03

О теории плоской линзы из материала с отрицательным преломлением

© А.Б. Петрин

Объединенный институт высоких температур РАН,
125412 Москва, Россия

e-mail: a_petrin@mail.ru

Поступила в редакцию 19.09.2020 г.
В окончательной редакции 04.10.2020 г.
Принята к публикации 05.10.2020 г.

Рассмотрена строгая теория распространения электромагнитной волны от точечного элементарного источника тока при ее фокусировке плоским слоем, заполненным веществом с отрицательным показателем преломления (линзой Веселаго). Исследованы распределения электромагнитного поля в фокальной области и определены ее размеры. Подробно обсуждены ключевые вопросы теории.

Ключевые слова: нанофокусировка, поверхностные плазмоны, оптические сенсоры.

DOI: 10.21883/OS.2021.01.50440.240-20

Введение

В последнее десятилетие сохраняется интерес к электродинамике материалов, характеризующихся отрицательными показателями преломления [1]. Благодаря достижениям в нанотехнологии композитных материалов были созданы новые материалы, свойства которых могут быть объяснены наличием у них отрицательного показателя преломления [2,3]. В работе [4] был выдвинут тезис о том, что линзы Веселаго, представляющие собой слой из материала с отрицательным преломлением, позволяют в принципе преодолеть дифракционный предел оптических инструментов и получить сингулярность в фокальной точке. Этот тезис имеет много возражений [5], которые не являются абсолютно бесспорными [6]. Тем не менее выдвинутая в работе [4] концепция о суперлинзе (в виде слоя вещества с отрицательным преломлением), позволяющей в идеальном случае полностью преодолеть дифракционный предел, нашла множество сторонников [7–13]. Однако сама концепция подобной суперлинзы кажется абсолютно невероятной. Действительно, хорошо известно еще со времен Френеля, что размеры фокального пятна определяются только углом между крайними сходящимися лучами и длиной волны излучения в области фокусировки [14,§55], [15]. Размеры фокального пятна являются свойством сходящейся волны и не зависят от оптической системы, которая эту сходящуюся волну образовала. В случае суперлинзы сходящаяся волна находится вне слоя с отрицательным преломлением, и кажется разумным, что она должна фокусироваться в область обычных, конечных размеров порядка длины волны. Однако авторы упомянутых работ по суперлинзам настолько увлечены перспективами, что не обсуждают противоречие сингулярной фокусировки с хорошо установленными фундаментальными следствиями теории Максвелла.

Чтобы разобраться в деталях этой запутанной проблемы, в работе [16] в строгой формулировке была рассмотрена задача распространения электромагнитной (ЭМ) волны, излученной элементарным источником электрического тока, расположенным в воздухе (или вакууме), и направленным параллельно границе слоя. Кроме того, был рассмотрен частный случай источника рядом с полупространством, заполненным материалом с отрицательным показателем преломления [17]. Применялся строгий подход, восходящий к Зоммерфельду [18,19], при котором для лучшей сходимости интегралов вводилось малое поглощение в среде линзы. В последнее время произошло существенное развитие понимания методов теории распространения и возбуждения электромагнитных волн в слоистых средах в работах [20,21]. Теория работ [20,21] во многом перекликается с известными классическими работами о дипольном излучении в многослойной геометрии [22,23], отличаясь более подробным изложением вопросов правильного выбора аналитических ветвей многозначных функций, возникающих в задаче. В связи с этим возникла идея проверить результаты работы [16] и решить задачу фокусировки линзой Веселаго без поглощения, так как именно с поглощением в материале связывалось некоторыми исследователями неудача в достижении суперразрешения. Ниже теория работ [20,21] применяется для анализа фокусировки линзой Веселаго и подобными многопленочными устройствами в отсутствие поглощения в материале линзы и в окружающей ее среде.

Постановка задачи

Рассмотрим линзу Веселаго (рис. 1). Пусть диэлектрическая и магнитная проницаемости линзы (пластины с отрицательным преломлением) на рассматриваемой циклической частоте ω точно равны соответственно

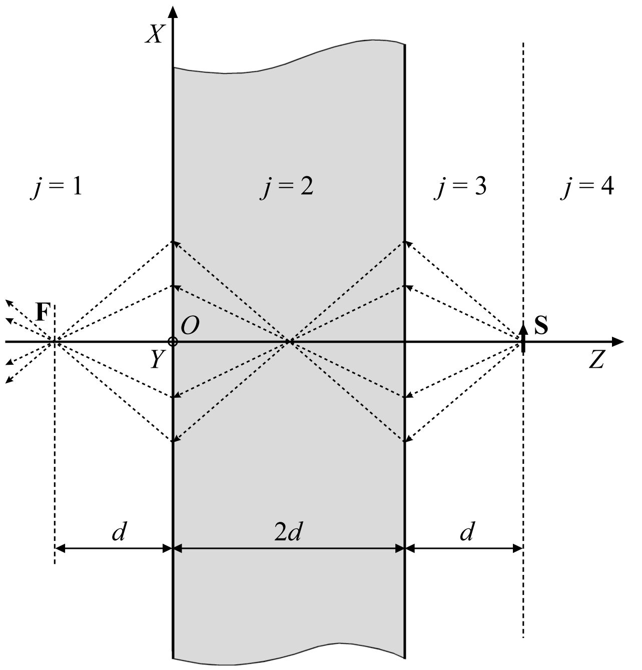

Рис. 1. Фокусировка плоским слоем материала с отрицательным преломлением волны от элементарного источника тока **S**. Для наглядности показано преломление волн в лучевом приближении. Показано разделение пространства на два слоя и два полупространства.

$\varepsilon_2 = (-1)\varepsilon_0$ и $\mu_2 = (-1)\mu_0$, где ε_0 и μ_0 — диэлектрическая и магнитные проницаемости вакуума. Пусть элементарный источник тока (диполь) **S** расположен на расстоянии d от линзы, причем d приравняем половине толщины линзы (рис. 1), чтобы в лучевом приближении поле, излученное источником, фокусировалось в симметричной точке фокуса **F**. Система координат показана на рисунке. Пусть элементарный источник тока **S** направлен по оси X и определяется плотностью стороннего тока

$$\mathbf{J}(x, y, z) = \mathbf{e}_x \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z - z_d),$$

где $z_d = 3d$, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Везде в данной работе предполагается комплексное представление $e^{-i\omega t}$.

Введем нумерацию однородных областей, на которые можно разбить задачу. Пусть левое полупространство с номером $j = 1$ имеет диэлектрическую и магнитную проницаемости вакуума $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, $\mu_1 = \mu_0$, слой $j = 2$ толщины $2d$ с отрицательным преломлением имеет постоянные $\varepsilon_2 = (-1)\varepsilon_0$ и $\mu_2 = (-1)\mu_0$, слой $j = 3$ толщиной d имеет проницаемости вакуума $\varepsilon_3 = \varepsilon_0$, $\mu_3 = \mu_0$ и, наконец, правое полупространство $j = 4$ имеет проницаемости вакуума $\varepsilon_4 = \varepsilon_0$, $\mu_4 = \mu_0$. Координаты границ слоев z_j по оси Z равны соответственно $z_1 = 0$, $z_2 = 2d$ и $z_3 = 3d$. Целью работы будет нахождение распределения электрического поля в окрестности фокуса **F**. Задача сформулирована так, что мы рассматриваем излучение элементарного источника тока, расположенного на границе плоскослоистой структуры, состоящей из двух пленок, и направленного параллельно границе структуры (слой вакуума, отделяющего диполь от линзы, и сам слой линзы). Такая формулировка позволяет практически без изменений применить методы работ [20,21] (источник на границе или внутри одной из пленок слоистой структуры) для нахождения фокального распределения. Имея в виду дальнейшее обобщение на более широкий класс задач, кратко опишем эти методы для общей задачи с любым конечным числом пленок, а затем вернемся к нашей частной задаче о линзе Веселаго.

Излучение элементарного излучателя, расположенного внутри произвольной плоскослоистой структуры

Пусть общее число пленок равно N_f, толщина m-й пленки равна d_m и полная толщина слоистой структуры равна $d_{\text{tot}} = \sum_{m=1}^{N_f} d_m$. Общее число границ между пленками обозначим как $N = N_f + 1$. Пронумеруем области пространства $j = 1, \ldots, (N + 1)$ (на рис. 2 показана для примера задача с тремя пленками, для которой $N = 4$, $N_f = 3$). Предположим, что пленки имеют абсолютные комплексные диэлектрические и магнитные проницаемости, равные ε_j и μ_j на рассматриваемой частоте ω, а перед слоистой структурой и за ней находятся однородные полупространства с проницаемостями ε_1, μ_1 и ε_{N+1}, μ_{N+1} (свободное пространство). Обозначим также через

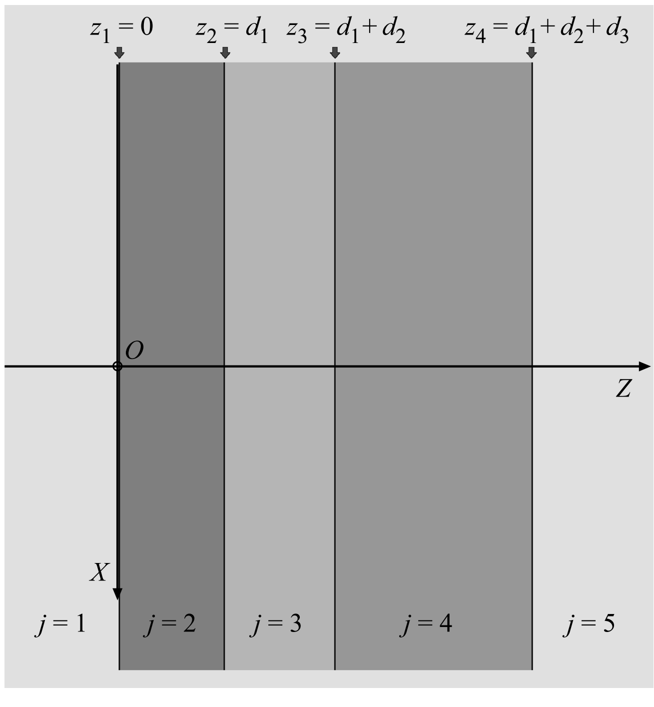

Рис. 2. Геометрия плоскослоистой структуры, состоящей из трех пленок.

z_j координаты N границ пленок по оси Z следующим образом:

$$z_1 = 0, \quad z_j = \sum_{m=1}^{j-1} d_m, \quad j = 2, \ldots, N.$$

Уравнения Максвелла для полей в области с номером j можно записать в следующем виде:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_j = i\omega \mathbf{B}_j, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}_j = \mu_j(-i\omega\varepsilon_j \mathbf{E}_j + \mathbf{J}_j), \tag{2}$$

где $\mathbf{E}_j$, $\mathbf{B}_j$ и $\mathbf{J}_j$ — векторы напряженности электрического поля, индукции магнитного поля и плотности стороннего (известного) тока в области с номером j (если источник тока отсутствует в области j, то $\mathbf{J}_j = 0$).

Решая уравнения Максвелла в каждой области с учетом граничных условий, найдем электромагнитное поле во всех областях. Рассмотрим сначала следующую вспомогательную задачу.

Распространение электромагнитной волны в слое, свободном от сторонних токов

Пусть в области с номером j нет сторонних токов между границами z_{j-1} и z_j (рис. 3). Диэлектрическая и магнитная проницаемости среды в этой пленке равны ε_j и μ_j соответственно. Из уравнений (1) и (2) получаем уравнение для напряженности электрического поля

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{E}_j - \omega^2\varepsilon_j\mu_j \mathbf{E}_j = 0 \tag{3}$$

и такое же уравнение для индукции $\mathbf{B}_j$. В рассматриваемой области $\operatorname{div} \mathbf{E}_j = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{B}_j = 0$, тогда, вводя оператор Лапласа $\Delta = \partial^2_{xx} + \partial^2_{yy} + \partial^2_{zz}$ и учитывая векторное тождество $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{F} - \Delta\mathbf{F}$, из (3) получим

$$\Delta \mathbf{E}_j + \omega^2\varepsilon_j\mu_j \mathbf{E}_j = 0 \tag{4}$$

и такое же уравнение для $\mathbf{B}_j$.

Подставим в полученные выше уравнения компоненты полей в виде фурье-разложений. Например, представление для x-компоненты напряженности электрического поля представим в виде

$$E_{j,x}(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_{j,x}(\xi, \eta, z) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi\, d\eta,$$

где фурье-образ определяется выражением

$$\tilde{E}_{j,x}(\xi, \eta, z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} E_{j,x}(x, y, z) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx\, dy.$$

Для остальных компонент будем использовать аналогичные представления и соответствующие символы. Переходя к фурье-образам, получаем из (4) три уравнения:

$$\frac{d^2 E_{j,x}}{dz^2} + \gamma_j^2 \tilde{E}_{j,x} = 0, \quad \frac{d^2 E_{j,y}}{dz^2} + \gamma_j^2 \tilde{E}_{j,y} = 0,$$

$$\frac{d^2 E_{j,z}}{dz^2} + \gamma_j^2 \tilde{E}_{j,z} = 0, \tag{5}$$

где $\gamma_j = \sqrt{k_j - \xi^2 - \eta^2}$, $k_j = \omega\sqrt{\mu_j\varepsilon_j}$.

Общие решения уравнений (5) для направлений распространения волн вдоль „+“ и против „–“ оси Z можно записать в виде

$$\mathbf{E}_j^{\pm}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \hat{E}^{\pm}_{j,x} \\ \hat{E}^{\pm}_{j,y} \\ \hat{E}^{\pm}_{j,z} \end{pmatrix} e^{\pm i\gamma_j z} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi\, d\eta$$

или, учитывая равенство $\operatorname{div} \mathbf{E}_j = 0$ и, следовательно, $\xi\hat{E}^{\pm}_{j,x} + \eta\hat{E}^{\pm}_{j,y} \pm \gamma_j\hat{E}^{\pm}_{j,z} = 0$, в виде

$$\mathbf{E}_j^{\pm}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \mp\xi/\gamma_j & \mp\eta/\gamma_j \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} \hat{E}^{\pm}_{j,x} \\ \hat{E}^{\pm}_{j,y} \end{pmatrix} e^{\pm i\gamma_j z} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi\, d\eta. \tag{6}$$

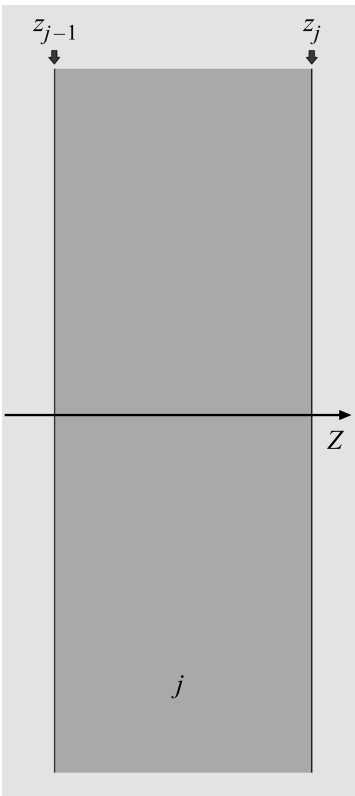

Рис. 3. Пленка с номером j, расположенная между границами z_{j-1} и z_j.

Поэтому общие решения уравнений (5) в области $[z_{j-1}, z_j]$ можно записать в виде

$$\mathbf{E}_j(x,y,z)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -\xi/\gamma_j & -\eta/\gamma_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{E}^+_{j,x}\\ \hat{E}^+_{j,y}\end{pmatrix}$$
$$\times e^{i\gamma_j(z-z_{j-1})}e^{i(\xi x+\eta y)}d\xi\, d\eta$$
$$+\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \xi/\gamma_j & \eta/\gamma_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{E}^-_{j,x}\\ \hat{E}^-_{j,y}\end{pmatrix}$$
$$\times e^{-i\gamma_j(z-z_j)}e^{i(\xi x+\eta y)}d\xi\, d\eta. \qquad (7)$$

Обратим внимание на отличие в форме записи (6) и (7). Формально эти уравнения переходят одно в другое, они описывают волны, распространяющиеся в противоположных направлениях по оси Z. Однако формулы содержат функции $\gamma_j=\sqrt{k_j^2-\xi^2-\eta^2}$. Для однозначного определения вида записи решений необходимо однозначно выбрать аналитическую ветвь функции комплексного переменного $\gamma_j(\lambda)$, где $\lambda^2=\xi^2+\eta^2$.

Как правило, для обычных сред без поглощения используют [24] ветвь

$$\gamma_j(\lambda)=\begin{cases}\sqrt{k_j^2-\lambda^2}, & \lambda^2\le k_j^2,\\ i\sqrt{\lambda^2-k_j^2}, & \lambda^2\ge k_j^2.\end{cases} \qquad (8)$$

Если взять вместо (8) другую аналитическую ветвь с отрицательной мнимой зависимостью, то волны с большими λ будут экспоненциально возрастать с ростом z при удалении от источников полей. Это противоречит принципу причинности, так как произойдет переход от запаздывающих к опережающим решениям уравнений Максвелла.

Более строго, в случае поглощающей среды существуют две точки ветвления функции $\gamma_j(\lambda)$: точка $k_{j,1}=\omega\sqrt{|\varepsilon_j||\mu_j|}\exp(i(\arg(\varepsilon_j)+\arg(\mu_j))/2)$ и точка $k_{j,2}=e^{i\pi}k_{j,1}$. Аналитическую ветвь функции $\gamma_j(\lambda)$, пригодную, в том числе, для описания материалов с отрицательным преломлением [16] и переходящую в (8) для обычной непоглощающей среды, можно определить как

$$\gamma_j(\lambda)=\sqrt{|k_{j,1}-\lambda|}\exp\left(\frac{i\arg(k_{j,1}-\lambda)}{2}\right)$$
$$\times\sqrt{|k_{j,2}-\lambda|}\exp\left(\frac{i\arg(\lambda-k_{j,2})}{2}\right), \qquad (9)$$

где функции $|\xi|$ и $\arg(\xi)$ есть модуль и аргумент комплексной переменной ξ.

Здесь особо хотелось бы подчеркнуть, что аналитическая ветвь (9) функции $\gamma_j(\lambda)$ переходит для обычных материалов в пределе нулевого поглощения в аналитическую ветвь (8). Переход к отрицательно преломляющим материалам можно представить себе происходящим бесконечно малыми изменениями диэлектрической и магнитной проницаемостей, при которых решение будет выражаться через ту же аналитическую ветвь (9). Можно назвать это принципом соответствия между положительно и отрицательно преломляющими материалами.

В представлении полей (7) при любых z и правильном выборе аналитической ветви (9) будет обеспечена сходимость интегралов. При этом не будут возникать нефизические гармоники, экспоненциально усиливающиеся при больших значениях ξ и η.

Из уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{E}_j=i\omega\mathbf{B}_j$, учитывая равенство $\hat{E}^{\pm}_{j,z}=\mp\xi\hat{E}^{\pm}_{j,x}/\gamma_j\mp\eta\hat{E}^{\pm}_{j,y}/\gamma_j$ (из $\operatorname{div}\mathbf{E}=0$), общее решение для магнитного поля в рассматриваемой области с номером j (в пленке с номером $j-1$) можно записать в виде

$$\mathbf{B}_j(x,y,z)=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\begin{pmatrix}-\xi\eta/\omega\gamma_j & -(\gamma_j^2+\eta^2)/\omega\gamma_j\\ (\gamma_j^2+\xi^2)/\omega\gamma_j & \xi\eta/\omega\gamma_j\\ -\eta/\omega & \xi/\omega\end{pmatrix}$$
$$\times\begin{pmatrix}\hat{E}^+_{j,x}\\ \hat{E}^+_{j,y}\end{pmatrix}e^{i\gamma_j(z-z_{j-1})}e^{i(\xi x+\eta y)}d\xi\, d\eta$$
$$+\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\begin{pmatrix}\xi\eta/\omega\gamma_j & (\gamma_j^2+\eta^2)/\omega\gamma_j\\ -(\gamma_j^2+\xi^2)/\omega\gamma_j & -\xi\eta/\omega\gamma_j\\ -\eta/\omega & \xi/\omega\end{pmatrix}$$
$$\times\begin{pmatrix}\hat{E}^-_{j,x}\\ \hat{E}^-_{j,y}\end{pmatrix}e^{-i\gamma_j(z-z_j)}e^{i(\xi x+\eta y)}d\xi\, d\eta. \qquad (10)$$

Вводя вектор-столбец $\hat{\mathfrak{E}}_j=(\hat{E}^+_{j,x};\hat{E}^+_{j,y};\hat{E}^-_{j,x};\hat{E}^-_{j,y})^T$, из (7) и (10) выразим тангенциальные составляющие фурье-образов полей на границах области j в следующем матричном виде:

$$\left.\begin{pmatrix}\tilde{E}_{j,x}\\ \tilde{E}_{j,y}\\ \tilde{B}_{j,x}/\mu_j\\ \tilde{B}_{j,y}/\mu_j\end{pmatrix}\right|_{z=z_{j-1}}=\begin{pmatrix}\mathbf{I} & e^{i\gamma_j d_{j-1}}\mathbf{I}\\ \mathbf{G}_j & -e^{i\gamma_j d_{j-1}}\mathbf{G}_j\end{pmatrix}\hat{\mathfrak{E}}_j, \qquad (11)$$

$$\left.\begin{pmatrix}\tilde{E}_{j,x}\\ \tilde{E}_{j,y}\\ \tilde{B}_{j,x}/\mu_j\\ \tilde{B}_{j,y}/\mu_j\end{pmatrix}\right|_{z=z_j}=\begin{pmatrix}e^{i\gamma_j d_{j-1}}\mathbf{I} & \mathbf{I}\\ e^{i\gamma_j d_{j-1}}\mathbf{G}_j & -\mathbf{G}_j\end{pmatrix}\hat{\mathfrak{E}}_j, \qquad (12)$$

где $d_{j-1} = z_j - z_{j-1}$, $\mathbf{I}$ — единичная матрица 2×2, а матрица $\mathbf{G}_j$ представима в виде

$$\mathbf{G}_j = \begin{pmatrix} -\dfrac{\xi\eta}{\omega\mu_j\gamma_j} & -\dfrac{\gamma_j^2+\eta^2}{\omega\mu_j\gamma_j} \\ \dfrac{\gamma_j^2+\xi^2}{\omega\mu_j\gamma_j} & \dfrac{\xi\eta}{\omega\mu_j\gamma_j} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Распространение электромагнитной волны в многослойной структуре, свободной от сторонних токов

Рассмотрим теперь многослойную структуру, внутри которой нет сторонних токов. Рассмотрим границу $z = z_j$ между областями с номерами j и $j+1$. Условия непрерывности тангенциальных компонент напряженностей электрического поля и индукции магнитного поля на этой границе могут быть записаны в виде

$$E_{j,x}(x, y, z) - E_{j+1,x}(x, y, z) = 0,$$

$$E_{j,y}(x, y, z_j) - E_{j+1,y}(x, y, z_j) = 0,$$

$$B_{j,x}(x, y, z_j)/\mu_j - B_{j+1,x}(x, y, z_j)/\mu_{j+1} = 0,$$

$$B_{j,y}(x, y, z_j)/\mu_j - B_{j+1,y}(x, y, z_j)/\mu_{j+1} = 0,$$

где электрические и магнитные поля в области $j+1$ выражаются формулами (7) и (10), в которых произведена замена индексов $j \to j+1$. Так как уравнения Максвелла — линейные уравнения, то граничные условия должны выполняться для каждого члена фурье-разложения, из которых с помощью (11) и (12) получим матричное уравнение на границе $z = z_j$

$$\begin{pmatrix} e^{i\gamma_j d_{j-1}}\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_j d_{j-1}}\mathbf{G}_j & -\mathbf{G}_j \end{pmatrix} \hat{\mathfrak{E}}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_{j+1}d_j}\mathbf{I} \\ \mathbf{G}_{j+1} & -e^{i\gamma_{j+1}d_j}\mathbf{G}_{j+1} \end{pmatrix} \hat{\mathfrak{E}}_{j+1}, \tag{14}$$

где $d_{j-1} = z_j - z_{j-1}$, $d_j = z_{j+1} - z_j$.

Уравнение (14) можно записать для $j = 2, \ldots$ $\ldots, (N-1)$, где $(N+1)$ — общее число областей, N — число границ, т.е. для всех границ, исключая первую $(j = 1)$ и последнюю $(j = N)$ границы. То есть исключая границу $z_1 = 0$ и $z_N = d_{\text{tot}} = \sum\limits_{m=1}^{N-1} d_m$, где d_{tot} — общая толщина слоистой структуры (сумма толщин пленок, составляющих рассматриваемую структуру).

Общее решение для электрического и магнитного полей в области $j = 1$, т.е. в интервале $(-\infty, z]$, где $z_1 = 0$, запишем в виде

$$\mathbf{E}_1(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\xi/\gamma_1 & -\eta/\gamma_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{E}^+_{1,x} \\ \hat{E}^+_{1,y} \end{pmatrix} e^{i\gamma_1 z} e^{i(\xi x+\eta y)} d\xi\, d\eta$$
$$+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \xi/\gamma_1 & \eta/\gamma_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{E}^-_{1,x} \\ \hat{E}^-_{1,y} \end{pmatrix} e^{-i\gamma_1 z} e^{i(\xi x+\eta y)} d\xi\, d\eta, \tag{15}$$

$$\mathbf{B}_1(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} -\xi\eta/\omega\gamma_1 & -(\gamma_1^2+\eta^2)/\omega\gamma_1 \\ (\gamma_1^2+\xi^2)/\omega\gamma_1 & \xi\eta/\omega\gamma_1 \\ -\eta/\omega & \xi/\omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{E}^+_{1,x} \\ \hat{E}^+_{1,y} \end{pmatrix} e^{i\gamma_1 z} e^{i(\xi x+\eta y)} d\xi\, d\eta$$
$$+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \xi\eta/\omega\gamma_1 & (\gamma_1^2+\eta^2)/\omega\gamma_1 \\ -(\gamma_1^2+\xi^2)/\omega\gamma_1 & -\xi\eta/\omega\gamma_1 \\ -\eta/\omega & \xi/\omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{E}^-_{1,x} \\ \hat{E}^-_{1,y} \end{pmatrix} e^{-i\gamma_1 z} e^{i(\xi x+\eta y)} d\xi\, d\eta. \tag{16}$$

Тогда граничные условия на границе $z_1 = 0$ можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_1 & -\mathbf{G}_1 \end{pmatrix} \hat{\mathfrak{E}}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_2 d_1}\mathbf{I} \\ \mathbf{G}_2 & -e^{i\gamma_2 d_1}\mathbf{G}_2 \end{pmatrix} \hat{\mathfrak{E}}_2. \tag{17}$$

Аналогично общее решение для электрического и магнитного полей в области $j = N+1$, т.е. в интервале

$[z_N, +\infty)$, запишем в виде

$$\mathbf{E}_{N+1}(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\xi/\gamma_{N+1} & -\eta/\gamma_{N+1}\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix}\hat{E}^{+}_{N+1,x} \\ \hat{E}^{+}_{N+1,y}\end{pmatrix} e^{i\gamma_{N+1}(z-z_N)} e^{i(\xi x+\eta y)} d\xi\, d\eta$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \xi/\gamma_{N+1} & \eta/\gamma_{N+1}\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix}\hat{E}^{-}_{N+1,x} \\ \hat{E}^{-}_{N+1,y}\end{pmatrix} e^{-i\gamma_{N+1}(z-z_N)} e^{i(\xi x+\eta y)} d\xi\, d\eta, \tag{18}$$

$$\mathbf{B}_{N+1}(x,y,z) =$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\begin{pmatrix} -\xi\eta/\omega\gamma_{N+1} & -(\gamma^2_{N+1}+\eta^2)/\omega\gamma_{N+1} \\ (\gamma^2_{N+1}+\xi^2)/\omega\gamma_{N+1} & \xi\eta/\omega\gamma_{N+1} \\ -\eta/\omega & \xi/\omega\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix}\hat{E}^{+}_{N+1,x} \\ \hat{E}^{+}_{N+1,y}\end{pmatrix} e^{i\gamma_{N+1}(z-z_N)} e^{i(\xi x+\eta y)} d\xi\, d\eta$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\begin{pmatrix} \xi\eta/\omega\gamma_{N+1} & (\gamma^2_{N+1}+\eta^2)/\omega\gamma_{N+1} \\ -(\gamma^2_{N+1}+\xi^2)/\omega\gamma_{N+1} & -\xi\eta/\omega\gamma_{N+1} \\ -\eta/\omega & \xi/\omega\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix}\hat{E}^{-}_{N+1,x} \\ \hat{E}^{-}_{N+1,y}\end{pmatrix} e^{-i\gamma_{N+1}(z-z_N)} e^{i(\xi x+\eta y)} d\xi\, d\eta. \tag{19}$$

Тогда граничные условия на границе z_N можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} e^{i\gamma_N d_{N-1}}\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_N d_{N-1}}\mathbf{G}_N & -\mathbf{G}_N\end{pmatrix}\hat{\mathfrak{E}}_N = \begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_{N+1} & -\mathbf{G}_{N+1}\end{pmatrix}\hat{\mathfrak{E}}_{N+1}. \tag{20}$$

Граничные условия (14), (17) и (20) позволяют связать векторы-столбцы напряженности электрического поля в первой и последней областях задачи (т.е. в полупространствах вне плоскослоистой структуры):

$$\hat{\mathfrak{E}}_1 = \begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_1 & -\mathbf{G}_1\end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix}\mathbf{I} & e^{i\gamma_2 d_1}\mathbf{I} \\ \mathbf{G}_2 & -e^{i\gamma_2 d_1}\mathbf{G}_2\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} e^{i\gamma_2 d_1}\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_2 d_1}\mathbf{G}_2 & -\mathbf{G}_2\end{pmatrix}^{-1}\times\ldots\times\begin{pmatrix}\mathbf{I} & e^{i\gamma_N d_{N-1}}\mathbf{I} \\ \mathbf{G}_N & -e^{i\gamma_N d_{N-1}}\mathbf{G}_N\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} e^{i\gamma_N d_{N-1}}\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_N d_{N-1}}\mathbf{G}_N & -\mathbf{G}_N\end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_{N+1} & -\mathbf{G}_{N+1}\end{pmatrix}\hat{\mathfrak{E}}_{N+1}.$$

Или

$$\hat{\mathfrak{E}}_1 = \mathbf{M}\times\hat{\mathfrak{E}}_{N+1}. \tag{21}$$

Матрица $\mathbf{M}$ имеет вид $\mathbf{M} = \mathbf{T}_1\times\left(\prod_{m=2}^{N}\mathbf{T}_m\right)\times\mathbf{T}_{N+1}$, где

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_1 & -\mathbf{G}_1\end{pmatrix}^{-1},$$

$$\mathbf{T}_m = \begin{pmatrix}\mathbf{I} & e^{i\gamma_m d_{m-1}}\mathbf{I} \\ \mathbf{G}_m & -e^{i\gamma_m d_{m-1}}\mathbf{G}_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\gamma_m d_{m-1}}\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_m d_{m-1}}\mathbf{G}_m & -\mathbf{G}_m\end{pmatrix}^{-1},$$

$$\mathbf{T}_{N+1} = \begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_{N+1} & -\mathbf{G}_{N+1}\end{pmatrix}.$$

Если нам известна, например, падающая на плоскослоистую структуру волна, а значит, известны компоненты $\hat{E}^{+}_{1,x}$ и $\hat{E}^{+}_{1,y}$ вектора-столбца $\hat{\mathfrak{E}}_{1,y}$, то из уравнения (21) можно найти компоненты $\hat{E}^{-}_{1,x}$ и $\hat{E}^{-}_{1,y}$ и отраженную волну по формулам (15), (16), а также компоненты $\hat{E}^{+}_{N+1,x}$ и $\hat{E}^{+}_{N+1,y}$ вектора-столбца $\hat{\mathfrak{E}}_{N+1}$ и прошедшую волну по формулам (18), (19). Подробности решения подобных задач, в которых рассматриваются пространственно ограниченные падающие на плоскослоистую структуру пучки, можно найти, например, в работах [25–27].

Распространение электромагнитной волны в многослойной структуре от элементарного источника тока

Пусть имеется точечный излучатель, расположенный в точке $(0, 0, z_d)$ в области с номером s (рис. 4). Пусть этот излучатель определяется плотностью стороннего тока

$$\mathbf{J}(x,y,z) = (n_x\mathbf{e}_x + n_y\mathbf{e}_y + n_z\mathbf{e}_z)\delta(x)\delta(y)\delta(z-z_d),$$

где n_x, n_y, n_z — направляющие косинусы вектора тока вдоль осей координат, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Тогда фурье-образы составляющих этого тока определятся следующими выражениями:

$$\tilde{J}_{s,x}(\xi,\eta,z) = n_x\delta(z-z_d),\quad \tilde{J}_{s,y}(\xi,\eta,z) = n_y\delta(z-z_d),$$

$$\tilde{J}(\xi,\eta,z) = n_z\delta(z-z_d).$$

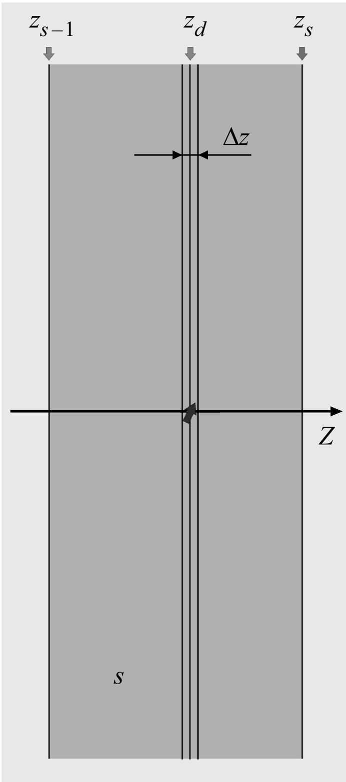

Рис. 4. Точечный излучатель, расположенный в точке $(0, 0, z_d)$ в области с номером s.

Пусть этот элементарный источник тока находится в бесконечно тонком слое $(z_d - \Delta z/2, z_d + \Delta z/2)$. Тогда уравнения Максвелла (1) и (2) для фурье-образов полей при $\Delta z \to 0$ можно записать в виде

$$\begin{cases} i\eta \tilde{E}_{s,z} - \frac{\Delta \tilde{E}_{s,y}}{\Delta z} = i\omega \tilde{B}_{s,x}, \\ \frac{\Delta \tilde{E}_{s,x}}{\Delta z} - i\xi \tilde{E}_{s,z} = i\omega \tilde{B}_{s,y}, \\ i\xi \tilde{E}_{s,y} - i\eta \tilde{E}_{s,x} = i\omega \tilde{B}_{s,z}. \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} i\eta \tilde{B}_{s,z} - \frac{\Delta B_{j,y}}{\Delta z} = \mu_s(-i\omega\varepsilon_s \tilde{E}_{s,x} + n_x \delta(z - z_d)), \\ \frac{\Delta \tilde{B}_{s,x}}{\Delta z} - i\xi \tilde{B}_{s,z} = \mu_s(-i\omega\varepsilon_s \tilde{E}_{s,y} + n_y \delta(z - z_d)), \\ i\xi \tilde{B}_{s,y} - i\eta \tilde{B}_{s,x} = \mu_s(-i\omega\varepsilon_s \tilde{E}_{s,z} + n_z \delta(z - z_d)). \end{cases} \tag{23}$$

Так как z-компоненты величин из уравнений (22) и (23) можно выразить через x- и y-компоненты по формулам

$$\tilde{B}_{s,z} = \frac{\xi}{\omega} \tilde{E}_{s,y} - \frac{\eta}{\omega} \tilde{E}_{s,x},$$

$$\tilde{E}_{s,z} = -\frac{\xi}{\omega\varepsilon_s\mu_s} \tilde{B}_{s,y} + \frac{\eta}{\omega\varepsilon_s\mu_s} \tilde{B}_{s,x} + \frac{1}{i\omega\varepsilon_s} \tilde{J}_{s,z},$$

то для x- и y-компонент напряженности электрического поля и индукции магнитного поля получим

$$\begin{cases} \Delta \tilde{E}_{s,x} = \left(\frac{i\xi\eta}{\omega\varepsilon_s\mu_s} \tilde{B}_{s,x} + i\left(\omega - \frac{\xi^2}{\omega\varepsilon_s\mu_s}\right)\tilde{B}_{s,y} \right. \\ \qquad \left. + \frac{\xi}{\omega\varepsilon_s} n_z \delta(z - z_d)\right)\Delta z, \\ \Delta \tilde{E}_{s,y} = \left(i\left(\frac{\eta^2}{\omega\varepsilon_s\mu_s} - \omega\right)\tilde{B}_{s,x} - \frac{i\xi\eta}{\omega\varepsilon_s\mu_s} \tilde{B}_{s,y} \right. \\ \qquad \left. + \frac{\eta}{\omega\varepsilon_s} n_z \delta(z - z_d)\right)\Delta z, \\ \frac{\Delta \tilde{B}_{s,x}}{\mu_s} = \left(-\frac{i\xi\eta}{\omega\mu_s} \tilde{E}_{s,x} + i\left(\frac{\xi^2}{\omega\mu_s} - \omega\varepsilon_s\right)\tilde{E}_{s,y} \right. \\ \qquad \left. + n_y \delta(z - z_d)\right)\Delta z, \\ \frac{\Delta \tilde{B}_{s,y}}{\mu_s} = \left(i\left(\omega\varepsilon_s - \frac{\eta^2}{\omega\mu_s}\right)\tilde{E}_{s,x} + \frac{i\xi\eta}{\omega\mu_s} \tilde{E}_{s,y} \right. \\ \qquad \left. - n_x \delta(z - z_d)\right)\Delta z. \end{cases}$$

Тогда в пределе $\Delta z \to 0$ скачок тангенциальных компонент напряженности и индукции при переходе через бесконечно тонкий слой с током равен

$$\left.\begin{pmatrix} \tilde{E}_{s,x} \\ \tilde{E}_{s,y} \\ \tilde{B}_{s,x}/\mu_s \\ \tilde{B}_{s,y}/\mu_s \end{pmatrix}\right|_{z=z_d+0} - \left.\begin{pmatrix} \tilde{E}_{s,x} \\ \tilde{E}_{s,y} \\ \tilde{B}_{s,x}/\mu_s \\ \tilde{B}_{s,y}/\mu_s \end{pmatrix}\right|_{z=z_d-0} = \begin{pmatrix} n_z\xi/\omega\varepsilon_s \\ n_z\eta/\omega\varepsilon_s \\ n_y \\ -n_x \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Особо отметим, что скачок напряженности электрического поля при переходе через рассматриваемый бесконечно тонкий слой ($\Delta z \to 0$), вообще говоря, зависит от диэлектрической проницаемости ε_s среды, в которой расположен рассматриваемый источник тока. Но излучение источников, у которых есть только составляющие тока вдоль границы, не зависит в явном виде от диэлектрических свойств среды, в которой они расположены.

Выразим теперь левую часть граничного условия (24) через векторы-столбцы $\hat{\mathfrak{E}}_1$ и $\hat{\mathfrak{E}}_{N+1}$ полупространств вне плоскослоистой структуры. Для этого разобьем область с номером s на две области и обозначим их индексами l и r (левая и правая, если смотреть на рис. 4). Введем векторы-столбцы $\hat{\mathfrak{E}}_l$ и $\hat{\mathfrak{E}}_r$ в этих областях. Тогда (24), учитывая (11) и (12), можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_s(z_s - z_d)}\mathbf{I} \\ \mathbf{G}_s & -e^{i\gamma_s(z_s - z_d)}\mathbf{G}_s \end{pmatrix} \hat{\mathfrak{E}}_r - \begin{pmatrix} e^{i\gamma_s(z_d - z_{s-1})}\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_s(z_d - z_{s-1})}\mathbf{G}_s & -\mathbf{G}_s \end{pmatrix} \hat{\mathfrak{E}}_l = \mathbf{V}, \tag{25}$$

где $\mathbf{V} = (n_z\xi/\omega\varepsilon_0; n_z\eta/\omega\varepsilon_s; n_y; -n_x)^T$. Кроме того, из (21) следует, что

$$\hat{\mathfrak{E}}_1 = \mathbf{Q}_L \hat{\mathfrak{E}}_l, \tag{26}$$

где

$$\mathbf{Q}_L = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_1 & -\mathbf{G}_1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\times \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_2 d_1}\mathbf{I} \\ \mathbf{G}_2 & -e^{i\gamma_2 d_1}\mathbf{G}_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{i\gamma_2 d_1}\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_d d_1}\mathbf{G}_2 & -\mathbf{G}_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\times \ldots \times \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_{s-1} d_{s-2}}\mathbf{I} \\ \mathbf{G}_{s-1} & -e^{i\gamma_{s-1} d_{s-2}}\mathbf{G}_{s-1} \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} e^{i\gamma_{s-1} d_{s-2}}\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_{s-1} d_{s-2}}\mathbf{G}_{s-1} & -\mathbf{G}_{s-1} \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_s (z_d - z_{s-1})}\mathbf{I} \\ \mathbf{G}_s & -e^{i\gamma_s (z_d - z_{s-1})}\mathbf{G}_s \end{pmatrix},$$

а также

$$\hat{\mathfrak{E}}_r = \mathbf{Q}_R \hat{\mathfrak{E}}_{N+1}, \tag{27}$$

где

$$\mathbf{Q}_R = \begin{pmatrix} e^{i\gamma_s (z_s - z_d)}\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_s (z_s - z_d)}\mathbf{G}_s & -\mathbf{G}_s \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_{s+1} d_s}\mathbf{I} \\ \mathbf{G}_{s+1} & -e^{i\gamma_{s+1} d_s}\mathbf{G}_{s+1} \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} e^{i\gamma_{s+1} d_s}\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_{s+1} d_s}\mathbf{G}_{s+1} & -\mathbf{G}_{s+1} \end{pmatrix}^{-1} \times \ldots \times \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_N d_{N-1}}\mathbf{I} \\ \mathbf{G}_N & -e^{i\gamma_N d_{N-1}}\mathbf{G}_N \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} e^{i\gamma_N d_{N-1}}\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_N d_{N-1}}\mathbf{G}_N & -\mathbf{G}_N \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{G}_{N+1} & -\mathbf{G}_{N+1} \end{pmatrix}.$$

Подставляя (26), (27) в (25) и затем полученные выражения в (24), получаем

$$\mathbf{H}_R \times \hat{\mathfrak{E}}_{N+1} = \mathbf{H}_L \times \hat{\mathfrak{E}}_1 + \mathbf{V}, \tag{28}$$

где $\mathbf{V}$ — вектор-столбец, характеризующий возбуждающее воздействие стороннего элементарного тока на систему, а матрицы $\mathbf{H}_R$ и $\mathbf{H}_L$ характеризуют отклик на внешнее возбуждение слоистой структуры справа и слева от излучателя и выражаются следующим образом:

$$\mathbf{H}_R = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_s (z_s - z_d)}\mathbf{I} \\ \mathbf{G}_s & -e^{i\gamma_s (z_s - z_d)}\mathbf{G}_s \end{pmatrix} \mathbf{Q}_R$$

$$= \mathbf{T}_R \times \left(\prod_{m=s+1}^{N} \mathbf{T}_m \right) \times \mathbf{T}_{N+1},$$

$$\mathbf{H}_L = \begin{pmatrix} e^{i\gamma_s (z_d - z_{s-1})}\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_s (z_d - z_{s-1})}\mathbf{G}_s & -\mathbf{G}_s \end{pmatrix} (\mathbf{Q}_L)^{-1}$$

$$= \left(\mathbf{T}_1 \times \left(\prod_{m=2}^{s-1} \mathbf{T}_m \right) \times \mathbf{T}_L \right)^{-1},$$

где матрицы $\mathbf{T}_m$ при $m \neq s$ выражаются формулой

$$\mathbf{T}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_m d_{m-1}}\mathbf{I} \\ \mathbf{G}_m & -e^{i\gamma_m d_{m-1}}\mathbf{G}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\gamma_m d_{m-1}}\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_m d_{m-1}}\mathbf{G}_m & -\mathbf{G}_m \end{pmatrix}^{-1},$$

а матрицы $\mathbf{T}_L$ и $\mathbf{T}_R$ — формулами

$$\mathbf{T}_L = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_s (z_d - z_{s-1})}\mathbf{I} \\ \mathbf{G}_s & -e^{i\gamma_s (z_d - z_{s-1})}\mathbf{G}_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\gamma_s (z_d - z_{s-1})}\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_s (z_d - z_{s-1})}\mathbf{G}_s & -\mathbf{G}_s \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\mathbf{T}_R = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & e^{i\gamma_s (z_s - z_d)}\mathbf{I} \\ \mathbf{G}_s & -e^{i\gamma_s (z_s - z_d)}\mathbf{G}_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\gamma_s (z_s - z_d)}\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ e^{i\gamma_s (z_s - z_d)}\mathbf{G}_s & -\mathbf{G}_s \end{pmatrix}^{-1}.$$

В вышеприведенных формулах матрицы $\mathbf{G}_s$ выражаются по формулам (13).

В рассматриваемой задаче источники полей находятся внутри плоскослоистой структуры. Поэтому в столбцах $\hat{\mathfrak{E}}_1$ и $\hat{\mathfrak{E}}_{N+1}$, есть только компоненты волн, идущие от плоскослоистой структуры. Поэтому эти столбцы имеют вид

$$\hat{\mathfrak{E}}_1 = (0; 0; \hat{E}^-_{1,x}; \hat{E}^-_{1,y})^T, \quad \hat{\mathfrak{E}}_{N+1} = (\hat{E}^+_{N+1,x}; \hat{E}^+_{N+1,y}; 0; 0)^T.$$

Чтобы получить оставшиеся отличные от нуля компоненты $\hat{\mathfrak{E}}_1$ и $\hat{\mathfrak{E}}_{N+1}$ разобьем матрицы $\mathbf{H}_R$ и $\mathbf{H}_L$ каждую на четыре подматрицы 2×2 следующим образом:

$$\mathbf{H}_R = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{RA} & \mathbf{H}_{RB} \\ \mathbf{H}_{RC} & \mathbf{H}_{RD} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_L = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{LA} & \mathbf{H}_{LB} \\ \mathbf{H}_{LC} & \mathbf{H}_{LD} \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (28) примет вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_{RA} & \mathbf{H}_{RB} \\ \mathbf{H}_{RC} & \mathbf{H}_{RD} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{E}^+_{N+1,x} \\ \hat{E}^+_{N+1,y} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{LA} & \mathbf{H}_{LB} \\ \mathbf{H}_{LC} & \mathbf{H}_{LD} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{E}^-_{1,x} \\ \hat{E}^-_{1,y} \end{pmatrix} + \mathbf{V}. \tag{29}$$

Если еще разбить вектор $\mathbf{V} = (V_1; V_2; V_3; V_4)^T$ на $\mathbf{V}_A = (V_1, V_2)^T$ и $\mathbf{V}_B = (V_3, V_4)^T$, то уравнение (29) можно представить следующей системой из двух матричных уравнений:

$$\mathbf{H}_{RA} \begin{pmatrix} \hat{E}^+_{N+1,x} \\ \hat{E}^+_{N+1,y} \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{LB} \begin{pmatrix} \hat{E}^-_{1,x} \\ \hat{E}^-_{1,y} \end{pmatrix} + \mathbf{V}_A,$$

$$\mathbf{H}_{RC} \begin{pmatrix} \hat{E}^+_{N+1,x} \\ \hat{E}^+_{N+1,y} \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{LD} \begin{pmatrix} \hat{E}^-_{1,x} \\ \hat{E}^-_{1,y} \end{pmatrix} + \mathbf{V}_B.$$

Полученные уравнения можно снова объединить в одно матричное уравнение 4×4:

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{H}_{LB} & \mathbf{H}_{RA} \\ -\mathbf{H}_{LD} & \mathbf{H}_{RC} \end{pmatrix} \hat{\mathfrak{E}}_{\text{out}} = \mathbf{V}, \tag{30}$$

где введен вектор-столбец $\hat{\mathfrak{E}}_{\text{out}} = (\hat{E}^-_{1,x}; \hat{E}^-_{1,y}; \hat{E}^+_{N+1,x}; \hat{E}^+_{N+1,y})^T$.

Решая это уравнение, найдем $\hat{E}^-_{1,x}$, $\hat{E}^-_{1,y}$ и $\hat{E}^+_{N+1,x}$, $\hat{E}^+_{N+1,y}$, а значит, волну, уходящую из плоскослоистой структуры влево (в направлении $z \to +\infty$), по формулам

$$\mathbf{E}_1(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \xi/\gamma_1 & \eta/\gamma_1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\hat{E}^-_{1,x}\\ \hat{E}^-_{1,y}\end{pmatrix} e^{-i\gamma_1 z} e^{i(\xi x+\eta y)} d\xi\, d\eta, \tag{31}$$

$$\mathbf{B}_1(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\begin{pmatrix}\xi\eta/\omega\gamma_1 & (\gamma_1^2+\eta^2)/\omega\gamma_1\\ -(\gamma_1^2+\xi^2)/\omega\gamma_1 & -\xi\eta/\omega\gamma_1\\ -\eta/\omega & \xi/\omega\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\hat{E}^-_{1,x}\\ \hat{E}^-_{1,y}\end{pmatrix} e^{-i\gamma_1 z} e^{i(\xi x+\eta y)} d\xi\, d\eta \tag{32}$$

и волну, уходящую вправо от плоскослоистой структуры (в направлении $z \to +\infty$), по формулам

$$\mathbf{E}_{N+1}(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -\xi/\gamma_{N+1} & -\eta/\gamma_{N+1}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\hat{E}^+_{N+1,x}\\ \hat{E}^+_{N+1,y}\end{pmatrix} e^{i\gamma_{N+1}(z-z_N)} e^{i(\xi x+\eta y)} d\xi\, d\eta, \tag{33}$$

$$\mathbf{B}_{N+1}(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\begin{pmatrix}-\xi\eta/\omega\gamma_{N+1} & -(\gamma_{N+1}^2+\eta^2)/\omega\gamma_{N+1}\\ (\gamma_{N+1}^2+\xi^2)/\omega\gamma_{N+1} & \xi\eta/\omega\gamma_{N+1}\\ -\eta/\omega & \xi/\omega\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\hat{E}^+_{N+1,x}\\ \hat{E}^+_{N+1,y}\end{pmatrix} e^{i\gamma_{N+1}(z-z_N)} e^{i(\xi x+\eta y)} d\xi\, d\eta. \tag{34}$$

Наконец, при необходимости, зная $\hat{\mathfrak{E}}_1$ и $\hat{\mathfrak{E}}_{N+1}$, можно найти векторы-столбцы поля в любой внутренней области $\hat{\mathfrak{E}}_j$, так как они однозначно определяются граничными условиями. После этого электромагнитные поля в любой из этих областей могут быть найдены по формулам (7) и (10). Таким образом, электромагнитные поля будут определены во всем пространстве.

Распределение электрического поля в фокусе линзы Веселаго

Рассмотрим теперь задачу фокусировки излучения от элементарного единичного источника, расположенного на расстоянии d от линзы Веселаго в свободном полупространстве $j = 4$ (рис. 1) в фокусе линзы. Поляризация источника — вдоль оси X ($n_x = 1$, $n_y = 0$, $n_z = 0$). Толщина линзы равна $2d$. Тогда $N = 3$, $z_d = z_3 = 3d$, $\mathbf{H}_R = \mathbf{T}_4$, $\mathbf{H}_L = (\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_3)^{-1}$ и уравнение (28) примет вид

$$\mathbf{T}_4 \times \hat{\mathfrak{E}}_4 = (\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_3)^{-1} \times \hat{\mathfrak{E}}_1 + \mathbf{V}, \tag{35}$$

где матрицы с учетом толщин слоев выражаются следующими формулами:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{I}\\ \mathbf{G}_1 & -\mathbf{G}_1\end{pmatrix}^{-1},$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix}\mathbf{I} & e^{i2\gamma_2 d}\mathbf{I}\\ \mathbf{G}_2 & -e^{-i2\gamma_2 d}\mathbf{G}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{i2\gamma_2 d}\mathbf{I} & \mathbf{I}\\ e^{i2\gamma_2 d}\mathbf{G}_2 & -\mathbf{G}_2\end{pmatrix}^{-1},$$

$$\mathbf{T}_3 = \begin{pmatrix}\mathbf{I} & e^{i\gamma_3 d}\mathbf{I}\\ \mathbf{G}_3 & -e^{i\gamma_3 d}\mathbf{G}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{i\gamma_3 d}\mathbf{I} & \mathbf{I}\\ e^{i\gamma_3 d}\mathbf{G}_3 & -\mathbf{G}_3\end{pmatrix}^{-1},$$

$$\mathbf{T}_4 = \begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{I}\\ \mathbf{G}_4 & -\mathbf{G}_4\end{pmatrix},$$

а вектор-столбец стороннего тока равен $\mathbf{V} = (0; 0; 0; -1)^T$.

Учитывая, что $(\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_3)^{-1} = \mathbf{T}_3^{-1} \times \mathbf{T}_2^{-1} \times \mathbf{T}_1^{-1}$, получим

$$\mathbf{H}_L = (\mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_3) = \mathbf{T}_3^{-1} \times \mathbf{T}_2^{-1} \times \mathbf{T}_1^{-1} = \begin{pmatrix}e^{i\gamma_3 d}\mathbf{I} & \mathbf{I}\\ e^{i\gamma_3 d}\mathbf{G}_3 & -\mathbf{G}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{I} & e^{i\gamma_3 d}\mathbf{I}\\ \mathbf{G}_3 & -e^{i\gamma_3 d}\mathbf{G}_3\end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix}e^{i2\gamma_2 d}\mathbf{I} & \mathbf{I}\\ e^{i2\gamma_2 d}\mathbf{G}_2 & -\mathbf{G}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{I} & e^{i2\gamma_2 d}\mathbf{I}\\ \mathbf{G}_2 & -e^{i2\gamma_2 d}\mathbf{G}_2\end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{I}\\ \mathbf{G}_1 & -\mathbf{G}_1\end{pmatrix}.$$

Если ввести вектор-столбец $\hat{\mathfrak{E}}_{\text{out}} = (\hat{E}^-_{1,x}; \hat{E}^-_{1,y}; \hat{E}^+_{1,x}; \hat{E}^+_{1,y})^T$, уравнение (30) для данной задачи примет вид

$$\begin{pmatrix}-\mathbf{H}_{LB} & \mathbf{I}\\ -\mathbf{H}_{LD} & \mathbf{G}_4\end{pmatrix} \times \hat{\mathfrak{E}}_{\text{out}} = \mathbf{V}. \tag{36}$$

Решая линейное уравнение (36), найдем $\hat{E}^-_{1,x}$, $\hat{E}^-_{1,y}$ и $\hat{E}^+_{4,x}$, $\hat{E}^+_{4,y}$, и по $\hat{E}^-_{1,x}$ и $\hat{E}^-_{1,y}$ найдем поля в полупространстве $j = 1$ по формулам (31), (32).

Рассмотрим составляющую

$$E_{1,x}(x,y,z) = (2\pi)^{-2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{E}^-_{1,x} e^{-i\gamma_1 z} e^{i(\xi x+\eta y)} d\xi d\eta.$$

Как было показано в работе [20], при переходе к полярным координатам (λ, ϑ) в плоскости (ξ, η) по формулам $\xi = \lambda\cos\vartheta$, $\eta = \lambda\sin\vartheta$ и к полярным координатам ρ, φ в плоскости (x, y) по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, фурье-образ составляющей напряженности поля $\hat{E}^{-}_{1,x}(\xi, \eta)$ (это следует из симметрии задачи) можно представить в виде

$$\hat{E}_{1,x}(\xi, \eta) = Q(\lambda) + S(\lambda)\sin^2\vartheta,$$

где

$$\lambda = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \vartheta = \mathrm{arctg}(\xi, \eta).$$

Тогда

$$E_{1,x}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{2\pi}(Q(\gamma) + S(\gamma)\sin^2\vartheta)\right.$$

$$\left.\times e^{-i\gamma_1 z}e^{i\rho\lambda\cos(\varphi-\vartheta)}d\vartheta\right)\lambda d\lambda$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{+\infty}(Q(\gamma) + S(\gamma))\lambda e^{-i\gamma_1 z}\left(\int\limits_0^{2\pi}e^{i\rho\lambda\cos(\varphi-\vartheta)}d\vartheta\right)d\lambda$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{+\infty}S(\gamma)\lambda e^{-i\gamma_1 z}\left(\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\vartheta e^{i\rho\lambda\cos(\varphi-\vartheta)}d\vartheta\right)d\lambda.$$

Учитывая интегральное представление функций Бесселя:

$$J_n(\rho\lambda) = i^{-n}(2\pi)^{-1}\int\limits_0^{2\pi}e^{i\varphi\lambda\cos\theta}e^{in\theta}d\theta,$$

нетрудно получить следующие представления интегралов в скобках:

$$\int\limits_0^{2\pi}e^{i\rho\lambda\cos(\varphi-\vartheta)}d\vartheta = 2\pi J_0(\rho\lambda) \quad \text{и}$$

$$\int\limits_0^{2\pi}e^{i\rho\lambda\cos(\varphi-\vartheta)}\cos^2\vartheta d\vartheta = \pi(J_0(\rho\lambda) - J_2(\rho\lambda)\cos 2\varphi).$$

Тогда выражение для $E_{1,x}$ примет вид

$$E_{1,x}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{+\infty}(2Q(\gamma) + S(\gamma))\lambda e^{-i\gamma_1 z}J_0(\rho\lambda)d\lambda$$

$$+\frac{\cos 2\varphi}{4\pi}\int\limits_0^{+\infty}S(\gamma)\lambda J_2(\rho\lambda)e^{-i\gamma_1 z}d\lambda.$$

Или

$$E_{1,x}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{+\infty}(2Q(\gamma) + S(\gamma))\lambda e^{-i\gamma_1 z}$$

$$\times J_0(\lambda\sqrt{x^2 + y^2})d\lambda + \frac{\cos(2\mathrm{arctg}(y/x))}{4\pi}$$

$$\times\int\limits_0^{+\infty}S(\gamma)\lambda J_2(\lambda\sqrt{x^2 + y^2})e^{-i\gamma_1 z}d\lambda. \tag{37}$$

Численно интеграл (37) вычислялся следующим образом. Достаточно большой интервал интегрирования по параметру λ разбивался на достаточно большое число точек λ_p. В каждой из этих точек вычислялись $Q(\lambda_p)$ и $S(\lambda_p)$ по формулам $Q(\lambda_p) = \hat{E}^{-}_{1,x}(\lambda_p, 0)$ и $S(\lambda_p) = \hat{E}^{-}_{1,x}(0, \lambda_p) - Q(\lambda_p)$, причем $\hat{E}^{-}_{1,x}(\lambda_p, 0)$ и $\hat{E}^{-}_{1,x}(0, \lambda_p)$ вычислялись из решения уравнения (36). По полученным значениям функций находились сплайн-аппроксимации, которые подставлялись в одномерный интеграл (37). С вычислительной точки зрения такое одномерное интегрирование гораздо выгоднее двумерного по (ξ, η). Отметим, что в пределе нулевого поглощения в материале с отрицательным преломлением $(j = 2)$ аналитическая ветвь (9) переходит в функцию

$$\gamma_2(\lambda) = \begin{cases} -\sqrt{k_2^2 - \lambda^2}, & |\lambda| \le |k_2|, \\ i\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}, & |\lambda| > |k_2|, \end{cases}$$

где $k_2 = \omega\sqrt{|\varepsilon_1||\mu_2|}\exp(i(\arg(\varepsilon_2) + \arg(\mu_2))/2) = = -\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = -\omega/c$.

В принципе аналогично можно вычислить y- и z-компоненты напряженности электрического поля в полупространстве $j = 1$. Однако для исследования фокального распределения достаточно рассматривать только $|E_{1,x}|$, так как в самом фокусе существует лишь x-компонента напряженности электрического поля (источник тока направлен вдоль оси X). Можно показать, что при небольших отклонениях точки наблюдения от фокальной точки $\mathbf{F}$ другие компоненты поля малы.

На рис. 5 представлены распределения модуля (амплитуды) напряженности электрического поля $|E_{1,x}|$ в окрестности точки $(x_\mathbf{F}, y_\mathbf{F}, z_\mathbf{F}) = (0, 0, -d)$ фокуса $\mathbf{F}$. Расчеты были проведены для характерного размера задачи $d = 50\lambda_0$, где $\lambda_0 = 633\,\mathrm{nm}$ — длина волны в вакууме. На рис. 5, a представлено распределение амплитуды в E-плоскости ($|E_{1,x}(x, 0, -d)|$ в зависимости от x/λ_0), на рис. 5, b — распределение амплитуды в H-плоскости ($|E_{1,x}(0, y, -d)|$ в зависимости от y/λ_0), на рис. 5, c — распределение амплитуды вдоль оси Z ($|E_{1,x}(0, 0, z)|$ в зависимости от отклонения точки наблюдения от фокуса, выраженного в длинах волн $(z - z_\mathbf{F}/\lambda_0 = (z + d)/\lambda_0)$). Оказалось, что ширины всех представленных распределений (по фиксированному уровню) близки, и с точностью до множителя

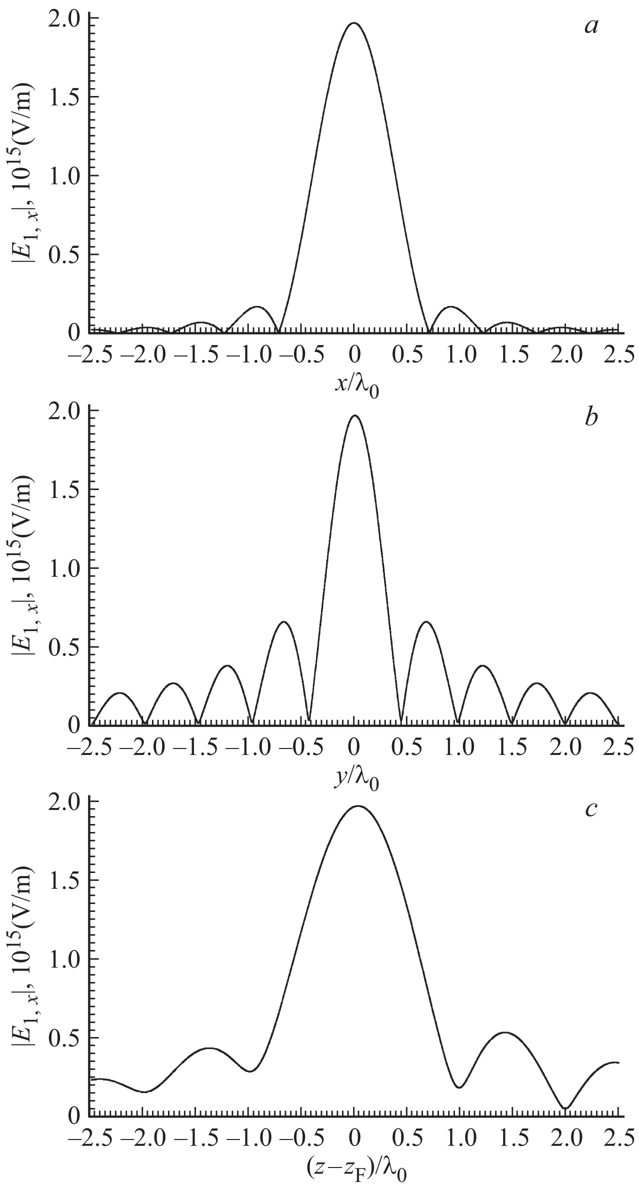

Рис. 5. Распределения амплитуды напряженности электрического поля $|E_{1,x}|$ в окрестности фокальной точки **F**: (*a*) в *E*-плоскости, (*b*) в *H*-плоскости, (*c*) по оси *Z* линзы.

порядка единицы равны длине волны. Если длину волны увеличить в κ раз, напряженность поля в максимуме уменьшится в κ^2 раз. Таким образом, кривые на рис. 5, полученные для $\lambda_0 = 633$ nm, легко могут быть пересчитаны для другой длины волны. Кроме того, оказалось, что при увеличении d, начиная с $d \sim 10\lambda_0$, ширины распределений и максимальная амплитуда поля в фокусе меняются слабо (лишь на несколько процентов).

Для сравнения отметим, что аналогичные результаты для малых поглощений в линзе Веселаго были получены в работе [28], основанной на теории [29]. Однако из работы [28] все же не вполне ясно, какую аналитическую ветвь авторы использовали при расчетах, поскольку на работу [16] они не ссылаются.

Заключение

Развитая строгая теория линзы с отрицательным преломлением (линзы Веселаго) подтверждает результаты работы [16] об отсутствии в фокусе супер- или сверхразрешания. Причем в отличие от [16] этот вывод доказан и для случая идеального отрицательно преломляющего материала без поглощения. Итак, в фокусе всегда будет наблюдаться фокальное распределение, с шириной приблизительно равной длине волны. Этот вывод имеет важное общетеоретическое значение.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] *Веселаго В.Г.* // УФН. 1967. Т. 92. С. 517; *Veselago V.G.* // Sov. Phys. Usp. 1968. V. 10. P. 509.
[2] *Smith D.R. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 4184.
[3] *Shelby R.A., Smith D.R., Schultz S.* // Science. 2001. V. 292. P. 77.
[4] *Pendry J.B.* // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. P. 3966.
[5] *Williams J.M.* // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. P. 249703-1.
[6] *Pendry J.B.* // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. P. 249704-1.
[7] *Cui T.J., Cheng Q., Lu W.B. et al.* // Phys. Rev. B. 2005. V. 71. P. 045114.
[8] *Chen J.J., Grzegorczyk T.M., Wu B. et al.* // Phys. Rev. E. 2006. V. 74. P. 046615.
[9] *Alitalo P. , Tretyakov S.A.* // Metamaterials. 2007. V. 1. P. 81.
[10] *Cheng Q., Cui T.J.* // Opt. Lett. 2005. V. 30. N 10. P. 1216.
[11] *Scalora M., D'Aguanno G., Mattiucci N. et al.* // Opt. Express. 2007. V. 15. N 2. P. 508.
[12] *Podolskiy V.A., Kuhta N.A., Milton G.W.* // Appl. Phys. Lett. 2005. V. 87. P. 231113.
[13] *Шевченко В.В.* // УФН. 2011. Т. 181. № 11. С. 1171.
[14] *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. IV. Оптика. М.: Наука, 1985.
[15] *Петрин А.Б.* // Квант. электрон. 2013. Т. 43. № 9. С. 814.
[16] *Петрин А.Б.* // ЖЭТФ. 2008. Т. 134. № 3(9). С. 436.
[17] *Петрин А.Б.* // Письма в ЖЭТФ. 2008. Т. 87. № 9. С. 550.
[18] *Sommerfeld A.* // Ann. Physik. (Leipzig). 1926. V. 81. P. 1135.
[19] *Wait J.R.* // IEEE Antennas and Propagation Magazine. 1998. V. 40. N 5. P. 7.
[20] *Петрин А.Б.* // Опт. и спектр. 2020. Т. 128. № 11. С. 1676.
[21] *Петрин А.Б.* // Опт. и спектр. 2020. Т. 128. № 12. С. 1874.
[22] *Reed C.E., Giergiel J.* // Phys. Rev. B. 1897. V. 36. N 9. P. 4990.
[23] *Lukosz W. , Kunz R.E.* // J. Opt. Soc. Am. 1977. V. 67. N 12. P. 1615.
[24] *King R.W.P., Smith G.S.* Antennas in Matter. Cambridge, MA: M.I.T. Press, 1981.
[25] *Петрин А.Б.* // Опт. и спектр. 2018. Т. 125. № 3. С. 375.
[26] *Петрин А.Б.* // Опт. и спектр. 2019. Т. 126. № 3. С. 350.
[27] *Петрин А.Б.* // Опт. и спектр. 2019. Т. 127. № 4. С. 654.
[28] *Tran Minh Hien, Ho Trung Dung* // Phys. Rev. A. 2012. V. 85. P. 015804.
[29] *Tomas M.S.* // Phys. Rev. A. 1995. V. 51. N 3. P. 2545.