

06

Особенности формирования локализованных состояний вблизи плоского дефекта в средах со скачкообразно меняющимся дефокусирующим нелинейным откликом

© С.Е. Савотченко

Белгородский государственный технологический университет имени В.Г. Шухова,
308012 Белгород, Россия

e-mail: savotchenkose@mail.ru

Поступила в редакцию 30.09.2020 г.

В окончательной редакции 30.09.2020 г.

Принята к публикации 14.10.2020 г.

Поведено теоретическое изучение особенностей локализации полей (светового пучка) вблизи плоского дефекта в средах со скачкообразной дефокусирующей нелинейностью керровского типа. Использована одномерная модель на основе обобщения нелинейного уравнения Шредингера с точечным потенциалом, моделирующим взаимодействие возбуждений с плоским дефектом, и нелинейным слагаемым, в котором коэффициенты линейного и нелинейного отклика меняются скачком в зависимости от амплитуды поля в среде. Показано, что существуют два типа симметричных локализованных стационарных состояний в различных энергетических диапазонах. Исследовано влияние интенсивности взаимодействия возбуждений с дефектом на профиль локализации состояний и условия их существования.

Ключевые слова: локализованные состояния, нелинейное уравнение Шредингера, ступенчатая нелинейность, плоский дефект.

DOI: 10.21883/OS.2021.02.50558.244-20

1. Введение

Эффекты, обусловленные нелинейным откликом кристаллов, активно используются при разработке различных элементов оптических и электронных устройств [1,2]. Особое место среди таких кристаллов занимают такие, которые обладают эффектом Керра, т.е. зависимостью от квадрата амплитуды напряженности электрического (или магнитного) поля диэлектрической функции (или показателя преломления) [3].

Для теоретического описания ряда свойств такого вида нелинейно-оптических сред часто применяется нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) [4]. Помимо классической формы НУШ с кубической нелинейностью для описания иных видов нелинейного отклика среды используются обобщения НУШ, содержащие степенную, полиномиальную, логарифмическую, насыщаемую и ступенчатую нелинейности [5–11]. Следует отметить универсальность таких моделей, находящих применение для теоретического описания бозе-эйнштейновской конденсации (БЭК) для атомов под названием уравнения Гросса–Питаевского [12], а для экситонного или поларитонного конденсатов в полупроводниках — уравнения Келдыша [13].

В тоже время активно используются НУШ с различными видами потенциалов, моделирующими взаимодействие возбуждений, оптических импульсов с неоднородностями кристаллов, такими как плоские дефекты, тонкопленочные прослойки, оптические решетки [14,15]. При этом для получения результатов изучения взаимо-

действия локализованных в пространстве возбуждений (в том числе солитонов) с дефектами в точном аналитическом виде часто применяется приближение точечного потенциала с дельта-функцией Дирака [16–18]. Комбинации моделей нелинейности с потенциалами позволяют описать ряд уникальных свойств нелинейных кристаллов с дефектами с помощью полученных в явном виде различных решений НУШ.

Настоящая работа продолжает теоретические исследования в данном направлении. В работах [19–21] были аналитически описаны свойства поверхностных волн в средах, в которых невозмущенная часть (линейный отклик) диэлектрической константы скачком менялась в зависимости от амплитуды поля. Был предложен способ построения точного решения, состоящего из нескольких компонентов, описывающих поле в различных областях кристалла, формируемых в зависимости от амплитуды поля. Такая модель предлагалась для описания изменения свойств кристаллов в приповерхностных слоях, происходящих вследствие распространения вдоль поверхности мощного оптического излучения [22,23]. Теоретическое обоснование возможности скачкообразного изменения диэлектрической константы в ряде полупроводниковых кристаллах базируется на результатах работ [24–27].

В недавних работах [28–35] были предложены различные обобщения модели скачкообразной нелинейности в комбинации с разновидностью контактирующих сред. В [35] было учтено короткодействующее взаимодействие с границей раздела сред со скачкообразным изменением

коэффициента линейного отклика. В [32] рассматривался полуграниченный кристалл, в котором скачком меняются не только коэффициенты линейного отклика, но и коэффициенты керровской нелинейности, однако взаимодействие волн с граничащей поверхностью кристалла не учитывалось.

В настоящей работе предлагается теоретическое описание влияния взаимодействия возбуждений с плоским дефектом в неограниченной среде с дефокусирующей керровской нелинейностью, в которой в зависимости от амплитуды поля происходит скачкообразное изменение как коэффициентов линейного отклика среды, так и нелинейного. При этом дефокусирующие свойства среды остаются неизменными, т. е. знак нелинейности не меняется. Будет использовано НУШ с точечным потенциалом и с описанной формой нелинейного слагаемого со скачкообразным изменением коэффициентов дефокусирующего отклика. Будут получены и проанализированы точные решения такого НУШ, соответствующие двум новым типам локализованных состояний в кристалле с дефокусирующим нелинейным откликом.

2. Формулировка модели

Рассмотрим среду с отрицательным (дефокусирующим) нелинейным откликом и с плоским дефектом (границей раздела), расположенным в плоскости $x = 0$. Толщина дефекта пренебрежительно мала по сравнению с характерными размерами возмущений параметров среды. Распределение возмущений вдоль в плоскости дефекта считается однородным, что позволяет свести задачу к одномерной [36].

Пусть стационарное распределение поля $u(x)$ определяется из модельного уравнения, в качестве которого используем одномерное НУШ в виде

$$Eu = -\frac{1}{2m} u'' + \Omega(|u|)u + U(x)u. \quad (1)$$

Коэффициенты и слагаемые в (1) могут интерпретироваться различным образом в зависимости от применимости данного уравнения. В частности, в нелинейной оптике E представляет собой константу распространения [36], для модели БЭК — энергию стационарного состояния [13]. В нелинейной оптике $m = 1/2D$, где D — коэффициент дифракции [36], а в модели БЭК величина m соответствует эффективной массе [18].

Функция $U(x)$, не зависящая от искомого поля, а зависящая от пространственной координаты, представляет собой потенциал, моделирующий взаимодействие волн или возбуждений с различными барьерами в кристалле. В данной работе будем использовать „точечный“ потенциал в виде $U(x) = U_0\delta(x)$, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, U_0 — интенсивность взаимодействия („мощность“ дефекта) возбуждения с плоским дефектом в короткодействующем приближении ($U_0 > 0$ — отталкивающий дефект, $U_0 < 0$ — притягивающий дефект) [34].

Функция $\Omega(|u|)$, зависящая от искомого поля, описывает отклик среды на взаимодействие с волной, причем как линейный, так и нелинейный. Будем предполагать, что изначально нелинейная дефокусирующая среда характеризуется одним набором значения коэффициентов Ω_1 и α_1 . Далее происходит рост амплитуды поля, и в тот момент, когда она превысит определенное пороговое значение u_s (называемое полем переключения), происходит скачкообразное изменение исходных значений коэффициентов на новые Ω_2 и α_2 . Поэтому в данной работе будем описывать отклик, зависящий скачкообразно от амплитуды искомого поля, посредством нелинейной функции:

$$\Omega(|u|) = \begin{cases} \Omega_1 + \alpha_1|u|^2, & |u| < u_s, \\ \Omega_2 + \alpha_2|u|^2, & |u| > u_s, \end{cases} \quad (2)$$

где Ω_j — постоянные положительные величины ($j = 1, 2$), соответствующие линейной части отклика (в оптике соответствуют невозмущенным показателям преломления), а α_j — коэффициенты нелинейности, в нелинейной оптике описывающие нелинейный отклик среды, характеризующейся эффектом Керра и называемые коэффициентами керровской нелинейности. В данной работе будем рассматривать только среды, обладающие дефокусирующим нелинейным откликом, которому соответствуют положительные коэффициенты керровской нелинейности.

В отличие от модели нелинейности, рассмотренной в [34], будем считать, что в зависимости от амплитуды поля скачком меняются не только величины линейного отклика Ω_j , но и коэффициенты керровской нелинейности α_j . Поэтому можно сказать, что функции (2) характеризуют двойную нелинейность: квадратичную по полю нелинейность и скачкообразное изменение в зависимости от поля. Такая форма нелинейности использовалась ранее в [32], однако в ней не учитывалось взаимодействие волны с дефектом, т. е. отсутствовал потенциал в (1). Следует также отметить, что от [32] рассматриваемая здесь модель отличается тем, что плоский дефект находится внутри среды, а не является свободной поверхностью, что позволяет получить распределения полей, обладающих симметрией в поперечном плоскости дефекта направлении. Физическая интерпретация модели скачкообразного нелинейного отклика изложена в [34].

Решение НУШ (1) с „точечным“ потенциалом сводится к решению НУШ без потенциала, но с условиями непрерывности поля в плоскости дефекта $x = 0$ и скачка его производной

$$u'(+0) - u'(-0) = 2mU_0u_0, \quad (3)$$

где u_0 — амплитуда поля в плоскости дефекта.

Ранее было показано в [35], что вблизи плоского дефекта в среде с рассматриваемым типом нелинейного отклика формируется приграничный слой (домен) конечной ширины $2x_s$, в котором значения характеристик

отклика отличается от их значений в остальной среде. Величина x_s характеризует положение границы домена и представляет собой координату, при которой искомое поле совпадает с полем переключения: $|u(x_s)| = u_s$. В результате возникают дополнительные условия непрерывности поля и его производной на границе домена при $x = x_s$.

Физически реализуемые локализованные состояния НУШ (1) должны также удовлетворять условию исчезновения на бесконечности: $|u(x)| \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Будем дополнительно считать, что амплитуда поля на дефекте превышает значение поля переключения: $u_0 > u_s$. Для описания особенностей локализации достаточно ограничиться рассмотрением только четных состояний, т. е. для которых $u(-x) = u(x)$.

3. Локализованные состояния первого типа

При $E < \Omega_{1,2}$ стационарное состояние, локализованное в поперечном плоскости дефекта направлении, описывается решением НУШ (1) вида

$$u(x) = \begin{cases} \pm \frac{q_1}{\sqrt{m\alpha_1}} \frac{1}{\text{sh } q_1(x \mp x_1)}, & |u| < u_s, \\ \pm \frac{q_2}{\sqrt{m\alpha_2}} \frac{1}{\text{sh } q_2(x \mp x_2)}, & |u| > u_s, \end{cases} \quad (4)$$

$$q_{1,2}^2 = 2m(\Omega_{1,2} - E). \quad (5)$$

Здесь и далее значение индекса „1“ соответствует величинам, относящимся к области вне домена, $|x| > x_s$, в которой $|u| < u_s$, а значение индекса „2“ — к области внутри домена $|x| < x_s$, в которой $|u| > u_s$. В (4) и далее следует выбирать верхний знак для правого полупространства, а нижний для левого.

Подстановка решения (4) в граничное условие (3) приводит к уравнению

$$q_2 \text{cth } q_2 x_2 = mU_0, \quad (6)$$

из которого следует, что локализованное состояние (4) может существовать только вблизи притягивающего дефекта, поскольку для положительности амплитуды поля на дефекте величина x_2 должна быть отрицательной.

Из условий непрерывности решения (4) и его производной на границе домена $x = x_s$ получаются уравнения

$$\frac{q_1}{\sqrt{m\alpha_1}} \frac{1}{\text{sh } q_1(x_s - x_1)} = \frac{q_2}{\sqrt{m\alpha_2}} \frac{1}{\text{sh } q_2(x_s - x_2)} = u_s, \quad (7)$$

$$q_1 \text{cth } q_1(x_s - x_1) = q_2 \text{cth } q_2(x_s - x_2). \quad (8)$$

Из уравнений (6)–(8) выражаются параметры локализованного состояния (4)

$$x_1 = x_s - \frac{1}{\sqrt{2m(\Omega_1 - E)}} \text{Arctsh} \sqrt{\frac{\Omega_1 - E}{\Omega_1 - \Omega_2} \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1}} \quad (9)$$

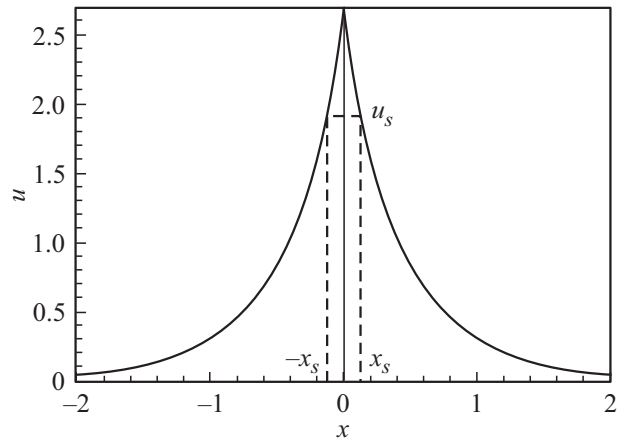


Рис. 1. Типичная зависимость поля u локализованного состояния (4) с параметрами (9)–(12) от расстояния от плоскости дефекта x при фиксированных параметрах в усл.ед.: $m = 1$; $\alpha_1 = 0.5$; $\alpha_2 = 1$; $\Omega_1 = 3$; $\Omega_2 = 2$; $U_0 = -3$; $E = 1$.

и

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2m(\Omega_2 - E)}} \text{Arccth} \left(U_0 \sqrt{\frac{m}{2(\Omega_2 - E)}} \right), \quad (10)$$

где полуширина домена

$$x_s = x_2 + \frac{1}{\sqrt{2m(\Omega_2 - E)}} \text{Arctsh} \sqrt{\frac{\Omega_2 - E}{\Omega_1 - \Omega_2} \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2}}, \quad (11)$$

а также значение поля переключения

$$u_s^2 = 2 \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{\alpha_2 - \alpha_1}. \quad (12)$$

Из (12) следует, что для существования локализованного состояния (4) должна выполняться одна из пар условий: $\Omega_1 > \Omega_2$ и $\alpha_2 > \alpha_1$ или $\Omega_1 < \Omega_2$ и $\alpha_2 < \alpha_1$.

Амплитуда поля на дефекте определяется выражением

$$u_0^2 = \{mU_0^2 - 2(\Omega_2 - E)\} / \alpha_2. \quad (13)$$

Из (13) следует, что при фиксированной энергии E мощность притягивающего дефекта ограничена: $U_0 > -\{2(\Omega_2 - E)/m\}^{1/2}$.

Таким образом, выражения (5), (9)–(12) определяют все параметры локализованного состояния (4) в зависимости от его энергии.

На рис. 1 показано характерное распределение поля (4) в поперечном плоскости дефекта направлении. Для среды с дефокусирующим нелинейным откликом характерна высокая степень локализации поля вдоль плоскости дефекта в рассматриваемом энергетическом диапазоне.

Рост абсолютной величины мощности дефекта приводит к увеличению интенсивности поля на дефекте (13) и ширины формируемого домена (11) при фиксированной энергии локализации. Аналогично увеличение энергии

локализации приводит к увеличению интенсивности поля на дефекте (13) и ширины формируемого домена (11) при фиксированной мощности дефекта.

Следует подчеркнуть, что для существования локализованного состояния вида (4) необходимо наличие взаимодействия с дефектом, поскольку, как отмечалось выше, мощность притягивающего дефекта должна быть ограничена и нулевой или бесконечно малой быть не может. Кроме того, при отсутствии взаимодействия профиль поля должен быть всюду гладким, в том числе и на границе раздела, вследствие непрерывности нормальных и тангенциальных компонент поля. Наличие взаимодействия конечной интенсивности приводит к скачку компоненты поля (3), обуславливающего его негладкий профиль вблизи плоскости дефекта в дефокусирующей среде (рис. 1).

Из (13) можно выразить энергию локализации как функцию амплитуды поля на дефекте:

$$E = \Omega_2 - (mU_0^2 - \alpha_2 u_0^2)/2. \quad (14)$$

Из (14) следует, что энергия локального состояния зависит от квадрата амплитуды поля, как обычно и бывает в теории нелинейных колебаний [4]. При этом возникают ограничения для мощности притягивающего дефекта при фиксированной амплитуде поля: $U_0 > -u_0(\alpha_2/m)^{1/2}$.

4. Локализованные состояния второго типа

При $\Omega_2 < E < \Omega_1$ стационарное состояние, локализованное в поперечном плоскости дефекта направлении, описывается решением НУШ (1) вида

$$u(x) = \begin{cases} \pm \frac{q_1}{\sqrt{m\alpha_1}} \frac{1}{\text{sh } q_1(x \mp x_1)}, & |u| < u_s, \\ \mp \frac{q_t}{\sqrt{m\alpha_2}} \text{th } q_t(x \mp x_2) & |u| > u_s, \end{cases} \quad (15)$$

$$q_t^2 = m(E - \Omega_2). \quad (16)$$

Подстановка решения (15) в граничное условие (3) приводит к уравнению

$$\frac{q_t}{\text{ch}^2 q_t x_2} = mU_0 \text{th } q_t x_2, \quad (17)$$

из которого следует, что локализованное состояние (15) может существовать как вблизи притягивающего дефекта, так и отталкивающего.

Из условий непрерывности решения (15) и его производной на границе домена $x = x_s$ получаются уравнения

$$\frac{q_1}{\sqrt{m\alpha_1}} \frac{1}{\text{sh } q_1(x_s - x_1)} = -\frac{q_t}{\sqrt{m\alpha_2}} \text{th } q_t(x_s - x_2) = u_s, \quad (18)$$

$$\frac{q_1^2}{\sqrt{\alpha_1}} \frac{\text{ch } q_1(x_s - x_1)}{\text{sh}^2 q_1(x_s - x_1)} = \frac{q_t^2}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{1}{\text{ch}^2 q_t(x_s - x_2)}. \quad (19)$$

Из уравнений (16)–(19) получается, что локализованное состояние (15) может существовать при фиксированном значении энергии, определяемом параметрами кристалла:

$$E = \Omega_2 + u_s \sqrt{\alpha_2} \times \left\{ \sqrt{8(\Omega_1 - \Omega_2) + u_s^2(\alpha_2 + 4\alpha_1)} - u_s \sqrt{\alpha_2} \right\} / 2. \quad (20)$$

Из (20) следует, что так как для локализованного состояния (15) ширина энергетического диапазона существования $\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_2 > 0$, то локализация возможна при значениях поля переключения, ограниченных сверху максимально возможной величиной $u_s^2_{\text{max}} = \left\{ \sqrt{\alpha_2(9\alpha_2 + 4\alpha_1)} - 3\alpha_2 \right\} \Delta\Omega / 2\alpha_1\alpha_2$.

Из уравнений (16)–(19) определяются параметры локализованного состояния (15)

$$x_1 = x_s - \frac{1}{q_1} \text{Arcsh} \left(\frac{q_1}{u_s \sqrt{m\alpha_1}} \right) \quad (21)$$

и

$$x_2 = \frac{1}{q_t} \text{Arcth} \left(\sqrt{\left(\frac{mU_0}{2q_t} \right)^2 + 1} - \frac{mU_0}{2q_t} \right), \quad (22)$$

где полуширина домена

$$x_s = x_2 - \frac{1}{q_t} \text{Arcth} \left(\frac{u_s \sqrt{m\alpha_2}}{q_t} \right). \quad (23)$$

В выражения (9)–(11) подставляются q_1 (5) и q_t (16) с энергией E (20). Таким образом, выражения (16), (20)–(23) определяют все параметры локализованного состояния (15), которые в отличие от локализованного состояния первого типа (4) не зависят от энергии, а определяются характеристиками среды и полем переключения u_s , т.е. параметрами модели нелинейности.

Амплитуда локализованного состояния (15) на дефекте

$$u_0 = \left\{ \sqrt{(mU_0)^2 + 4q_t^2} - mU_0 \right\} / 2\sqrt{m\alpha_2} \quad (24)$$

также теперь определяется характеристиками среды и полем переключения.

На рис. 2 показано характерное распределение поля (15) в поперечном плоскости дефекта направлении. Для среды с дефокусирующим нелинейным откликом в данном энергетическом диапазоне характерна более низкая степень локализации поля вдоль плоскости дефекта по сравнению с локализованным состоянием в первом энергетическом диапазоне (разд. 3).

При условии, что коэффициент нелинейности в домене больше коэффициента нелинейности в остальной среде, локализация будет возможна вблизи отталкивающего дефекта.

Рост абсолютной величины мощности дефекта приводит к уменьшению интенсивности поля на дефекте (24)

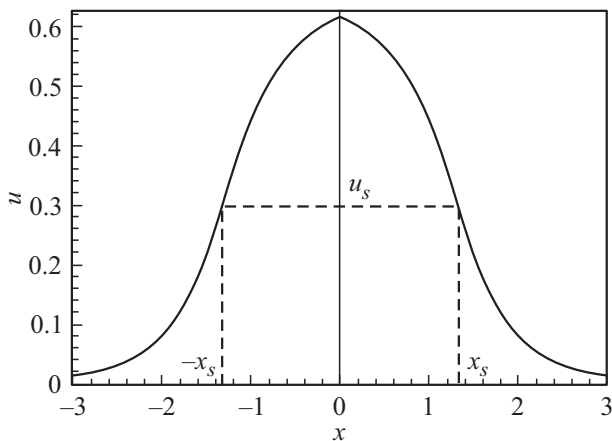


Рис. 2. Типичная зависимость поля u локализованного состояния (15) с параметрами (20)–(23) от расстояния от плоскости дефекта x при фиксированных параметрах в усл. ед.: $m = 1$; $\alpha_1 = 1.5$; $\alpha_2 = 2.5$; $\Omega_1 = 3$; $\Omega_2 = 0.1$; $U_0 = 0.1$; $u_s = 0.3$.

и ширины формируемого домена (23) при фиксированном поле переключения. Увеличение поля переключения приводит к увеличению энергии локализации (20) и интенсивности поля на дефекте (24), но к уменьшению ширины формируемого домена (23) при фиксированной мощности дефекта. Также следует отметить, что во втором энергетическом диапазоне локальное состояние формирует более широкий домен вблизи плоскости дефекта, чем в первом диапазоне.

5. Заключение

В данной работе продолжено теоретическое изучение особенностей локализации полей в средах со специфическим типом нелинейного отклика, когда скачком меняются соответствующие коэффициенты нелинейной функции отклика в зависимости от амплитуды поля. С целью получения основных результатов в явном аналитическом виде было использовано НУШ с меняющимися скачкообразно параметрами, в том числе и коэффициентом дефокусирующей нелинейности, а также с точечным потенциалом (с дельта-функцией Дирака), моделирующим взаимодействие возбуждений с плоским дефектом. Получены точные решения НУШ, описывающие локализованные вблизи плоского дефекта состояния. Проанализированы параметры полученных состояний в зависимости от мощности дефекта.

Показано, что взаимодействие возбуждений с плоским дефектом приводит к новым возможностям управления полем локализованного состояния. Кроме того, возможность управления параметрами системы позволяет контролировать изменения оптических свойств среды, происходящих вблизи плоского дефекта в результате распространения вдоль него интенсивного излучения.

Полученные в работе результаты могут иметь значение при проектировании элементов устройств, использу-

ющих контролируемую локализацию волн вдоль границ раздела (плоских дефектов) в нелинейных средах, а также расширяют представления об уникальных свойствах поверхностных волн и локализованных вблизи дефектов состояний.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] *Surface Waves: New Trends and Developments* / Ed. by Ebrahimi F., IntechOpen, 2018. 154 p. doi 10.5772/intechopen.68840
- [2] Jia Y, Liao Y, Wu L, Shan Y, Dai X, Cai H, Xiang Y, Fan D. // *Nanoscale*. 2019. V. 7. P. 4515. doi 10.1039/C8NR08966C
- [3] Кившарь Ю.С., Агравал Г.П. Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов. М.: Физматлит, 2005. 648 с.
- [4] Косевич А.М., Ковалев А.С. Введение в нелинейную физическую механику. Киев: Наукова думка, 1989. 304 с.
- [5] Kaplan A.E. // *IEEE J. of Quantum Electronics*. 1985. V. 21. P. 1538. doi 10.1109/JQE.1985.1072828
- [6] Wood V.E., Evans E.D., Kenan R.P. // *Opt. Commun.* 1988. V. 69. P. 156. doi.org/10.1016/0030-4018(88)90302-1
- [7] Федоров Л.В., Ляхомская К.Д. // *Письма в ЖТФ*. 1997. Т. 23. С. 36.
- [8] Christian J.M., McDonald G.S., Chamorro-Posada P. // *J. Opt. Soc. Am. B*. 2009. V. 26. P. 2323. doi 10.1364/JOSAB.26.002323
- [9] Azzouzi F., Triki H., Mezghiche K., El Akrimi A. // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2009. V. 39. P. 1304. doi 10.1016/j.chaos.2007.06.024
- [10] Zhan K., Tian H., Li X., Xu X., Jiao Z., Jia Y. // *Sc. Rep.* 2016. V. 6. P. 32990. doi 10.1038/srep32990
- [11] Kursseva V., Tikhov S., Valovik D. // *J. Nonlinear Optical Physics & Materials*. 2019. V. 28. P. 1950009. doi 10.1142/S0218863519500097
- [12] Высотина Н.В., Розанов Н.Н., Шацев А.Н. // *Опт. и спектр.* 2018. Т. 124. С. 82. doi 10.21883/OS.2018.01.45363.193-17; Vysotina N.V., Rosanov N.N., Shatsev A.N. // *Opt. Spectrosc.* 2018. V. 124. P. 79. doi 10.1134/S0030400X18010228
- [13] Moskalenko S.A., Snoke D.W. Bose–Einstein Condensation of Excitons and Biexcitons and Coherent Nonlinear Optics with Excitons. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2000.
- [14] *Localized Excitations in Nonlinear Complex Systems* / Ed. by Carretero-González R., Cuevas-Maraver J., Frantzeskakis D., Karachalios N., Kevrekidis P., Palmero-Acebedo F. Springer Science & Business Media, 2013. 432 p.
- [15] Kartashov Y.V., Malomed B.A., Torner L. // *Rev. Mod. Phys.* 2011. V. 83. P. 247. doi 10.1103/RevModPhys.83.247
- [16] Kivshar U.S., Kosevich A.M., Chubykalo O.A. // *Phys. Lett. A*. 1987. V. 125. P. 35. doi 10.1016/0375-9601(87)90514-7
- [17] Kivshar U.S., Kosevich A.M., Chubykalo O.A. // *Phys. Rev. A*. 1990. V. 41. P. 1677. doi 10.1103/PhysRevA.41.1677

- [18] Чаплик А.В. // Письма в ЖЭТФ. 2017. Т. 105. С. 565. doi 10.7868/S0370274X17090107; *Chaplik A.V.* // JETP Lett. 2017. V. 105. P. 601. doi 10.1134/S0021364017090089
- [19] Хаджи П.И., Федоров Л.В. // ЖТФ. 1991. Т. 61. С. 110.
- [20] Белецкий Н.Н., Гасан Е.А. // ФТТ. 1994. Т. 36. С. 647.
- [21] Ляхомская К.Д., Хаджи П.И. // ЖТФ. 2000. Т. 70. С. 86.
- [22] *Jarque E.C., Malyshev V.A.* // Opt. Commun. 1997. V. 142. P. 66. doi 10.1016/S0030-4018(97)00275-7
- [23] *Schuzgen A., Peyghambarian N., Hughes S.* // Phys. Stat. Sol. (b). 1999. V. 206. P. 125. doi 10.1002/(SICI)1521-3951(199803)206:1%3C125::AID-PSSB125%3E3.0.CO;2-8
- [24] Хаджи П.И., Славов Ю.Д. // УФЖ. 1988. Т. 33. С. 824.
- [25] Хаджи П.И., Русанов А.М., Гайван С.Л. // Квант. электрон. 1999. V. 27. P. 262; *Khadzhi P.I., Rusanov A.M., Gaivan S.L.* // Quant. Electron. 1999. V. 29. P. 539. doi 10.1070/QE1999v029n06ABEH001526
- [26] *Коровай А.В., Хаджи П.И.* // Квант. электрон. 2001. Т. 31. С. 937; *Corovai A.V., Khadzhi P.I.* // Quant. Electron. 2001. V. 31. P. 937. doi 10.1070/QE2001v031n10ABEH002080
- [27] *Коровай А.В., Хаджи П.И.* // Квант. электрон. 2002. Т. 32. С. 711; *Corovai A.V., Khadzhi P.I.* // Quant. Electron. 2002. V. 32. P. 711. doi 10.1070/QE2002v032n08ABEH002277
- [28] *Savotchenko S.E.* // Romanian J. Phys. 2020. V. 65. P. 202.
- [29] *Savotchenko S.E.* // J. Optics. 2020. V. 22. P. 065504.
- [30] *Савотченко С.Е.* // ФТТ. 2020. Т. 62. С. 1260. doi 10.21883/FTT.2020.08.49611.050; *Savotchenko S.E.* // Phys. Sol. St. 2020. V. 62. P. 1415. doi 10.1134/S1063783420080284
- [31] *Савотченко С.Е.* // Письма в ЖТФ. 2020. Т. 46. С. 43. doi 10.21883/PJTF.2020.16.49854.18146; *Savotchenko S.E.* // Tech. Phys. Lett. 2020. V. 46. P. 823. doi 10.1134/S1063785020080271
- [32] *Savotchenko S.E.* // Phys. Lett. A. 2020. V. 384. P. 126451. doi 10.1016/j.physleta.2020.126451
- [33] *Savotchenko S.E.* // Romanian Reports in Physics. 2020. V. 72. P. 412.
- [34] *Савотченко С.Е.* // ЖЭТФ. 2020. Т. 158. С. 529. doi 10.31857/S0044451020090126; *Savotchenko S.E.* // JETP. 2020 V. 131. P. 468. doi 10.1134/S1063776120080051
- [35] *Savotchenko S.E.* // Phys. Lett. A. 2020. V. 384. P. 126810. doi 10.1016/j.physleta.2020.126810
- [36] *Sukhorukov A.A., Kivshar Yu.S.* // J. Opt. Soc. Am. B. 2002. V. 19. P. 772. doi 10.1364/JOSAB.19.000772