN(l)dl}{[(\Omega^2-\Omega_p^2)^2 + d_0^2\Omega_p^2]^{m/2}[(\Omega^2-\omega^2)^2 + d_0^2\omega^2]^2}$$

$$-2\eta Q\varepsilon_m^n|\cos K_p x|^n\Omega_p^r d_0\omega^2$$

$$\times\int_0^\infty \frac{(\Omega^2-\omega^2)\Omega^2 lN(l)dl}{[(\Omega^2-\Omega_p^2)^2 + d_0^2\Omega_p^2]^{n/2}[(\Omega^2-\omega^2)^2 + d_0^2\omega^2]^2}, \tag{19}$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{4R^2C_0}{\pi^3}\omega\int_0^\infty \frac{(\Omega^2-\omega^2)lN(l)dl}{[(\Omega^2-\omega^2)^2 + d_0^2\omega^2]}$$

$$-2\mu P\varepsilon_m^m|\cos K_p x|^m\Omega_p^q d_0^2\omega^3$$

$$\times\int_0^\infty \frac{(\Omega^2-\omega^2)lN(l)dl}{[(\Omega^2-\Omega_p^2)^2 + d_0^2\Omega_p^2]^{m/2}[(\Omega^2-\omega^2)^2 + d_0^2\omega^2]^2}$$

$$+\eta Q\varepsilon_m^n|\cos K_p x|^n\Omega_p^r\omega$$

$$\times\int_0^\infty \frac{[(\Omega^2-\omega^2)^2 - d_0^2\omega^2]\Omega^2 lN(l)dl}{[(\Omega^2-\Omega_p^2)^2 + d_0^2\Omega_p^2]^{n/2}[(\Omega^2-\omega^2)^2 + d_0^2\omega^2]^2}, \tag{20}$$

где

$$P = \frac{8R^2C_0}{\pi^{9/2}}\frac{(1+q)\Gamma[(m+3)/2]}{\Gamma[(m+4)/2]}B\left[\frac{m-q+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right]$$

$$\times\left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2b^2}\right)^m\left(\frac{b}{C_\perp}\right)^q,$$

$$Q = \frac{8R^2C_0}{\pi^{9/2}}\frac{(1+n-r)\Gamma[(n+3)/2]}{\Gamma[(n+4)/2]}B\left[\frac{n-r+1}{2}, \frac{r+1}{2}\right]$$

$$\times\left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2b^2}\right)^n\left(\frac{b}{C_\perp}\right)^r,$$

$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+b)}$ — бета-функция, а функция $N = N(l)$ определяет распределение дислокаций по длинам l после отрыва их сегментов от примесных атомов (под действием мощной НЧ волны накачки), т.е. функция $N = N(l)$ определятся не примесными атомами, а дислокационной сеткой.

Из уравнений (19), (20) находим выражения для нелинейных коэффициента затухания $\chi(\varepsilon_m, \Omega_p, \omega) = \ln[a(\varepsilon_m = 0, x = L)/a(\varepsilon_m, x = L)]$ и фазовой задержки несущей $\tau(\varepsilon_m, \Omega_p, \omega) = [\varphi(\varepsilon_m, x = L) - \varphi(\varepsilon_m = 0, x = L)]/\omega$ для слабой ВЧ волны под действием мощной НЧ волны накачки:

$$\chi(\varepsilon_m, \Omega_p, \omega) = \frac{\mu P}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma[(m+1)/2]}{\Gamma[(m+2)/2]}\varepsilon_m^m L\Omega_p^q d_0\omega^2$$

$$\times\int_0^\infty \frac{[(\Omega^2-\omega^2)^2 - d_0^2\omega^2]lN(l)dl}{[(\Omega^2-\Omega_p^2)^2 + d_0^2\Omega_p^2]^{m/2}[(\Omega^2-\omega^2)^2 + d_0^2\omega^2]^2}$$

$$+\frac{2\eta Q}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\Gamma[(n+2)/2]}\varepsilon_m^n L\Omega_p^r d_0\omega^2$$

$$\times\int_0^\infty \frac{(\Omega^2-\omega^2)\Omega^2 lN(l)dl}{[(\Omega^2-\Omega_p^2)^2 + d_0^2\Omega_p^2]^{n/2}[(\Omega^2-\omega^2)^2 + d_0^2\omega^2]^2}, \tag{21}$$

$$\tau(\varepsilon_m, \Omega_p, \omega) = -\frac{2\mu P}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma[(m+1)/2]}{\Gamma[(m+2)/2]}\varepsilon_m^m L\Omega_p^q d_0^2\omega^2$$

$$\times\int_0^\infty \frac{(\Omega^2-\omega^2)lN(l)dl}{[(\Omega^2-\Omega_p^2)^2 + d_0^2\Omega_p^2]^{m/2}[(\Omega^2-\omega^2)^2 + d_0^2\omega^2]^2}$$

$$+\frac{\eta Q}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\Gamma[(n+2)/2]}\varepsilon_m^n L\Omega_p^r$$

$$\times\int_0^\infty \frac{[(\Omega^2-\omega^2)^2 - d_0^2\omega^2]\Omega^2 lN(l)dl}{[(\Omega^2-\Omega_p^2)^2 + d_0^2\Omega_p^2]^{n/2}[(\Omega^2-\omega^2)^2 + d_0^2\omega^2]^2}. \tag{22}$$

Здесь вследствие динамического характера НЧ волны накачки, а также из-за того, что $q \geq 0$ и $r \geq 0$, выражения для $\chi(\varepsilon_m, \Omega_p, \omega)$ и $\tau(\varepsilon_m, \Omega_p, \omega)$ имеют несколько более сложный вид по сравнению с аналогичными выражениями (15), (16), когда нагрузка — статическая ($\varepsilon_0 = \mathrm{const}$) и $q, r = 0$ (в НЧ приближении ($\omega \ll \Omega, \Omega^2/d_0$) выражения (21),(22) существенно упрощаются). Из анализа амплитудно-частотных зависимостей выражений для $\chi(\varepsilon_m, \Omega_p, \omega)$ и $\tau(\varepsilon_m, \Omega_p, \omega)$ от ε_m, Ω_p и ω и сравнения их с результатами соответствующих экспериментов можно определить показатели степени и коэффициенты диссипативной и реактивной нелинейности дислокаций, параметр демпфирования, распределение дислокаций по длинам и их плотность. В НЧ диапазоне ($\omega \ll \Omega, \Omega^2/d_0$) при $m < n$ каждая из этих нелинейностей отвечает только за „свой“ эффект: диссипативная — за затухание звука на звуке, а реактивная — за фазовую задержку несущей. Из выражений (21), (22) следует, что в этом случае, при одинаковых длинах дислокаций ($N(l) = (\Lambda/l_0)\delta(l - l_0)$, $\Omega_0 = [2/(1-\nu)]^{1/2}(C_\perp/l_0)$), знаки нелинейных коэффициента затухания и фазовой задержки несущей ВЧ волны зависят от частоты ω: в диапазонах $0 < \omega < \Omega_1 = [-d_0 + [d_0^2 + 4\Omega_0^2]^{1/2}]/2$ и $\omega > \Omega_2 = [d_0 + [d_0^2 + 4\Omega_0^2]^{1/2}]/2$ — $\chi_{nl}(\varepsilon_m, \Omega_p, \omega) > 0$, $\tau(\varepsilon_m, \Omega_p, \omega) > 0$, а в диапазоне $\Omega_1 < \omega < \Omega_2$ — $\chi_{nl}(\varepsilon_m, \Omega_p, \omega) < 0$, $\tau(\varepsilon_m, \Omega_p, \omega) < 0$, т.е. в поликристаллах, вообще говоря, может наблюдаться не только затухание, но и „усиление“ звука на звуке. Из (21), (22) также видно, что на низких частотах ($\omega \ll \Omega_0, \Omega_0^2/d_0$) $\chi_{nl}(\varepsilon_m, \Omega_p, \omega) \propto \omega^2$, а на высоких ($\omega \gg \Omega_2$) — $\chi_{nl}(\varepsilon_m, \Omega_p, \omega) \propto \omega^{-2}$. Следовательно, в диапазоне промежуточных частот могут наблюдаться „промежуточные“ зависимости $\chi_{nl}(\varepsilon_m, \Omega_p, \omega)$ от ω; их конкретный вид определяется параметром демпфирования и функцией распределения дислокаций.

В заключение этого раздела отметим, что кроме рассмотренных „усредненных“ (т.е. не зависящих от времени и фазы θ НЧ волны) эффектов изменения амплитуды и фазы несущей слабой ВЧ волны под действием мощной НЧ волны накачки, в таком резонаторе возможны эффекты амплитудной и фазовой модуляции первичных и генерации вторичных ВЧ волн, в первую очередь — на комбинационных частотах $\omega_\pm(2z) = \omega \pm 2z\Omega_p$, $z = 1, 2, 3, \ldots$, однако вследствие эффекта затухания звука на звуке амплитуда этих вторичных ВЧ волн будет незначительной. Тем не менее при взаимодействии амплитудно-модулированной мощной НЧ волны накачки и слабой гармонической ВЧ волны в таких нелинейных средах будут наблюдаться эффекты амплитудно-фазовой модуляции (АФМ) слабой ВЧ волны, связанные с переносом на нее амплитудной модуляции мощной НЧ волны накачки [34,35]. В этом случае параметры диссипативной и реактивной нелинейности поликристалла можно определить на основе анализа АФМ модуляции ВЧ волны (или амплитудных зависимостей ее спектральных составляющих).

4. Амплитудно-фазовые эффекты самовоздействия интенсивной высокочастотной волны

Рассмотрим амплитудно-фазовые эффекты самовоздействия интенсивной гармонической ВЧ волны, приводящие к зависимости коэффициента затухания и фазовой скорости волны от ее амплитуды. (Такие эффекты наблюдались в стержнях из свинца [25], цинка [22], гранита [29], магнезита [27], мрамора [30] и кварцита [28]). В этом случае в отличие от эффектов влияния мощной НЧ на распространение слабой ВЧ волн функция распределения сегментов дислокаций $N = N(l)$ будет определяться примесными атомами, а не дислокационной сеткой. Это связано с тем, что для ВЧ волн отрыва дислокаций от примесных атомов не происходит, поэтому их длины сегментов дислокаций определяются примесными атомами.

Решение уравнения (11) будем искать методом возмущений, полагая, что $\varepsilon(x,t) = \varepsilon_1(x,t) + \varepsilon_3(x,t)$, $|\varepsilon_3(x,t)| \ll |\varepsilon_1(x,t)|$, $\varepsilon_1(x,t) = a(x)\cos[\omega t - kx - \varphi(x)]$, $\varepsilon_1(x{=}0,t){=}a_0\cos\omega t$, $\varepsilon_3(x{=}0,t){=}0$, $da(x)/dx \ll ka(x)$, $d\varphi(x)/dx \ll k\varphi(x)$. После несложных вычислений получаем уравнения для амплитуды $a(x)$ и фазы $\varphi(x)$ волны $\varepsilon_1(x,t)$:

$$\frac{1}{a(x)}\frac{da(x)}{dx} = -\frac{4R^2C_0}{\pi^3}Z(\omega) - 2\mu H(m,q)a^m(x)d_0\omega^{q+2}$$

$$\times\int_0^\infty \frac{[(\Omega^2-\omega^2)^2 - d_0^2\omega^2]lN(l)dl}{[(\Omega^2-\omega^2)^2 + d_0^2\omega^2]^{\frac{m}{2}+2}} - 4\eta F(n,r)a^n(x)d_0\omega^{r+2}$$

$$\times\int_0^\infty \frac{(\Omega^2-\omega^2)\Omega^2 lN(l)dl}{[(\Omega^2-\omega^2)^2 + d_0^2\omega^2]^{\frac{n}{2}+2}}, \tag{23}$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{4R^2C_0}{\pi^3}W(\omega) - 4\mu H(m,q)a^m(x)d_0^2\omega^{q+3}$$

$$\times\int_0^\infty \frac{(\Omega^2-\omega^2)lN(l)dl}{[(\Omega^2-\omega^2)^2 + d_0^2\omega^2]^{\frac{m}{2}+2}} + 2\eta F(n,r)a^n(x)\omega^{r+1}$$

$$\times\int_0^\infty \frac{[(\Omega^2-\omega^2)^2 - d_0^2\omega^2]\Omega^2 lN(l)dl}{[(\Omega^2-\omega^2)^2 + d_0^2\omega^2]^{\frac{n}{2}+2}}, \tag{24}$$

где

$$H(m,q) = \frac{8R^2C_0}{\pi^{9/2}}\frac{\Gamma[(m+3)/2]}{\Gamma[(m+4)/2]}B\left[\frac{m-q+1}{2}, \frac{q+3}{2}\right]$$

$$\times\left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2b^2}\right)^m\left(\frac{b}{C_\perp}\right)^q,$$

$$F(n,r) = \frac{8R^2C_0}{\pi^{9/2}}\frac{\Gamma[(n+3)/2]}{\Gamma[(n+4)/2]}B\left[\frac{n-r+3}{2}, \frac{r+1}{2}\right]$$

$$\times\left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2b^2}\right)^n\left(\frac{b}{C_\perp}\right)^r.$$

Первые слагаемые в правых частях уравнений (23), (24) отвечают за линейные затухание и изменение скорости распространения ВЧ волны, а вторые и третьи — описывают изменения ее амплитуды и фазы (т. е. фазовой скорости волны) за счет соответственно диссипативной и реактивной нелинейности. В относительно низкочастотном диапазоне и при $m < n$ каждая из этих нелинейностей отвечает также только за „свой“ эффект: диссипативная — за нелинейное ограничение амплитуды волны (или самопросветление среды), а реактивная — за изменение фазовой задержки несущей (т. е. фазовой скорости волны):

$$\frac{1}{a(x)}\frac{da(x)}{dx} = -\frac{4R^2C_0}{\pi^3}Z(\omega) - 2\mu H(m,q)a^m(x)d_0\omega^{q+2}$$
$$\times \int_0^\infty \frac{[(\Omega^2-\omega^2)^2-d_0^2\omega^2]lN(l)dl}{[(\Omega^2-\omega^2)^2+d_0^2\omega^2]^{\frac{m}{2}+2}}, \qquad (25)$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{4R^2C_0}{\pi^3}W(\omega) + 2\eta F(n,r)a^n(x)\omega^{r+1}$$
$$\times \int_0^\infty \frac{[(\Omega^2-\omega^2)^2-d_0^2\omega^2]\Omega^2 lN(l)dl}{[(\Omega^2-\omega^2)^2+d_0^2\omega^2]^{\frac{n}{2}+2}}. \qquad (26)$$

Из уравнений (25), (26) находим выражения для амплитуды $a(L)$ и нелинейной задержки несущей $\tau_1(a_0,\omega) = [\varphi(a_0, x = L) - \varphi(0, x + L)]/\omega$ волны $\varepsilon_1(x,t)$ при $x = L$: $\tau_1(a_0,\omega) = [\varphi(a_0, x = L) - \varphi(0, x = L)]/\omega$

$$a(L) = \frac{a_0\exp[-A_1(\omega)L]}{\left[1 + \frac{B_1(\omega)}{A_1(\omega)}\{1-\exp[-mA_1(\omega)L]\}a_0^m\right]^{\frac{1}{m}}},$$

$$\tau_1(a_0,\omega) = B_2(\omega)\int_0^L a^n(x)dx, \qquad (27)$$

где

$$A_1(\omega) = \frac{4R^2C_0}{\pi^3}Z(\omega),$$

$$B_1(\omega) = 2\mu H(m,q)d_0\omega^{q+2}\int_0^\infty \frac{[(\Omega^2-\omega^2)^2-d_0^2\omega^2]lN(l)dl}{[(\Omega^2-\omega^2)^2+d_0^2\omega^2]^{\frac{m}{2}+2}},$$

$$B_2(\omega) = 2\eta F(n,r)\omega^r\int_0^\infty \frac{[(\Omega^2-\omega^2)^2-d_0^2\omega^2]\Omega^2 lN(l)dl}{[(\Omega^2-\omega^2)^2+d_0^2\omega^2]^{\frac{n}{2}+2}}.$$

На малых расстояниях, при $mA_1(\omega)L \ll 1$, $nA_1(\omega)L \ll 1$, $mB_1(\omega)La_0^m \ll 1$, получаем: $a(L) \approx a_0\exp[-A_1(\omega)L]$, $\tau_1(a_0,\omega) \approx B_2(\omega)a_0^nL$.

При $\frac{B_1(\omega)}{A_1(\omega)}\{1-\exp[-mA_1(\omega)L]\}a_0^m \ll 1$ из выражений (27) имеем

$$a(L) \cong a_0\exp[-A_1(\omega)L]\Bigg[1 - \frac{B_1(\omega)}{mA_1(\omega)}$$
$$\times \{1-\exp[-mA_1(\omega)L]\}a_0^m\Bigg],$$

$$\tau_1(a_0,\omega) \cong a_0^n\frac{1-\exp[-nA_1\omega)L]}{nA_1(\omega)}\Bigg[1 - \frac{nB_1(\omega)}{mA_1(\omega)}$$
$$\times\left(1 - \frac{n}{n+m}\frac{1-\exp[-(n+m)A_1(\omega)L]}{1-\exp[-nA_1(\omega)L]}\right)a_0^m\Bigg]B_2(\omega),$$

а при выполнении дополнительных условий $\exp[-mA_1(\omega)L] \ll 1$, $\exp[-nA_1(\omega)L] \ll 1$ — получаем

$$a(L) \cong a_0\exp[-A_1(\omega)L]\left[1 - \frac{B_1(\omega)}{mA_1(\omega)}a_0^m\right], \qquad (28)$$

$$\tau_1(a_0,\omega) \cong \frac{B_2(\omega)a_0^n}{nA_1(\omega)}\left[1 - \frac{nB_1(\omega)}{(n+m)A_1(\omega)}a_0^m\right]. \qquad (29)$$

Из выражений (27)–(29) следует, что при одинаковых длинах сегментов дислокаций $[N(l) = (\Lambda/l_0)\delta(l-l_0)]$, $\Omega = [2/(1-\nu)]^{1/2}(C_\perp/l_0)$ знаки коэффициентов $B_{1,2}(\omega)$, а определяющих нелинейные коэффициенты затухания и фазовой задержки несущей ВЧ волны, зависят от ее частоты ω. В диапазонах $0 < \omega < \Omega_1 = \{-d_0 + [d_0^2 + 4\Omega^2]^{1/2}\}/2$ и $\omega > \Omega_2 = \{d_0 + [d_0^2 + 4\Omega^2]^{1/2}\}/2$ — $B_{1,2}(\omega) > 0$, поэтому здесь будет наблюдаться эффект ограничения амплитуды волны, при этом $\tau_1(a_0,\omega) > 0$. В диапазоне $\Omega_1 < \omega < \Omega_2$ — $B_{1,2}(\omega) < 0$, так что здесь будет иметь место эффект самопросветления среды, при этом $\tau_1(a_0,\omega) < 0$.

5. Генерация третьей гармоники интенсивной высокочастотной волны

Кроме эффектов самовоздействия интенсивной первичной гармонической волны, в поликристаллах возможна и генерация вторичных волн на частотах высших гармоник, что также можно использовать для изучения их дислокационной акустической нелинейности. Генерация второй и третьей гармоник в металлах исследовалась в работах [12,36–38], где учитывались квадратичная решеточная нелинейность однородного твердого тела [31] и кубичная упругая нелинейность, связанная с изменением длины дислокационной струны при ее изгибе под действием статического и переменного напряжений. Здесь в рамках волнового уравнения (8) будет рассмотрен процесс генерации третьей гармоники при распространении интенсивной продольной ВЧ волны в поликристалле с диссипативной и реактивной дислокационной нелинейностью. Из-за нечетного характера диссипативной и реактивной нелинейности уравнения движения дислокаций при нулевой статической нагрузке $\sigma_0 = 0$ в поликристалле будут генерироваться только нечетные гармоники.

Подставляя в уравнение (11) $\varepsilon(x,t) = \varepsilon_1(x,t) + \varepsilon_3(x,t)$, $\varepsilon_1(x,t) = a(x)\cos[\omega t - kx - \varphi(x)]$, $\varepsilon_3(x,t) = b_3(x)\sin\{3[\omega t - kx - \varphi(x)]\} + c_3(x)\cos\{3[\omega t - kx - \varphi(x)]\}$ и полагая, что $b_3(x) \ll a(x)$, $c_3(x) \ll a(x)$, $db_3(x)dx \ll 3kb_3(x)$, $dc_3(x)dx \ll 3kc_3(x)$, получаем уравнения для амплитуд

$b_3(x)$ и $c_3(x)$ sin- и cos-компонент вторичной волны $\varepsilon_3(x,t)$:

$$\frac{db_3(x)}{dx} - 3c_3(x)\frac{d\varphi(x)}{dx} = -\frac{4R^2C_0}{\pi^3}[b_3(x)Z(3\omega) + c_3(x)W(3\omega)] - \frac{24R^2C_0}{\pi^4}\delta d_0 a^{m+1}(x)\omega^q\left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2 b}\right)^m \times\left(\frac{3m-4q}{m+4}\right)B\left[\frac{m-q+1}{2},\frac{q+3}{2}\right]X_m(3\omega) - \frac{24R^2C_0}{\pi^4}g a^{n+1}(x)\omega^r\left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2 b}\right)^n\left(\frac{n-4r}{n+4}\right) \times B\left[\frac{n-r+3}{2},\frac{r+1}{2}\right]\bar{Y}_n(3\omega), \tag{30}$$

$$\frac{dc_3(x)}{dx} + 3b_3(x)\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{4R^2C_0}{\pi^3}[b_3(x)W(3\omega) - c_3(x)Z(3\omega)] - \frac{24R^2C_0}{\pi^4}\delta d_0 a^{m+1}(x)\omega^q\left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2 b}\right)^m \times\left(\frac{3m-4q}{m+4}\right)B\left[\frac{m-q+1}{2},\frac{q+3}{2}\right]Y_m(3\omega) + \frac{24R^2C_0}{\pi^4}g a^{n+1}(x)\omega^r\left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2 b}\right)^n\left(\frac{n-4r}{n+4}\right) \times B\left[\frac{n-r+3}{2},\frac{r+1}{2}\right]\bar{X}_n(3\omega), \tag{31}$$

где

$$Z(3\omega) = 9d_0\omega^2\int_0^\infty \frac{lN(l)dl}{(\Omega^2-9\omega^2)^2+9(d_0\omega)^2},$$

$$W(3\omega) = 3\omega\int_0^\infty \frac{(\Omega^2-9\omega^2)lN(l)dl}{(\Omega^2-9\omega^2)^2+9(d_0\omega)^2},$$

$$X_m(3\omega) = \int_0^\infty \frac{3d_0\omega^3 lN(l)dl}{[(\Omega^2-\omega^2)^2+(d_0\omega)^2]^{(m+1)/2}[(\Omega^2-9\omega^2)^2+9(d_0\omega)^2]},$$

$$Y_m(3\omega) = \int_0^\infty \frac{\omega^2(\Omega^2-9\omega^2)lN(l)dl}{[(\Omega^2-\omega^2)^2+(d_0\omega)^2]^{(m+1)/2}[(\Omega^2-9\omega^2)^2+9(d_0\omega)^2]},$$

$$\bar{X}_n(3\omega) = \int_0^\infty \frac{3d_0\omega^2\Omega^2 lN(l)dl}{[(\Omega^2-\omega^2)^2+(d_0\omega)^2]^{(n+1)/2}[(\Omega^2-9\omega^2)^2+9(d_0\omega)^2]},$$

$$\bar{Y}_n(3\omega) = \int_0^\infty \frac{\omega(\Omega^2-9\omega^2)\Omega^2 lN(l)dl}{[(\Omega^2-\omega^2)^2+(d_0\omega)^2]^{(n+1)/2}[(\Omega^2-9\omega^2)^2+9(d_0\omega)^2]},$$

а амплитуда $a(x)$ и фаза $\varphi(x)$ первичной волны определяются уравнениями (27)–(29). Из (30), (31) получаем уравнение для комплексной амплитуды $e_3(x) = b_3(x) + jc_3(x)$ вторичной волны $\varepsilon_3(x,t)$:

$$\frac{de_3(x)}{dx} + 3[\beta(3\omega) + j\Psi(3\omega)]e_3(x) = s_3(x) \tag{32}$$

где

$$\beta(3\omega) = \frac{4R^2C_0}{3\pi^3}Z(3\omega),$$

$$\Psi(3\omega) = \frac{d\varphi(x)}{dx} - \frac{4R^2C_0}{3\pi^3}W(3\omega) \approx \frac{4R^2C_0}{\pi^3}\times\left[W(\omega) - \frac{W(3\omega)}{3}\right],$$

$$s_3(x) = -\frac{24R^2C_0}{\pi^4}\delta d_0 a^{m+1}(x)\omega^q\left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2 b}\right)^m\left(\frac{3m-4q}{m+4}\right) \times B\left[\frac{m-q+1}{2},\frac{q+3}{2}\right][X_m(3\omega)+jY_m(3\omega)] + j\frac{24R^2C_0}{\pi^4}g a^{n+1}(x)\omega^r\left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2 b}\right)^n\left(\frac{n-4r}{n+4}\right) \times B\left[\frac{n-r+3}{2},\frac{r+1}{2}\right][\bar{X}_n(3\omega)+j\bar{Y}_n(3\omega)].$$

Решение уравнения (32) имеет вид

$$e_3(x)=C_3(x)\exp\left[\frac{4R^2C_0}{\pi^3}[Z(3\omega)+jW(3\omega)]x-3j\varphi(x)\right], \tag{33}$$

где

$$C_3(x) = \frac{24R^2C_0}{\pi^4}\delta d_0\omega^q\left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2 b}\right)^m\left(\frac{3m-4q}{m+4}\right) \times B\left[\frac{m-q+1}{2},\frac{q+3}{2}\right][X_m(3\omega)+jY_m(3\omega)]\int_0^x a^{m+1}(x_1) \times\exp\left[-\frac{4R^2C_0}{\pi^3}[Z(3\omega)+jW(3\omega)]x_1 + 3j\varphi(x_1)\right]dx_1 + j\frac{24R^2C_0}{\pi^4}g\omega^r\left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2 b}\right)^n\left(\frac{n-4r}{n+4}\right)B\left[\frac{n-r+3}{2},\frac{r+1}{2}\right] \times[\bar{X}_n(3\omega)+j\bar{Y}_n(3\omega)]\Big\}\int_0^x a^{n+1}(x_1)\exp\left[-\frac{4R^2C_0}{\pi^3} \times[Z(3\omega)+jW(3\omega)]x_1 + 3j\varphi(x_1)\right]dx_1.$$

Вообще говоря, решение (33) является достаточно сложным для анализа; комплексная амплитуда $e_3(x)$ волны $\varepsilon_3(x,t)$ определяется суперпозицией волн, генерируемых за счет реактивной и диссипативной нелинейностей, при этом $a = a(a_0, x)$. В связи с этим мы рассмотрим поведение амплитуды деформации e_3 на малых расстояниях x, когда эффекты самовоздействия для первичной волны $\varepsilon_1(x,t)$ почти не проявляются и $a(x) \approx a_0 \exp[-A_1(\omega)x]$, $\varphi(x) \approx \frac{4R^2C_0}{\pi^3} W(\omega)x$:

$$C_3(x) = \frac{24R^2C_0}{\pi^4}\,\delta d_0\omega^q \left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2 b}\right)^m \left(\frac{3m-4q}{m+4}\right) B\left[\frac{m-q+1}{2}, \frac{q+3}{2}\right][X_m(3\omega) + jY_m(3\omega)]$$

$$\times\, a_0^{m+1}\, \frac{1-\exp\left(-\frac{4R^2C_0}{\pi^3}\{(m+1)Z(\omega) - Z(3\omega) - j[3W(\omega) - jW(3\omega)]\}x\right)}{\frac{4R^2C_0}{\pi^3}\{(m+1)Z(\omega) - Z(3\omega) - j[3W(\omega) - jW(3\omega)]\}}$$

$$+\, j\,\frac{24R^2C_0}{\pi^4}\,g\omega^r \left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2 b}\right)^n \left(\frac{n-4r}{n+4}\right) B\left[\frac{n-r+3}{2}, \frac{r+1}{2}\right][\bar{X}_n(3\omega) + j\bar{Y}_n(3\omega)]$$

$$\times\, a_0^{n+1}\, \frac{1-\exp\left(-\frac{4R^2C_0}{\pi^3}\{(n+1)Z(\omega) - Z(3\omega) - j[3W(\omega) - W(3\omega)]\}x\right)}{\frac{4R^2C_0}{\pi^3}\{(n+1)Z(\omega) - Z(3\omega) - j[3W(\omega) - W(3\omega)]\}}. \qquad (34)$$

Приведем оценки для параметров μ и η диссипативной и реактивной нелинейностей для изотропного поликристалла при $m = n = 1$, $q = r = 0$, $b = 3 \cdot 10^{-10}$ m, $N(l) = (\Lambda/l_0)\delta(l - l_0)$, $\Lambda = 10^{11}$ m^{-2}, $l_0 = 10^{-5}$ m, $C_\perp = 2.2 \cdot 10^3$ m/s, $C_0 = 3.7 \cdot 10^3$ m/s, $d_0 = 10^8$ rad/s, $\nu = 0.3$, $\Omega \approx 3.9 \cdot 10^8$ rad/s. Полагая, что при распространении в таком поликристалле первичной волны с частотой $\omega = 2\pi f$, $f = 10$ MHz и начальной амплитудой деформации $a_0 = 10^{-5}$, волна на частоте третьей гармоники генерируется только на диссипативной ($\eta = 0$) или только на реактивной ($\mu = 0$) нелинейности и на расстоянии $L = 10$ cm ее амплитуда составляет $|e_3(L)| = 10^{-8}$, получим соответственно $\mu \cong 63$ и $\eta \cong 4.8$.

Заключение

В работе на основе модификации линейной ВЧ части дислокационной теории Гранато−Люкке получено волновое уравнение для поликристаллических твердых тел с дислокационной диссипативной и реактивной акустической нелинейностью. Проведены теоретические исследования нелинейных эффектов влияния статического напряжения на распространение слабой продольной упругой волны, взаимодействия НЧ и ВЧ продольных упругих волн, а также самовоздействия интенсивной ВЧ продольной волны и генерации ее третьей гармоники. Получены выражения для:

— изменений коэффициента затухания и фазовой задержки несущей слабой ВЧ волны под действием статического напряжения и мощной НЧ волны накачки;

— амплитуды и фазовой задержки несущей интенсивной гармонической волны;

— амплитуды третьей гармоники интенсивной гармонической волны.

Описанные нелинейные эффекты (затухание и фазовая задержка несущей слабой ВЧ волны под действием сильной НЧ волны и самовоздействие интенсивной ВЧ волны) наблюдались в экспериментах со многими поликристаллическими горными породами и некоторыми металлами [20–30], при этом в каждом таком материале эти эффекты являются чрезвычайно сильными и, как правило, проявляют различные амплитудно-частотные зависимости. Так, например, в отожжженной поликристаллической меди (в зависимости от температуры отжига) уменьшение амплитуды ВЧ волны под действием мощной НЧ волны накачки ($\varepsilon_m \approx 10^{-5}$) составляет от 2 до 10 (и даже более) раз, а относительная фазовая задержка несущей достигает величины 1%. Следует, однако, заметить, что подобные значения нелинейных затухания и фазовой задержки несущей слабой ВЧ волны (при прочих равных условиях) наблюдаются далеко не во всех материалах, а в некоторых из них (например, в силикатном и органическом стеклах, неотожженной меди, дюралюминии, стали, молибдене, никеле, олове, титане и т.д.) такие эффекты не наблюдаются вообще. Кроме того, если ту же отожженную медь подвергнуть пластической деформации изгиба или кручения, то интенсивность нелинейных эффектов в этом металле сильно уменьшается. Все это свидетельствует о том, что диссипативная и реактивная нелинейность является чувствительной структурной характеристикой многих поликристаллических твердых тел, что можно использовать для акустической диагностики их дислокационной структуры.

Финансирование работы

Работа поддержана РФФИ (грант N20-02-00215A).

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] H.G. Van Bueren. *Imperfections in crystals.* (Interscience, NY., 1960).
[2] J. Friedel. Dislocations. (Pergamon Press, Oxford–London–Edinburgh–New York–Paris–Frankfurt, 1964).
[3] D. Hull. *Introduction to Dislocations.* (Pergamon Press, Oxford–London–Edinburgh–New York–Paris–Frankfurt, 1964).
[4] R.W.K. Honeycombe. *The Plastic Deformation of Metals.* (Edward Arnold (Publishers) Ltd, 1968).
[5] A.S. Nowick, B.S. Berry. *Anelastic Relaxation in Crystalline Solids.* (Academic Press, New York and London, 1972).
[6] J.P. Hirth, J. Lothe. *Theory of Dislocations.* (McGraw Hill, 1970).
[7] A. Granato, K. Lucke. J.Appl.Phys., **27** (5), 583 (1956).
[8] *Ультразвуковые методы исследования дислокаций*: Сб. статей / Пер. с англ. и нем. под ред. Л.Г. Меркулова. (ИИЛ, М., 1963).
[9] „*Application to quantum and solid state physics*", *in Physical Acoustics: Principles and Methods*, Edited by Warren P. Mason (Academic Press, New York and London, Vol. 4, Part A, 1966).
[10] „*The effect of imperfection*", *in Physical Acoustics: Principles and Methods*, Edited by Warren P. Mason (Academic Press, New York and London, Vol. 3, Part A, 1966).
[11] Д. Ниблетт, Дж. Уилкс. УФН, **80** (1), 125 (1963).
[12] R. Truell, C. Elbaum. B.B. Chick. *Ultrasonic Methods in Solid State Physics.* (Academic Press, New York and London, 1969).
[13] T. Suzuki. *Dislocation Dynamics.* Ed. Rosenfeld A.R. et al. (McGraw Hill, NY., 1967/68).
[14] H.F. Pollard. *Sound Waves in Solids.* (Pion Limited, 1977).
[15] J.S. Koehler. In book: *Imperfection in Nearly Perfect Crystals*, (NY., 1952).
[16] V.E. Nazarov, A.V. Radostin. *Nonlinear acoustic waves in micro-inhomogeneous solids.* (John Wiley & Sons, 2015).
[17] A.S. Novick. Phys. Rev., **80** (2), 249 (1950).
[18] S. Takahachi. J. Phys. Soc. Japan. **11** (12), 1253 (1956).
[19] D.N. Beshers. J. Appl. Phys., **30** (2), 252 (1959).
[20] В.Е. Назаров. Акуст. журн., **37** (4), 825 (1991).
[21] В.Е. Назаров. Акуст. журн., **37** (6), 1177 (1991).
[22] V.E. Nazarov. Acoust.Lett., **15** (2), 22 (1991).
[23] С.В. Зименков, В.Е. Назаров. ФММ, **73** (3), 62 (1992).
[24] V.E. Nazarov, A.B. Kolpakov. JASA, **107** (4), 1915 (2000).
[25] В.Е. Назаров. ФММ, **88** (4), 82 (1999).
[26] С.В. Зименков, В.Е. Назаров. Изв. РАН, Сер. Физика Земли, **1**, 13 (1933).
[27] V.E. Nazarov, A.B. Kolpakov. Ultrasonics, **54**, 471 (2014).
[28] V.E. Nazarov, A.B. Kolpakov. Wave motion, **72**, 187 (2017).
[29] V.E. Nazarov, A.B. Kolpakov, A.V. Radostin. Acoust. Phys., **56** (4), 453 (2010).
[30] В.Е. Назаров, А.Б. Колпаков, А.В. Радостин. Физическая мезомеханика, **13** (2), 41 (2010).
[31] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Теория упругости.* (Наука, М., 1986).
[32] Э. Камке. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* Пер. с нем. С.В. Фомина. (Наука, М., 1976).
[33] В.Е. Назаров. Акуст. журн., **57** (2), 204 (2011).
[34] А.Л. Багмет, В.Е. Назаров, А.В. Николаев, А.П. Резниченко, А.М. Поликарпов. ДАН, **346** (3), 390 (1996).
[35] В.Е. Назаров, А.В. Радостин. Акуст. журн., **57** (5), 596 (2011).
[36] T. Suzuki, A. Hikata, C. Elbaum. J. Appl. Phys., **35** (9), 2761 (1964).
[37] A. Hikata, B.B. Chick, C. Elbaum. J. Appl. Phys., **36** (1), 229 (1965).
[38] A. Hikata, C. Elbaum. Phys. Rev., **144** (2), 469 (1966).