

01

Влияние дискообразных непроводящих включений на электропроводность материала на постоянном токе

© Л.И. Стефанович

Институт физики горных процессов НАН Украины,
49005 Днепр-5, Украина
e-mail: listef2591@gmail.com

Поступило в Редакцию 30 мая 2020 г.

В окончательной редакции 3 августа 2020 г.

Принято к публикации 24 августа 2020 г.

Рассмотрено влияние непроводящих дискообразных включений (трещин) на электропроводность проводящей среды на постоянном токе. Найдены функциональные зависимости возникающего относительного добавочного удельного электросопротивления материала от коэффициента трещиноватости для случаев толстого и тонкого образцов. Показано, что в случае больших толщин образца добавочное относительное удельное электросопротивление проводящего материала, обусловленное трещинами, при всех реальных значениях коэффициента трещиноватости образца растет пропорционально корню кубическому из коэффициента трещиноватости, для тонкого же образца зависимость относительного добавочного удельного электросопротивления материала от коэффициента трещиноватости только при очень малых степенях трещиноватости имеет линейный характер, а далее наблюдается ее нелинейный рост.

Ключевые слова: электропроводность, дискообразные включения, относительное добавочное удельное электросопротивление, трещиноватость, гидродинамическая аналогия.

Введение

Характерной особенностью большинства горных пород является их структурная неоднородность, обусловленная наличием в них различного рода дефектов: пор, трещин, фильтрационных каналов. Для оценки степени трещиноватости минералов и горных пород используются различные методы. Метод микроскопии шлифов достаточно трудоемок и, кроме того, является по сути разрушающим [1]. Что касается геофизических методов, то, с одной стороны, их преимущества очевидны и связаны с возможностью получения статистически усредненной по всему объему образца информации, а с другой — однозначная интерпретация геофизических данных затруднительна. Более того, на сегодняшний день для большинства геофизических методов отсутствуют даже приблизительные оценки их потенциальной информативности по отношению к наличию и концентрации микротрещин. В качестве одного из немногих исключений здесь выступает ультразвуковой высокочастотный велосиметрический метод, позволяющий количественно оценивать плотность микротрещиноватости с использованием аналитических и корреляционных зависимостей, связывающих ее со скоростью продольных упругих волн [2]. Можно отметить также теоретическую модель, отражающую взаимосвязь электрического сопротивления с концентрацией z -образных микротрещин в горных породах в условиях их механического нагружения [3], которая, однако, является чисто качественной.

Что касается теоретических исследований о влиянии трещиноватости, то на сегодняшний день они носят довольно фрагментарный характер. В этой свя-

зи следует отметить работу [4], где была проведена теоретическая оценка влияния микротрещиноватости горных пород с эллипсоидальными включениями на их проводимость в рамках известного приближения Максвелла–Гарнетта [5], когда концентрация включений считается малой. При этом использовалась модель эффективной среды, которая хорошо работает, когда размер самой рассматриваемой системы во много раз превышает как характерные размеры включений, так и расстояния между ними. Однако учитывая, что средние размеры трещин в горных породах могут иметь вполне макроскопический масштаб, для рассмотрения их влияния на электрофизические свойства среды следует отказаться от использования модели эффективной среды. Это особенно важно для горных пород, содержащих угольные пласты, так как уголь является электропроводящим материалом. Поскольку электрическая проводимость углей сравнительно невелика, измерить ее экспериментальными методами довольно затруднительно. Поэтому до сих пор является актуальной эффективная количественная оценка влияния трещиноватости на электропроводность таких материалов. В связи с этим возникает настоятельная необходимость предварительного теоретического расчета или хотя бы оценки влияния системы трещин на электросопротивление угля. Следует сказать, что наличие в углях различного рода пустот исследовалось и ранее. Так, ранее в работе [6] было изучено теоретически влияние пор на электрическую проводимость углей. Однако пористость угольного вещества чаще всего оказывается меньше, чем его трещиноватость, что вызывает потребность оценки вклада трещин в электросопротивление угля.

Уже в монографии Ржевского 1978 г. [7] было высказано соображение, что основную роль в изменении удельного сопротивления пород, однотипных по составу, играет трещиноватость. При этом резкое увеличение удельного сопротивления связано с тем, что не только уменьшается площадь токопроводящих каналов, но и удлиняется путь прохождения тока за счет роста их извилистости. Дальнейшее развитие теория о влиянии трещин на электропроводность твердых тел получила в работах Салганика [8,9], где исследовались различные процессы переноса в твердых телах. Однако в этих работах не было проанализировано, как влияет соотношение размеров угольного образца и размеров трещин на электропроводность рассматриваемого материала. Кроме того, в этих работах рассматривалось приближение малой концентрации трещин, когда среднее расстояние между трещинами достаточно велико. Настоящая же работа относится к теоретическому изучению влияния трещин на электросопротивление не только углей, а вообще любых проводящих материалов. Следует сказать, что некоторые предварительные результаты по влиянию трещин на электросопротивление проводящего материала в рамках двумерной модели проводящей среды были получены нами в [10]. Однако они требуют дальнейшего уточнения и развития.

1. Постановка задачи

При теоретическом рассмотрении влияния трещиноватости на электропроводность проводящих сред можно рассматривать последние как матричные гетерогенные системы с включениями, когда объемная доля включений (трещин) сравнительно невелика. Однако при этом мы не будем ограничиваться случаем, когда характерные размеры трещин являются малыми. Особенностью непроводящих (газонаполненных) трещин является то, что они могут существенно влиять на эффективные характеристики среды ввиду существенного различия в свойствах среды внутри и вне их, что перекрывает малость занимаемого ими объема. Поэтому к трещинам не применимы любые подходы, оперирующие только объемной долей включений. Будем считать, что включения в среде распределены таким образом, что можно пренебречь их взаимным влиянием. Иными словами, можно вначале рассмотреть задачу о единственном изолированном включении, а затем обобщить ее на образец, содержащий совокупность таких включений.

2. Воздействие на электропроводность материала единственной трещины

Рассмотрим для определенности образец с отличной от нуля проводимостью в виде плоскопараллельной пластины толщиной d , содержащей протяженное изолированное непроводящее включение дискообразной формы радиуса R . Для прохождения через пластину

постоянного тока следует приложить к ее противоположным сторонам некоторую разность потенциалов $U_2 - U_1$. Во внешней цепи будет протекать постоянный ток I . В соответствии с законом Ома участка цепи для электросопротивления мы можем записать соотношение

$$R = \frac{U_2 - U_1}{I}. \quad (1)$$

Вполне очевидно, что влияние непроводящего включения (трещины) проявится в уменьшении плотности тока через образец. Измененную плотность тока обозначим $j - \Delta j$, где Δj — изменение плотности тока, обусловленное трещиной. Используя (1), легко показать, что относительное изменение удельного сопротивления образца, обусловленное одной единственной трещиной, оказывается равным

$$\left(\frac{\rho_{cr} - \rho}{\rho} \right)_0 = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_0 = \frac{\Delta j}{j - \Delta j}, \quad (2)$$

где $\rho = (U_2 - U_1)/jd$ — удельное электросопротивление идеального образца, который не содержит включений; $\rho_{cr} - \rho = (U_2 - U_1)/(j - \Delta j)d$ — добавка к удельному электросопротивлению образца за счет взаимодействия тока с трещиной; Δj — нормальная добавка к плотности тока. Важной отличительной особенностью выражения (2) для добавочного удельного сопротивления является то, что оно является точным. Это связано с отказом от использованного ранее в [10] предположения, что возмущение плотности тока, обусловленное влиянием трещины, мало по сравнению с величиной плотности тока в идеальном образце, т. е. $\Delta j/j \ll 1$. Таким образом, выражение (2) можно будет использовать и в том случае, когда возмущение первоначальной плотности тока, вызванное трещиноподобными включениями, не является малым.

Расчет мы будем проводить для трещины, которая параллельна поверхности пластины. Единственное отличие для наклонных трещин будет сводиться к тому, что полученный результат следует умножить на $\cos^2 \theta$, где θ — угол между нормалью к внешней поверхности пластины и нормалью к плоскости трещины.

Совокупность трещин в образце чаще всего образуют целую систему трещин, располагающихся параллельно друг другу (рис. 1). Для простоты будем полагать, что все трещины в среднем имеют примерно одинаковый радиус и очень маленькое зияние. Наличие системы трещин в образце естественно будет приводить к некоторому дополнительному сопротивлению материала.

Чтобы найти влияние всей системы трещин на электросопротивление проводящего образца, прежде всего, следует рассмотреть изменение плотности тока под воздействием одной единственной трещины, а затем полученный результат усреднить.

Представим себе, что мы имеем дело с непроводящими дискообразными включениями в проводящем материале. Тогда для нахождения проводимости такого

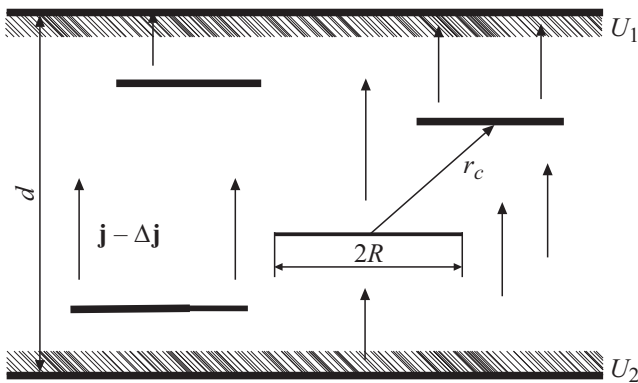


Рис. 1. Схема распределения тока в пластине с трещинами.

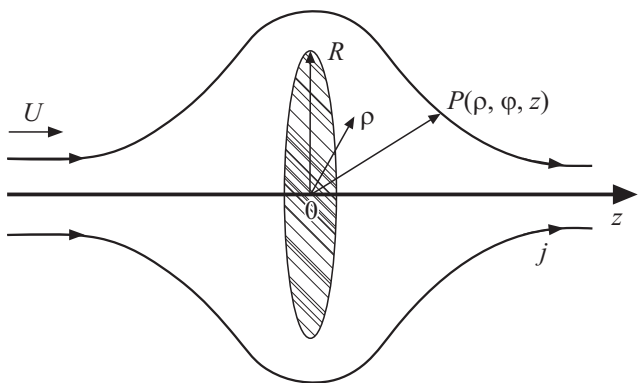


Рис. 2. Картина обтекания тонкого диска радиуса R потоком идеальной несжимаемой жидкости (в цилиндрической системе координат). U — скорость жидкости на бесконечности, j — направление тока жидкости.

материала можно воспользоваться гидродинамической аналогией между движением идеальной несжимаемой жидкости и движением носителей заряда в проводнике.

Если рассматривать обтекание осесимметричного тела в виде тонкого диска радиуса R (толщина диска предполагается предельно малой) потоком идеальной несжимаемой жидкости, скорость которого U направлена вдоль оси Oz (рис. 2), то, как показано в [11], потенциал обтекания такого тела в некоторой точке $P(\rho, \varphi, z)$ вне диска в цилиндрической системе координат определяется соотношением

$$\Phi = Uz \left[1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{v} - \operatorname{arctg} v \right) \right], \quad (3)$$

а добавка к потенциалу потока за счет обтекания дискообразного включения имеет вид

$$\Delta\Phi(\rho, z) = Uz \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{v} - \operatorname{arctg} v \right), \quad (4)$$

где безразмерная величина v есть положительный корень уравнения

$$\frac{\rho^2}{R^2(1+v^2)} + \frac{z^2}{R^2v^2} = 1. \quad (5)$$

Уравнение (5) дает связь между координатами точки наблюдения и радиусом дискообразного включения (трещины) в цилиндрической системе координат. Уравнение (5) можно переписать в виде следующего биквадратного уравнения относительно v :

$$v^4 - \lambda^2(\rho, z)v^2 - \xi^2 = 0, \quad (6a)$$

где введены безразмерные параметры

$$\lambda^2(\rho, z) = (\rho^2 + z^2 - R^2)/R^2, \quad \xi^2 = z^2/R^2. \quad (6b)$$

Решая биквадратное уравнение (6a), и выбирая положительный корень, получаем функцию $v^2(\rho, z)$ в виде

$$v^2(\rho, z) = \frac{1}{2}(\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 + 4\xi^2}) = \frac{\lambda^2}{2}(1 + \sqrt{1 + 4\xi^2/\lambda^4}). \quad (7)$$

Рассмотрим возможные предельные случаи. Пусть в выражении (7) второе слагаемое под корнем мало. Это выполняется в том случае, когда $\xi^2 \ll \lambda^4$ или, согласно (6b), в том случае, когда $\rho \gg R$, независимо от соотношения между величинами z и R . Как мы увидим в дальнейшем, подобное условие соответствует малой концентрации трещин. В этом случае из (7) следует приближенное соотношение

$$v \approx \lambda = \sqrt{\rho^2 + z^2 - R^2}/R. \quad (8)$$

Тогда добавка к скорости потока в направлении оси Oz за счет обтекания дискообразного включения приобретает вид

$$\Delta v_z(\rho, z) = \frac{\partial \Delta\Phi(\rho, z)}{\partial z} = \frac{2U}{\pi} \left(\frac{1}{\lambda} - \operatorname{arctg} \lambda \right) - \frac{2Uz^2}{\pi R^2 \lambda^3 (1 + \lambda^2)}. \quad (9)$$

Поскольку в рассматриваемом предельном случае $\lambda \gg 1$ воспользовавшись разложением арккотангенса при больших значениях аргумента в асимптотический ряд

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \dots, \quad (10)$$

получим для добавки к скорости потока следующее приближенное выражение:

$$\Delta v_z(\rho, z) \approx \frac{2UR^3}{3\pi} \left[\frac{1}{(\rho^2 + z^2 - R^2)^{3/2}} - \frac{3z^2}{(\rho^2 + z^2 - R^2)^{5/2}} \right]. \quad (11)$$

Таким образом, мы получили приращение z -компоненты скорости потока, возникающей за счет обтекания дискообразного тела потоком идеальной несжимаемой жидкости. Для самой компоненты скорости в произвольной точке $P(\rho, \varphi, z)$ мы получаем следующее выражение:

$$v'_z(\rho, z) = U - \Delta v_z(\rho, z), \quad (12)$$

где $\Delta v_z(\rho, z)$ — определяется выражением (9). Воспользовавшись (2) и (12), и, используя гидродинамическую

аналогию, запишем относительную добавку к удельному сопротивлению, обусловленную одной единственной дискообразной трещиной радиуса R :

$$\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_0 = \frac{j-j'}{j'} = \frac{\Delta j}{j'} \propto \frac{U-v'_z}{v'_z} \equiv \frac{U-(U-\Delta v_z)}{U-\Delta v_z} = \frac{\Delta v_z/U}{1-\Delta v_z/U}. \quad (13)$$

3. Добавочное удельное электросопротивление, создаваемое системой трещин

Воспользовавшись выражением (11) для $\Delta v_z(\rho, z)$, мы можем найти относительное добавочное удельное электросопротивление $(\Delta\rho/\rho)$ в случае системы параллельных дискообразных трещин, плоскости которых перпендикулярны направлению электрического тока. При этом достаточно учесть вклад только тех трещин, которые находятся на среднем расстоянии r_c от места, где мы ищем плотность тока. Для этого усредним выражение (11) по объему образца и введем понятие плотности трещин в единице объема материала, которая в данном случае равна $1/r_c^3$. Тогда получим относительную добавку к удельному сопротивлению проводящего материала, обусловленную системой параллельно расположенных дискообразных трещин, в виде

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\langle\Delta j\rangle}{j-\langle\Delta j\rangle} \propto \frac{\langle\Delta v_z\rangle}{v'_z} \equiv \frac{\langle\Delta v_z\rangle}{U-\langle\Delta v_z\rangle} = \frac{k}{1-k}. \quad (14)$$

Следовательно, для нахождения относительного изменения сопротивления нам необходимо фактически найти безразмерное отношение

$$k \equiv \frac{\langle\Delta v_z\rangle}{U} = \frac{1}{r_c^3 U} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{2R}^{r_c} \rho d\rho \int_0^d dz \Delta v_z(\rho, z). \quad (15)$$

Ввиду предполагаемой статистической однородности и изотропии распределения трещин по образцу данное выражение не будет зависеть от координат φ, ρ, z . Подстановка приближенного значения (11) для $\Delta v_z(\rho, z)$ в (15) дает

$$k \equiv \langle v_z \rangle / U = \frac{2R^3}{3r_c^3} \int_{2R}^{r_c} \rho d\rho \int_0^d dz \times \left[\frac{1}{(z^2+a^2)^{3/2}} - \frac{3z^2}{(z^2+a^2)^{5/2}} \right], \quad (16)$$

где введено обозначение $a^2 = \rho^2 - R^2$. Для внутреннего интеграла по z имеем

$$\int_0^d dz \left[\frac{1}{(z^2+a^2)^{3/2}} - \frac{3z^2}{(z^2+a^2)^{5/2}} \right] = \frac{d}{(a^2+d^2)^{3/2}}. \quad (17)$$

Подставляя полученное значение в (16), находим окончательно

$$k \equiv \langle \Delta v_z \rangle / U = \frac{2R^3 d}{3r_c^3} \int_{2R}^{r_c} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + d^2 - R^2)^{3/2}} = \frac{2R^2 d}{3r_c^3} \left[\frac{1}{\sqrt{d^2 + 3R^2}} - \frac{1}{\sqrt{d^2 + r_c^2 - R^2}} \right]. \quad (18)$$

Здесь можно рассмотреть различные предельные ситуации.

I. Пусть $d \gg r_c \gg R$. Это справедливо в случае толстой пластины и малой концентрации мелких трещин. Выражение (18) в этом случае можно оценить следующим образом:

$$k \approx \frac{R^3}{3d^2 r_c}. \quad (19)$$

Если в выражение (19) ввести безразмерный коэффициент трещиноватости

$$\gamma = \frac{\pi R^2 h}{r_c^3}, \quad (20)$$

где h — малое зияние дискообразной трещины, то выражение для k принимает вид

$$k \approx \beta \gamma^{1/3}, \quad (21)$$

где для краткости введено обозначение $\beta = (R/(3d^2 \sqrt{3\pi\alpha}))$. Здесь коэффициент $\alpha = h/R$ отвечает за форму трещины и является, как правило, очень малым. Он тем больше, чем больше зияние трещины. Следовательно, в этом случае, согласно (14) и с учетом (21), относительная добавка к удельному электросопротивлению образца выражается соотношением

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{k}{1-k} = \frac{\beta \gamma^{1/3}}{1-\beta \gamma^{1/3}} \approx \beta \gamma^{1/3} (1 + \beta \gamma^{1/3}) \approx \beta \gamma^{1/3}. \quad (22)$$

Как видно из (22), в этом случае относительная добавка к удельному сопротивлению от толщины образца не зависит. Для построения графика зависимости (22) мы использовали для трещин следующие размеры: $h = 10^{-3}$ м, $R = 10^{-2}$ м, а толщину образца положили равной $d = 10^{-1}$ м. Тогда безразмерный коэффициент β имеет значение, равное 0.49. Поскольку в выражении (22) произведение $\beta \gamma \ll 1$ при всех реальных значениях коэффициента трещиноватости мало, зависимость относительного добавочного удельного сопротивления оказывается пропорциональной $\gamma^{1/3}$ (рис. 3, кривая I).

II. Пусть теперь $r_c \gg R > d$. Это справедливо в случае очень малой концентрации крупных трещин и очень тонкого образца. Выражение (18) в этом случае можно оценить следующим образом:

$$k \approx \frac{2R^3 d}{3\sqrt{3}r_c^3} \left(1 - \frac{R}{r_c} \right). \quad (23)$$

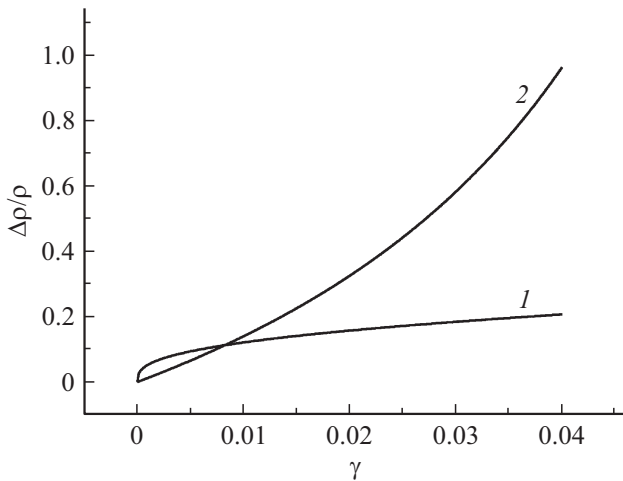


Рис. 3. Зависимости относительного добавочного удельного сопротивления образца от коэффициента трещиноватости: кривая 1 отвечает большим толщинам образца; кривая 2 отвечает предельному случаю малой толщины образца, сопоставимой со средним размером трещин R .

После введения безразмерного коэффициента трещиноватости получаем

$$k \approx \xi\gamma \left(1 - \frac{R}{r_c}\right) \approx \xi\gamma. \quad (24)$$

Тогда

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{k}{1-k} = \frac{\xi\gamma}{1-\xi\gamma} \approx \xi\gamma(1 + \xi\gamma). \quad (25)$$

Здесь введено обозначение

$$\xi = \frac{2(d/R)}{3\sqrt{3}\pi} = \frac{2\delta}{3\sqrt{3}\pi}. \quad (26)$$

Используя следующие значения: $R = 10^{-1}$ м, $d = 10^{-2}$ м, $h = 10^{-3}$ м, получаем $\xi = 12.26$. При малых толщинах образца и при очень малой концентрации крупных трещин относительная добавка к удельному электросопротивлению образца пропорциональна толщине образца и зависит от коэффициента трещиноватости линейным образом. Как видно из (25), при нарастании степени трещиноватости рост электросопротивления, обусловленный трещинами, приобретает нелинейный характер (рис. 3, кривая 2). Полученные нами здесь результаты формально аналогичны случаю сферических включений (пор). Однако в случае пор толщина пластины должна быть больше их радиуса, т.е. $d > R$. В случае же дискообразных включений (трещин) выражение (25) оказывается справедливым даже в случае, когда $R > d > h$. Чтобы наглядно отобразить, как ведет себя относительная добавка к удельному сопротивлению от степени трещиноватости, на рис. 3 на одном графике отобразены зависимости (22) и (25) для больших и малых толщин исследуемого образца.

Если рассмотреть ситуацию, когда дискообразные включения распределены по направлениям случайным образом, то выражение (18) следует умножить на $\cos^2 \theta$, где θ — полярный угол, и усреднить по телесному углу. Легко видеть, что это даст во всех выражениях для k дополнительный числовой множитель, равный $1/3$.

Заключение

На основании проведенных исследований можно заключить, что относительное добавочное удельное электросопротивление материала, обусловленное дискообразными включениями (трещинами), не всегда ведет себя линейным образом в зависимости от коэффициента трещиноватости, а именно:

а) при больших толщинах образца практически при всех разумных значениях коэффициента трещиноватости ($0.01 < \gamma < 0.04$) относительное добавочное удельное электросопротивление проводящего материала, обусловленное трещинами, растет значительно медленнее, чем указывалось ранее [8–10], а именно пропорционально $\gamma^{1/3}$.

б) при малых же толщинах образца добавочное относительное электросопротивление пропорционально толщине образца. Что же касается зависимости добавочного относительного электросопротивления от коэффициента трещиноватости, то она имеет линейный характер только при очень малых его значениях, однако уже при $\gamma > 0.01$ наблюдается ее резкий нелинейный рост.

Благодарности

Автор выражает благодарность проф. Э.П. Фельдману за плодотворные дискуссии.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] Дж. Гоудстейн, Д. Джой, Э. Лифшин, Д. Ньюбери, Ч. Фиори, П. Эчлин. *Растровая электронная микроскопия и рентгеновский микроанализ. Кн. 1.* (Мир, М., 1984)
- [2] В.С. Ямщиков, В.Л. Шкуратник, А.В. Бобров. *ФТПРПИ*, **4**, 110 (1985).
- [3] В.Л. Шкуратник, А.В. Лавров. *ПМТФ*, **37** (6), 165 (1996).
- [4] М.И. Швидлер. *Статистическая гидродинамика пористых сред* (Недра, М., 1985)
- [5] П.Е. Сизин, В.Л. Шкуратник. *Горный информационно-аналитический бюллетень*, **3**, 212 (2015).
- [6] Э.П. Фельдман, Я.И. Грановский, Н.А. Калугина, Е.А. Винник. *Физико-технические проблемы горного производства*, **13**, 39 (2010).
- [7] В.В. Ржевский, Г.Я. Новик. *Основы физики горных пород* (Недра, М., 1978)
- [8] Р.Л. Салганик. *ИФЖ*, **27** (6), 1069 (1974).

- [9] Р.Л. Салганик. *Об эффективных характеристиках материала с большим числом трещин. Возможность геофизического определения параметров трещиноватости пласта в связи с задачей обеспечения выбрособезопасности*. Препринт. 1980. № 154. М.: ИПМ АН СССР 25 с.
- [10] Л.И. Стефанович, Э.П. Фельдман, О.В. Чеснокова. Физико-технические проблемы горного производства, **21**, 43 (2019). DOI: 1037101/ftprg21/01/003
- [11] Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. *Теоретическая гидромеханика. Ч. I* (Физматгиз, М., 1963)