12

Теория и расчет электростатических электронных зеркал с учетом релятивистских эффектов

© С.Б. Бимурзаев, Е.М. Якушев

Алматинский университет энергетики и связи им. Г. Даукеева,
050013 Алматы, Казахстан
e-mail: bimurzaev@mail.ru

Поступило в Редакцию 12 октября 2020 г.
В окончательной редакции 30 ноября 2020 г.
Принято к публикации 1 декабря 2020 г.

С помощью метода центральной частицы получены уравнения траектории заряженных частиц с точностью до величин третьего порядка малости включительно в осесимметричном электростатическом зеркале с учетом релятивистских эффектов. Определены условия пространственной фокусировки и коэффициенты пространственных аберраций в гауссовой плоскости изображения зеркала при учете релятивистских эффектов. Путем численных расчетов определены условия одновременного устранения сферической и осевой хроматической аберраций при учете релятивистских эффектов в осесимметричном электростатическом зеркале, когда предметная плоскость зеркала совмещена с его фокальной плоскостью. Показано, что учет высоких скоростей частиц приводит как к смещению положения гауссовой плоскости изображения, так и изменению качества фокусировки.

Ключевые слова: электронный микроскоп, электростатическое зеркало, сферическая аберрация, осевая хроматическая аберрация, релятивистский эффект.

DOI: 10.21883/JTF.2021.05.50701.290-20

Введение

В настоящее время электронные зеркала стали незаменимыми структурными элементами современного научного и технологического приборостроения, определяющие качество фокусировки таких приборов, как масс-спектрометры и электронные микроскопы. Реальное конструирование подобных приборов требует предельно точного расчета электронно-оптического тракта, в том числе учета релятивистских поправок, особенно в области электронной микроскопии. Как известно, главными факторами, ограничивающими разрешающую способность электронного микроскопа, являются сферическая и осевая хроматическая аберрации электронной линзы, выполняющей роль его объектива [1,2]. К настоящему времени достигнуты значительные успехи в разработке корректоров аберраций, позволяющих одновременное устранение сферической и хроматической аберраций объективной линзы электронного микроскопа как на основе мультипольных электрических и магнитных полей, так и на основе электростатического зеркала [3–9]. Однако в известных работах не учитывается влияние релятивистских эффектов на качество фокусировки, что особенно необходимо для высоковольтной (с ускоряющим напряжением 100 keV и выше) электронной микроскопии. Настоящая работа посвящена созданию теории пространственных аберраций и расчету электростатического осесимметричного зеркала при учете влияния релятивистских эффектов на его фокусирующие свойства.

1. Уравнения траекторий

1.1. Уравнения траекторий в подвижной системе координат

Введем цилиндрическую систему координат r, ψ, z, ось z которой совместим с главной оптической осью зеркала. Электростатическое поле зеркала представим скалярным потенциалом $\varphi = \varphi(r, z)$, нормированным так, что в месте поворота частицы (где кинетическая энергия некоторой выбранной частицы равна нулю) и $\varphi \equiv \varphi_0$ в свободном от поля пространстве. Рассмотрим поток однородных частиц с зарядом e и массой покоя m_0, движущихся в меридиональных плоскостях $\psi = \mathrm{const}$ в окрестности главной оптической оси зеркала. При этих условиях вариационная функция Лагранжа L может быть представлена в виде

$$L = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\dot{r}^2 + \dot{z}^2\right) - \gamma^2 \frac{\varphi}{\varphi_0}}. \tag{1}$$

Здесь точками, как обычно, обозначено дифференцирование переменных по времени t. Безразмерная величина $\gamma^2 = -e\varphi_0/m_0c^2$, равная кинетической энергии, отнесенной к энергии покоя частиц, представляет собой количественную характеристику релятивистских эффектов поступающих в поле зеркала частиц. При этом уравнения движения частицы принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{r}}{c\sqrt{c^2 - \dot{r}^2 - \dot{z}^2}}\right) = \frac{\gamma^2}{\varphi_0}\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \tag{2}$$

$$\frac{c}{\sqrt{c^2 - \dot{r}^2 - \dot{z}^2}} = 1 + \gamma^2\left(\frac{\varphi}{\varphi_0} + \varepsilon\right). \tag{3}$$

Равенство (3) представляет собой закон сохранения полной энергии частиц. Обычно при исследовании аберраций используют этот закон для исключения времени из уравнений движения и введения в качестве независимой переменной координаты оптической оси z. С этим преобразованием связаны определенные математические трудности, вытекающие из того обстоятельства, что в полученных уравнениях появляются структуры типа $\sqrt{\varphi/\varphi_0+\varepsilon}$ и $\sqrt{1+r'^2}$ (штрихи обозначают дифференцирование по z). Наличие этих структур при линеаризации уравнений вынуждает принять, наряду с требованием малости r, следующие условия параксиального приближения: $\varepsilon\varphi_0/\varphi \ll 1$ и $r' \ll 1$, которые с очевидностью не могут быть удовлетворены в окрестности точки поворота электронных траекторий в электронном зеркале $\xi = z_u$, где $\varphi_{z\to z_u} \to 0$ и $r'_{z\to z_u} \to \infty$. Поэтому в наших дальнейших исследованиях будем следовать методу „центральной частицы“ [10,11], позволяющему преодолеть указанные трудности.

Сначала с учетом (3) приведем систему уравнений (2)–(3) к виду:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\dot r}{c^2}\left[1+\gamma^2\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}+\varepsilon\right)\right]\right\} = \frac{\gamma^2}{\varphi_0}\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \tag{4}$$

$$\frac{1}{c^2}\left(\dot r^2+\dot z^2\right) = \gamma^2\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}+\varepsilon\right) \times\left[2+\gamma^2\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}+\varepsilon\right)\right]\left[1+\gamma^2\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}+\varepsilon\right)\right]^{-2}. \tag{5}$$

Затем выберем в качестве центральной частицы одну из частиц, движущихся вдоль оси z с $\varepsilon = 0$. При этом положение центральной частицы на оси z в текущий момент времени будем обозначать через ξ и свяжем с этой частицей начало подвижной системы координат r, ψ, η, введя замену переменной

$$z = \xi + \eta, \tag{6}$$

где $\eta = \eta(\xi)$ — малая величина, определяющая продольное смещение произвольной частицы от центральной. Идея введения подвижной системы координат состоит в том, что исключение времени из уравнений движения в этой системе не приводит к указанным нежелательным последствиям. Кроме того, в подвижной системе координат продольные и поперечные смещения (η и r) могут рассматриваться как малые величины, следовательно, и относительные скорости частиц ($\dot\eta$ и $\dot r$) могут оставаться малыми даже при релятивистских скоростях центральной частицы, что несомненно упрощает аберрационный анализ.

Из соотношения (5) найдем скорость центральной частицы

$$\frac{\dot\xi}{c} = \sigma\gamma\frac{\sqrt{\Phi(2+\gamma^2\Phi)}}{1+\gamma^2\Phi}, \tag{7}$$

где σ — знаковый множитель, характеризующий направление движения частицы вдоль оси z, а $\Phi = \Phi(\xi)$ — безразмерная функция аргумента ξ, та же, что и функция $\Phi(z) = \varphi(o,z)/\varphi_0$ аргумента z, описывающая осевое распределение потенциала. При этом за пределами поля зеркала $\Phi(\xi) \equiv 1$, а в особой точке (при $\xi = z_u$) имеют место соотношения $\Phi(z_u) = 0$, $\Phi'(z_u) \neq 0$, характерные для электронного зеркала.

Используя равенства (6) и (7), введем в уравнения (4) и (5) новую независимую переменную ξ и динамическую переменную η, исключив из этих уравнений t и z. Выполнив соответствующие преобразования, получим

$$\sqrt{\hat\Phi}\frac{d}{d\xi}\left(\sqrt{\hat\Phi}\frac{dr}{d\xi}\right) = \frac{1}{2\varphi_0}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \gamma^2\sqrt{\hat\Phi}\frac{d}{d\xi}\left[\sqrt{\hat\Phi}\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}+\varepsilon\right)\frac{dr}{d\xi}\right], \tag{8}$$

$$\hat\Phi\left[r'^2+(1+\eta')^2\right] = \left(\frac{\varphi}{\varphi_0}+\varepsilon\right)\left[1+\frac{1}{2}\gamma^2\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}+\varepsilon\right)\right]\left[1+\gamma^2\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}+\varepsilon\right)\right]^2. \tag{9}$$

Здесь и далее

$$\hat\Phi = \Phi\left(1+\frac{1}{2}\gamma^2\Phi\right)(1+\gamma^2\Phi)^{-2}, \tag{10}$$

а штрихи обозначают дифференцирование по переменной .

Следует отметить, что при выводе уравнений (8) и (9) не вводилось никаких дополнительных ограничений, поэтому эти уравнения справедливы при любых значениях r, ε и при любых энергиях φ_0 поступающих в систему частиц.

1.2. Линеаризация уравнений траекторий

Качество фокусировки определяется аберрациями, понимаемыми как отклонения от параксиального приближения. Одной из основных задач корпускулярной оптики является установление типов аберраций, присущих данной системе, а затем устранение или уменьшение наиболее важных из них. Для определения пространственных хроматических и геометрических аберраций до третьего порядка достаточно в уравнениях траекторий удержать члены не выше третьего малости относительно r и первого порядка — относительно $r\varepsilon$. С этой целью будем искать решения уравнений (8) и (9) для области, близкой к главной оптической оси, и при малых значениях ε.

Из представления о центральной частице следует, что для нее величина η равна нулю. Это значит, что существует решение $\eta = \eta(\xi)$ уравнения (9), величина которого мала при малых значениях r и ε. Мы будем пользоваться именно этим решением.

Используя известное распределение потенциала вблизи оси z

$$\frac{\varphi(r,z)}{\varphi_0} = \Phi(z) - \frac{r^2}{4}\frac{d^2\Phi(z)}{dz^2} + \frac{r^4}{64}\frac{d^4\Phi(z)}{dz^4} - \ldots, \tag{11}$$

а также разложения типа

$$f(z) = f(\xi + \eta) = f(\xi) + \eta f'(\xi) + \ldots, \tag{12}$$

получим

$$\sqrt{\Phi\left(1+\frac{1}{2}\gamma^2\Phi\right)}\frac{d}{d\xi}\left[\sqrt{\Phi\left(1+\frac{1}{2}\gamma^2\Phi\right)}\frac{dr}{d\xi}\right]$$

$$+\frac{1}{4}\Phi'' r(1+\gamma^2\Phi) = S + \gamma^2 S_\gamma^{(3)}, \tag{13}$$

$$2\tilde{\Phi}\eta' - \Phi'\eta = \tilde{F}, \tag{14}$$

где

$$S = \frac{1}{32}\Phi^{IV} r^3 - \frac{1}{4}\Phi''' r\eta, \tag{15}$$

$$S_\gamma^{(3)} = \Phi S - \sqrt{\Phi\left(1+\frac{1}{2}\gamma^2\Phi\right)}$$

$$\times \frac{d}{d\xi}\left[\frac{\delta}{(1+\gamma^2\Phi)}\sqrt{\Phi\left(1+\frac{1}{2}\gamma^2\Phi\right)}\frac{dr}{d\xi}\right], \tag{16}$$

$$\tilde{F} = \varepsilon - \frac{1}{4}\Phi'' r^2 - \tilde{\Phi} r'^2. \tag{17}$$

Здесь и далее

$$\tilde{\Phi} = \Phi\left(1+\frac{1}{2}\gamma^2\Phi\right)(1+\gamma^2\Phi), \tag{18}$$

$$\delta = \varepsilon + \Phi'\eta - \frac{1}{4}\Phi'' r^2. \tag{19}$$

При равенстве нулю правой части уравнения (13) получим уравнение, совпадающее по форме с известным уравнением параксиальных траекторий при высоких скоростях для электростатических линз [12]:

$$\sqrt{\Phi\left(1+\frac{1}{2}\gamma^2\Phi\right)}\frac{d}{d\xi}\left[\sqrt{\Phi\left(1+\frac{1}{2}\gamma^2\Phi\right)}\frac{dr}{d\xi}\right]$$

$$+\frac{1}{4}(1+\gamma^2\Phi)\Phi'' r = 0. \tag{20}$$

Из линейности и однородности этого уравнения относительно r следует, что электростатическое зеркало при релятивистских скоростях электронов способно создавать правильное электронно-оптическое изображение.

Для удобства анализа перепишем (20) следующим образом:

$$\sqrt{\Phi}\frac{d}{d\xi}\left(\sqrt{\Phi}\frac{dr}{d\xi}\right) + \frac{1}{4}\Phi'' r - \gamma^2 S_\gamma^{(1)} = 0, \tag{21}$$

где

$$S_\gamma^{(1)} = -\frac{1}{4}\Phi\left(\Phi' r' + \frac{1}{2}\Phi'' r\right). \tag{22}$$

Величина $\gamma^2 S_\gamma^{(1)}$, как видно из (20)–(22), определяет величину смещения гауссовой плоскости изображения в релятивистском случае относительно ее положения, определяемого уравнением параксиальных траекторий в нерелятивистском приближении:

$$\sqrt{\Phi}\frac{d}{d\xi}\left(\sqrt{\Phi}\frac{dr}{d\xi}\right) + \frac{1}{4}\Phi'' r = 0, \tag{23}$$

С учетом (20), (21) уравнение (13) принимает вид

$$\sqrt{\Phi}\frac{d}{d\xi}\left[\sqrt{\Phi}\frac{dr}{d\xi}\right] + \frac{1}{4}\Phi'' r = S + \gamma^2\left(S_\gamma^{(1)} + S_\gamma^{(3)}\right). \tag{24}$$

Откуда с учетом очевидного неравенства $S_\gamma^{(3)} \ll S_\gamma^{(1)}$ получим

$$\sqrt{\Phi}\frac{d}{d\xi}\left(\sqrt{\Phi}\frac{dr}{d\xi}\right) + \frac{1}{4}\Phi'' r = S + \gamma^2 S_\gamma^{(1)}. \tag{25}$$

Следует отметить, что между уравнениями (13) и (25) имеется одно очень важное отличие. Уравнение (13) пригодно для интегрирования методом последовательных приближении при любых скоростях частиц, поскольку малость его правой части обеспечивается только условиями параксиального приближения, в то время как малость правой части уравнения (25) обеспечивается не только условиями параксиального приближения, но и требованием сравнительно невысоких скоростей поступающих в зеркало частиц: $\gamma^2 \ll 1$ (случай субрелятивистского приближения).

В этом случае система уравнений (13) и (14) с учетом (20), (22) и (25) принимает вид

$$\Phi r'' + \left(\frac{1}{2}\Phi' r' + \frac{1}{4}\Phi'' r\right)\left(1+\frac{1}{2}\gamma^2\Phi\right) = \frac{1}{32}\Phi^{IV} r^3 - \frac{1}{4}\Phi''' r\eta, \tag{26}$$

$$2\Phi\eta' - \Phi'\eta = \varepsilon - \frac{1}{4}\Phi'' r^2 - \Phi r'^2. \tag{27}$$

1.3. Интегрирование уравнений траекторий

Уравнения (26), (27) записаны в такой форме, которая при указанных условиях допускает их решение методом последовательных приближений. При этом малость правых частей этих уравнений обеспечивается малостью dfвеличины $\sqrt{\Phi} r'$. Малость величины $\sqrt{\Phi} r'$ обусловлена либо малостью Φ в окрестности особой точки $\xi = z_u$, где $\Phi(z_u) = 0$, а r' в общем случае не может считаться малой, либо малостью r' в удаленных от особой точки областях.

Для решения системы уравнений (26), (27) сначала найдем величину $U = U(\xi)$, определяющую r в первом приближении, положив правую часть (26) равной нулю. Подставив U в правую часть уравнения (27), вычислим $\eta = \eta(\xi)$. Далее, подставив U и η в правую часть уравнения (26), найдем частное решение $\chi - \chi(\xi)$ уравнения (26). При этом общее решение этого уравнения будет иметь вид

$$r = U + \chi. \tag{28}$$

При равенстве нулю правой части (26) имеем линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\bar{\Phi}U'' + \frac{1}{2}\Phi'U' + \frac{1}{4}\Phi''U = 0, \tag{29}$$

где

$$\bar{\Phi} = \Phi\bigg/\left(1 + \frac{1}{2}\gamma^2\Phi\right). \tag{30}$$

В случае электронного зеркала, как указано выше, на главной оптической оси системы имеется точка $\xi = z_u$, в которой $\Phi(z_u) = 0$, а $\Phi'(z_u) \neq 0$. Эта точка является регулярной особой точкой для коэффициентов уравнения (29) при U и U'. В соответствии с теорией такого рода уравнений [13] выберем два линейно независимых частных решения этого уравнения, из которых одно $p = p(\xi)$ является аналитической функцией, а другое может быть представлено в виде

$$g = q\sqrt{\Phi}, \tag{31}$$

где $q = q(\xi)$ — также аналитическая функция, удовлетворяющая уравнению

$$\bar{\Phi}q'' + \frac{3}{2}\Phi'q' + \frac{3}{4}\Phi''q = 0, \tag{32}$$

следующему из (29) и (31).

Зададим начальные условия в особой точке $\xi = z_u$:

$$p_u = q_u = 1. \tag{33}$$

В точке $\xi = z_u$ аналитические функции $p = p(\xi)$ и $q = q(\xi)$ имеют все производные, первая из которых имеет следующий вид:

$$p'_u = q'_u = -\frac{1}{2}\frac{\Phi''_u}{\Phi'_u}. \tag{34}$$

Здесь и далее индексом „u“ отмечены значения величин в точке $\xi = z_u$.

Используя эти частные решения как фундаментальную систему решений уравнения (29), общее решение этого уравнения представим в виде

$$U = ap + bg, \tag{35}$$

где a и b — произвольные постоянные.

С учетом (35) решение уравнения (27) представим в виде

$$\eta = a^2\eta_p + ab\eta_{pg} + b^2\eta_g + \varepsilon\eta_\varepsilon, \tag{36}$$

где η_p, η_{pg}, η_g, η_ε — решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка

$$2\Phi\eta'_j - \Phi'\eta_J = -F_j, \qquad (j = p,\ pg,\ g,\ \varepsilon). \tag{37}$$

Здесь и далее

$$F_p = \frac{1}{4}\Phi''p^2 + \Phi p'^2, \qquad \frac{1}{2}F_{pg} = \frac{1}{4}\Phi''pg + \Phi p'g',$$

$$F_g = \frac{1}{4}\Phi''g^2 + \Phi g'^2, \qquad F_\varepsilon = -1. \tag{38}$$

При этом в точке $\xi = z_u$ имеет место равенство

$$\eta_{ju} = \frac{F_{ju}}{\Phi'_u} \qquad (j = p,\ pg,\ g,\ \varepsilon). \tag{39}$$

В особой точке $\xi = z_u$ коэффициенты уравнений (37) при η_p, η_{pg}, η_g, η_ε и в свободном члене обращаются в бесконечность. Поэтому для упрощения решения уравнения (37) перепишем его путем умножения на интегрирующий множитель $\frac{1}{2\Phi\sqrt{\Phi}}$ в виде уравнений в полных дифференциалах:

$$\left(\frac{\eta_j - \eta_{ju}}{\sqrt{\Phi}}\right)' = -\frac{1}{2\Phi\sqrt{\Phi}}\left(F_j - F_{ju}\frac{\Phi'}{\Phi'_u}\right),$$

$$(j = p,\ pg,\ g,\ \varepsilon). \tag{40}$$

Решая эти уравнения с учетом (29) и (32), получим

$$\eta_p = -\frac{1}{2}pp' + \frac{\sqrt{\Phi}}{2}\int_{z_u}^{\xi}\frac{pp''}{\sqrt{\Phi}}\left(1 + \frac{\bar{\Phi}}{\Phi}\right)d\xi, \tag{41}$$

$$\eta_{pg} = \sqrt{\Phi}p'_u - gp' + \sqrt{\Phi}\int_{z_u}^{\xi} qp''\left(1 + \frac{\bar{\Phi}}{\Phi}\right)d\xi, \tag{42}$$

$$n_g = \frac{1}{4}\frac{\bar{\Phi}}{\Phi}\Phi'q^2 - \frac{1}{2}\Phi qq' + \frac{\sqrt{\Phi}}{2}\int_{z_u}^{\xi}\sqrt{\Phi}qq''\left(1 + \frac{\bar{\Phi}}{\Phi}\right)d\xi, \tag{43}$$

$$n_\varepsilon = -\frac{1}{\Phi'_u}\left[1 + \frac{\sqrt{\Phi}}{2}\int_{z_u}^{\xi}\frac{1}{\Phi\sqrt{\Phi}}(\Phi' - \Phi'_u)d\xi\right]. \tag{44}$$

Отметим, что величины η_p, η_{pg}, η_g, η_ε повсюду конечны вместе со своими производными.

Теперь определим частное решение $\chi = \chi(\xi)$ уравнения (26). С учетом (35) и (36) представим его в виде

$$\chi = a^3\chi_1 + a^2b(\chi_2 + \chi_3) + ab^2(\chi_4 + \chi_5)$$
$$+ b^3\chi_6 + \varepsilon(a\chi_7 + b\chi_8), \tag{45}$$

где $\chi_m = \chi_m(\xi)$ $(m = 1 - 8)$ — решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\Phi\chi''_m + \left(\frac{1}{2}\Phi'\chi'_m + \frac{1}{4}\Phi''\chi_m\right)\left(1 + \frac{1}{2}\gamma^2\Phi\right) = S_m$$

$$(m = 1 - 8). \tag{46}$$

Здесь

$$S_1 = pS_p, \qquad S_2 = gS_p,$$
$$S_3 = pS_{pg}, \qquad S_4 = gS_{pg},$$
$$S_5 = pS_g, \qquad S_6 = gS_g,$$

$$S_7 = pS_\varepsilon, \qquad S_8 = gS_\varepsilon, \tag{47}$$

где

$$S_p = \frac{1}{32}\Phi^{IV} p^2 - \frac{1}{4}\Phi''' \eta_p,$$

$$S_{pg} = \frac{1}{16}\Phi^{IV} pg - \frac{1}{4}\Phi''' \eta_{pg},$$

$$S_g = \frac{1}{32}\Phi^{IV} g^2 - \frac{1}{4}\Phi''' \eta_g,$$

$$S_\varepsilon = \frac{1}{32}\Phi''' \eta_\varepsilon. \tag{48}$$

Решая уравнения (46) методом вариации произвольных постоянных, получим

$$\chi_j = -\frac{1}{W}\left[p\int\limits_{z_u}^{\xi} \frac{gS_j}{\sqrt{\Phi}} d\xi - g\int\limits_{z_u}^{\xi} \frac{pS_j}{\sqrt{\Phi}} d\xi\right], \tag{49}$$

где W — инвариант Вронского:

$$W = \sqrt{\Phi}(pg' - p'g) = \frac{1}{2}\Phi'_u. \tag{50}$$

Подынтегральные выражения в (49), как видно из (47), (48), содержат величины η_p, η_{pg}, η_g, η_ε, которые, в свою очередь, определены через интегралы (41)–(44). Численный расчет двойных интегралов связан с определенными трудностями. Для приведения частных решений $\chi_m = \chi_m(\xi)$ $(m = 1{-}8)$ к удобному для численных расчетов виду выполнены следующие преобразования. Во-первых, от таких двойных интегралов можно освободиться интегрированием по частям с помощью равенств, следующих из (37), (38):

$$\frac{1}{4}\Phi''' p^2 = F'_p, \quad \frac{1}{4}\Phi''' pg = \frac{1}{2}F'_{pg}, \quad \frac{1}{4}\Phi''' g^2 = F'_g,$$

$$F'_l\left(\frac{\eta_\varepsilon}{\sqrt{\Phi}}\right) = \left(\frac{F_l\eta_\varepsilon + \eta_l}{\sqrt{\Phi}}\right)', \quad (l = p,\ pg,\ g). \tag{51}$$

Кроме того, используя равенства

$$pS_2 = gS_1, \quad pS_4 = gS_3, \quad pS_6 = gS_5, \quad pS_8 = gS_7, \tag{52}$$

$$gS_4 - 2pS_6 = \frac{1}{4}\Phi'''\left(2pg\eta_g - g^2\eta_{pg}\right)$$

$$= 2\sqrt{\Phi}\left[\sqrt{\Phi}\left(\eta_{pg}\eta'_g - \eta_g\eta'_{pg}\right)\right]', \tag{53}$$

$$pS_3 - 2gS_1 = \frac{1}{4}\Phi'''\left(2pg\eta_g - p^2\eta_{pg}\right)$$

$$= 2\sqrt{\Phi}\left[\sqrt{\Phi}\left(\eta_{pg}\eta'_p - \eta_p\eta'_{pg}\right)\right]', \tag{54}$$

$$gS_2 - 2pS_5 = \frac{1}{4}\Phi'''\left(p^2\eta_g - g^2\eta_p\right)$$

$$= 2\sqrt{\Phi}\left[\sqrt{\Phi}\left(\eta_p\eta'_g - \eta_g\eta'_p\right)\right]', \tag{55}$$

следующие также из равенств (37), (38) и (41)–(44), можно сократить количество интегралов, определяющих $\chi_m = \chi_m(\xi)$ $(m = 1{-}8)$.

Далее, используя очевидные равенства

$$\frac{1}{2}pF_{pg} - gF_p = \sqrt{\Phi}Wp',$$

$$pF_g - \frac{1}{2}gF_{pg} = \sqrt{\Phi}Wg', \tag{56}$$

следующие из (29) и (38), решения $\chi_m = \chi_m(\xi)$ $(m = 1{-}8)$ можно записать в виде

$$\chi_1 = \eta_p p' + pJ_2 - gJ_1, \tag{57}$$

$$\chi_2 = \eta_p g' + pJ_4 - g\left(J_2 - \frac{1}{2}p'^2\right), \tag{58}$$

$$\chi_3 = \eta_{pg} p' + 2\left[pJ_3 - g\left(J_2 - \frac{1}{2}p'^2\right)\right], \tag{59}$$

$$\chi_4 = \eta_{pg} g' + 2\left[pJ_5 - g\left(J_3 - \frac{1}{2}p'g'\right)\right], \tag{60}$$

$$\chi_5 = \eta_g p' + pJ_5 - g\left(J_4 - \frac{1}{2}p'g'\right), \tag{61}$$

$$\chi_6 = \eta_g g' + pJ_6 - g\left(J_5 - \frac{1}{2}g'^2\right), \tag{62}$$

$$\chi_7 = \eta_\varepsilon p' + pJ_8 - gJ_7, \tag{63}$$

$$\chi_8 = \eta_\varepsilon g' + pJ_9 - g\left(J_8 - \frac{1}{2\Phi}\right). \tag{64}$$

Здесь

$$J_1 = -\frac{1}{\Phi'_u}\int\limits_{z_u}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\Phi}}\left[L_p p^3 + \left(1 + \frac{\bar{\Phi}}{\Phi}\right)F_p p p''\right] d\xi, \tag{65}$$

$$J_2 = -\frac{1}{\Phi'_u}\int\limits_{z_u}^{\infty} \frac{1}{\Phi}\left[L_p p^2 g + \left(1 + \frac{\bar{\Phi}}{\Phi}\right)F_p g p''\right] d\xi$$

$$+ \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\bar{\Phi}}{\Phi}\right)p'^2, \tag{66}$$

$$J_3 = -\frac{1}{\Phi'_u}\int\limits_{z_u}^{\infty} \frac{1}{\Phi}\left[L_p pg^2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\bar{\Phi}}{\Phi}\right)F_{pg} g p''\right] d\xi, \tag{67}$$

$$J_4 = -\frac{1}{\Phi'_u}\int\limits_{z_u}^{\infty} \left[L_g p^2 g + \left(1 + \frac{\bar{\Phi}}{\Phi}\right)F_p g q''\right] d\xi, \tag{68}$$

$$J_5 = -\frac{1}{\Phi'_u}\int\limits_{z_u}^{\infty} \left[L_g pg^2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\bar{\Phi}}{\Phi}\right)F_{pg} g q''\right] d\xi, \tag{69}$$

$$J_6 = -\frac{1}{\Phi'_u}\int\limits_{z_u}^{\infty} \left[L_g g^3 + \left(1 + \frac{\bar{\Phi}}{\Phi}\right)F_g g q''\right] d\xi, \tag{70}$$

$$J_7 = \frac{1}{\Phi'_u} \int\limits_{z_u}^{\infty} \frac{pp''}{\sqrt{\Phi}} \left(1 + \frac{\bar{\Phi}}{\Phi}\right) d\xi, \tag{71}$$

$$J_8 = \frac{1}{\Phi'_u} \int\limits_{z_u}^{\infty} qp'' \left(1 + \frac{\bar{\Phi}}{\Phi}\right) d\xi, \tag{72}$$

$$J_9 = \frac{1}{\Phi'_u} \int\limits_{z_u}^{\infty} \sqrt{\Phi} qq'' \left(1 + \frac{\bar{\Phi}}{\Phi}\right) d\xi, \tag{73}$$

где

$$L_p = \frac{1}{16} \left(\Phi^{IV} p + 4\Phi''' p'\right),$$

$$L_g = \frac{1}{16} \left[\left(\Phi^{IV} - 2\frac{\bar{\Phi}}{\Phi}\frac{\Phi'''\Phi'}{\Phi}\right) q + 4\Phi''' q'\right]. \tag{74}$$

Здесь и далее знак „∞“ означает, что верхняя граница интегрирования отодвинута на бесконечность. Это, очевидно, не может изменить результата, так как подынтегральная функция равна нулю в свободных от поля областях.

С учетом (36) и (57)–(64), можно записать (45) в виде

$$\chi = \eta(ap' + bg') + \Lambda, \tag{75}$$

где $\Lambda = \Lambda(\xi)$ — величина, не содержащая динамическую переменную $\eta = \eta(\xi)$:

$$\Lambda = a^3\Lambda_1 + a^2b\lambda_2 + ab^2\Lambda_3 + b^3\Lambda_4 + \varepsilon(a\Lambda_5 + b\Lambda_6). \tag{76}$$

Здесь

$$\Lambda_1 = pJ_2 - gJ_1, \tag{77}$$

$$\Lambda_2 = p(2J_3 + J_4) - 3g\left(J_2 - \frac{1}{2}p'^2\right), \tag{78}$$

$$\Lambda_3 = 3pJ_5 - g\left(2J_3 + J_4 - \frac{3}{2}g'p'\right), \tag{79}$$

$$\Lambda_4 = pJ_6 - g\left(J_5 - \frac{1}{2}p'^2\right), \tag{80}$$

$$\Lambda_5 = pJ_8 - gJ_7, \tag{81}$$

$$\Lambda_6 = pJ_9 - g\left(J_8 + \frac{1}{2\Phi}\right). \tag{82}$$

Таким образом, в подвижной системе координат уравнения траекторий частиц в поле зеркала от особой точки $\xi = z_u$ до произвольной точки $\xi = \mathrm{const}$ описываются системой уравнений

$$r = ap(\xi) + bg(\xi) + \eta(\xi)[ap'(\xi) + bg'(\xi)] + \Lambda, \tag{83}$$

$$z = \xi + a^2\eta_p(\xi) + ab\eta_{pg}(\xi) + b^2\eta_g(\xi) + \varepsilon\eta_\varepsilon(\xi), \tag{84}$$

следующих из равенств (6), (28), (35), (36) и (75).

1.4. Уравнения траекторий в лабораторной системе координат

Система уравнений (83), (84) определяет в параметрическом виде траектории частиц в движущейся системе координат в зависимости от положения ξ на главной оптической оси z некоторой выбранной (центральной) частицы. Для того чтобы получить уравнение траекторий частиц $r = r(z)$ в виде явной зависимости от координаты z оптической оси системы, выполним следующие преобразования. Разрешим уравнение (84) относительно ξ и подставим зависимость $\xi = z - \eta(z)$ в уравнение (83). Затем удержим в разложении величины не выше третьего порядка малости относительно начальных параметров движения частицы a, b, ε.

После выполнения этих преобразований уравнения траекторий принимает обычный для лабораторной системы координат вид

$$r = ap + bg + \Lambda. \tag{85}$$

Здесь и далее $p = p(z)$, $g = g(z)$, $\Lambda = \Lambda(z)$ — функции, ранее определенные как функции от ξ.

Для определения конкретной траектории необходимо выразить произвольные постоянные a и b через начальные условия. При этом необходимо учесть, что электронные зеркала характеризуются наличием двух ветвей траектории: прямой — от начальной (предметной) плоскости до точки поворота, и обратной — от точки поворота до произвольной плоскости. При этом, как следует из условия непрерывности траектории частицы и ее скорости в окрестности точки поворота, различие уравнений для прямой и обратной ветвей траектории состоит лишь в том, что значения постоянной a для прямой и обратной ветвей траектории совпадают, а значения постоянной b — различаются знаком [10]. Тогда уравнения траектории и ее наклона к оси z с точностью до величин третьего порядка малости можно записать в виде

$$r = ap(z) \pm bg(z) + \Lambda, \tag{86}$$

$$r' = ap'(z) \pm bg'(z) + \Lambda', \tag{87}$$

где

$$\Lambda = a^3\Lambda_1 \pm a^2b\Lambda_2 + ab^2\Lambda_3 \pm b^3\Lambda_4 + \varepsilon(a\Lambda_5 \pm b\Lambda_6), \tag{88}$$

$$\Lambda' = a^3\Lambda'_1 \pm a^2b\Lambda'_2 + ab^2\Lambda'_3 \pm b^3\Lambda'_4 + \varepsilon(a\Lambda'_5 \pm b\Lambda'_6). \tag{89}$$

Здесь и далее при двойном знаке „$\pm$“ знак „+“ относится к прямой ветви траектории, а знак „$-$“ — к обратной, а штрихи обозначают дифференцирование по переменной z.

Решая систему уравнений (86), (87) для прямой ветви, получим

$$a = \alpha + \frac{2}{\Phi'_u}(g_0\Lambda'_0 - g'_0\Lambda_0),$$

$$b = \beta - \frac{2}{\Phi'_u}(p_0\Lambda'_0 - p'_0\Lambda_0), \tag{90}$$

где

$$\alpha = -\frac{2}{\Phi'_u}(g_0 r'_0 - g'_0 r_0), \quad \beta = \frac{2}{\Phi'_u}(p_0 r'_0 - p'_0 r_0). \tag{91}$$

Здесь и далее индексом „0“ отмечены значения величин в начальной (предметной) плоскости $z = z_0$.

С учетом (90), (91), уравнение траектории для обратной ветви можно записать в виде

$$r = U + \Delta r, \tag{92}$$

где

$$U = -\frac{2}{\Phi'_u}\left[r'_0(p_0 g + p g_0) - r_0(p'_0 g + p g'_0)\right] \tag{93}$$

— уравнение параксиальной траектории,

$$\Delta r = \Lambda + \frac{2}{\Phi'_u} \times \left[\Lambda'_0(p_0 g + p g_0) - \Lambda_0(p'_0 g + p g'_0)\right] \tag{94}$$

— суммарная пространственная аберрация.

2. Электронно-оптические свойства зеркала

2.1. Пространственная фокусировка

Условие пространственной фокусировки частиц, как это видно из (93), определяется равенством

$$p_0 g(z_G) + p(z_G) g_0 = 0, \tag{95}$$

где $z = z_G$ — положение гауссовой плоскости изображения зеркала.

Откуда с учетом (93) следует

$$\frac{p(z_G)}{p_0} = -\frac{g(z_G)}{g_0} = \frac{U}{r_0} = M, \tag{96}$$

где M — линейное увеличение зеркала.

Как видно из (93), условие фокусировки параллельных пучков частиц определяется равенством

$$p'_0 g(z_F) + p(z_F) g'_0 = 0, \tag{97}$$

где $z = z_F$ — положение фокальной плоскости зеркала.

Откуда с учетом (93) следует

$$\frac{p(z_F)}{p'_0} = -\frac{g(z_F)}{g'_0} = \frac{U}{r'_0} = f, \tag{98}$$

где f — фокусное расстояние зеркала.

2.2. Кардинальные элементы зеркала

Для определения кардинальных элементов воспользуемся характерными для зеркала траекториями. Решение $p = p(z)$ описывает траектории, прямые и обратные ветви которых совпадают, т.е. проходят через центр кривизны зеркала $z = z_C$, а решение $g = g(z)$ — траектории, прямые и обратные ветви которых симметричны относительно оптической оси зеркала, т.е. проходят через вершину зеркала $z = z_V$ [10]. Таким образом, когда предмет и его изображение находятся в свободном от поля пространстве, функции $p = p(z)$ и $g = g(z)$ можно записать в виде

$$p = (z - z_C)p', \qquad g = (z - z_V)g'. \tag{99}$$

С учетом этих равенств из (97), (98) следует, что положение фокуса зеркала и его фокусное расстояние определяются равенствами

$$z_F = \frac{1}{2}(z_V + z_C), \qquad f = \frac{1}{2}(z_V - z_C). \tag{100}$$

2.3. Аберрации

Суммарная аберрация (94) в гауссовой плоскости с учетом (95), (96) принимает вид

$$\Delta r = \Lambda - M\Lambda_0. \tag{101}$$

Перепишем это равенство с учетом (88) в виде

$$\Delta r = \alpha^3 G_1 + \alpha^2\beta G_2 + \alpha\beta^2 G_3 + \beta^3 G_4 + \varepsilon(\alpha G_5 + \beta G_6), \tag{102}$$

где

$$G_i = \Lambda_i - M\Lambda_{0i}, \qquad (i = 1,\ 3,\ 5),$$
$$G_i = -(\Lambda_i + M\Lambda_{0i}), \qquad (i = 2,\ 4,\ 6). \tag{103}$$

Откуда с учетом (77)–(82) и (96) получим

$$G_1 = 2Mg_0 J_1, \qquad G_2 = -2Mp_0(2J_3 + J_4),$$
$$G_3 = 2Mg_0\left(2J_3 + J_4 - \frac{3}{2}g'p'\right), \qquad G_4 = -2Mp_0 J_6,$$
$$G_5 = 2Mg_0 J_7, \qquad G_6 = -2Mp_0 J_9. \tag{104}$$

После громоздких, но несложных преобразований с учетом (91) получим

$$\Delta r = M\Big[r'^3_0 B + 3r'^2_0 r_0 F + r'_0 r_0^2(2C + D) + r_0^3 E + \varepsilon(r'_0 K_1 + r_0 K_2)\Big], \tag{105}$$

где B, F, C, D, E — постоянные геометрических аберраций зеркала: сферической, комы, астигматизма, кривизны поля изображения, дисторсии, а K_1 и K_2 — постоянные хроматической аберрации двух видов (осевой и изменения увеличений):

$$B = \frac{1}{R^3}\left[Z_V^4\bar{J_1} + 2Z_V^2 Z_C^2(2\bar{J_3} + \bar{J_4}) + Z_C^4\bar{J_6} + 3Z_V^2 Z_C^2\right], \tag{106}$$

$$F = -\frac{1}{R^3}\Big[Z_V^2\bar{J_1} + 2(2\bar{J_3} + \bar{J_4})Z_V Z_C Z_F + Z_C^3\bar{J_6} + Z_V Z_C(2Z_V + Z_C)\Big], \quad (107)$$

$$C = \frac{1}{R^3}\Big[Z_V^2\bar{J_1} + 2Z_V Z_C(2\bar{J_3} + \bar{J_4}) + Z_C^2\bar{J_6} + Z_V(2Z_C + Z_V)\Big], \quad (108)$$

$$D = \frac{1}{R^3}\Big[Z_V^2\bar{J_1} + (Z_V^2 + Z_C^2)(2\bar{J_3} + \bar{J_4}) + Z_C^2\bar{J_6} + Z_V(2Z_C + Z_V)\Big], \quad (109)$$

$$E = -\frac{1}{R^3}\Big[Z_V\bar{J_1} + 2Z_F(2\bar{J_3} + \bar{J_4}) + Z_C\bar{J_6} + 3Z_V\Big], \quad (110)$$

$$K_1 = \frac{1}{R}\left(Z_V^2\bar{J_7} + Z_C^2\bar{J_9}\right), \quad (111)$$

$$K_2 = -\frac{1}{R}\left(Z_V\bar{J_7} + Z_C\bar{J_9}\right). \quad (112)$$

где $R = z_V - z_C$ — радиус зеркала, $Z_V = z_0 - z_V$, $Z_C = z_0 - z_c$, $Z_F = z_0 - z_F$, а

$$\bar{J_1} = -\frac{2g_0'}{p_0'^3}J_1, \quad \bar{J_3} = -\frac{2}{p_0'g_0'}J_3, \quad \bar{J_4} = -\frac{2}{p_0'g_0'}J_4,$$

$$\bar{J_6} = -\frac{2p_0'}{g_0'^3}J_6, \quad \bar{J_7} = -\frac{2g_0'}{p_0'}J_7, \quad \bar{J_9} = -\frac{2p_0'}{g_0'}J_9. \quad (113)$$

Заметим, что выражения для постоянных аберраций (106)−(112) в нерелятивистском приближении полностью совпадают с соответствующими выражениями [10] для электростатического зеркала.

3. Трехэлектродное зеркало, свободное от сферической и осевой хроматической аберраций при учете релятивизма

В настоящей работе рассчитано трехэлектродное зеркало вращательной симметрии, состоящее из соосных цилиндров равного диаметра d, находящихся под потенциалами V_1, V_2, V_3 (рис. 1). При этом рассмотрен режим работы зеркала, когда начальная (предметная) плоскость

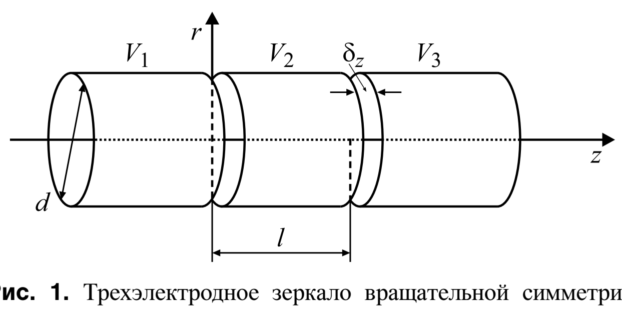

Рис. 1. Трехэлектродное зеркало вращательной симметрии. V_1, V_2, V_3 — потенциалы на электродах, d — диаметр цилиндра, l — длина среднего электрода, δ_z — ширина зазора между электродами.

совмещена с фокальной плоскостью зеркала, как и в работе [14].

Осевое распределение электростатического потенциала такого зеркала описывается соотношением [15]:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}\Big[(V_1 + V_3) + \sum_{j=1}^{2}(V_{i+1} - V_i)U(z - z_i)\Big], \quad (114)$$

где

$$U(z - z_i) = \operatorname{sign}(z - z_i) \sum_{s=1}^{\infty}\big[1 - B_s\exp(-2\alpha_s|z - z_i|/d)\big], \quad (115)$$

$$B_s = \prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - \alpha_s^2/\alpha_m^2\right)^{-1}_{s\neq m}. \quad (116)$$

Здесь z_i — координата середины i-го зазора между электродами, α_s, α_m — корни функции Бесселя нулевого порядка. Принято, что положительное направление оси z совпадает с направлением движения падающих на зеркало ионов, а начало координат помещено в середине первого зазора (между первым и вторым электродами).

Расчет зеркала производился следующим образом. Для значения ширины среднего электрода $l = 0.6d$ находились значения положения предметной плоскости, совмещенной с фокальной плоскостью зеркала, а также значения потенциала V_2 на втором (среднем) электроде и запирающего потенциала V_3 на третьем электроде, обеспечивающие выполнение условий устранения сферической и осевой хроматической аберрации одновременно в зависимости от значения безразмерной величины γ^2, представляющей собой количественную характеристику релятивистских эффектов поступающих в поле зеркала частиц.

Результаты расчета представлены на рис. 2−4. При этом на рис. 2 и 3 приведены значения положения

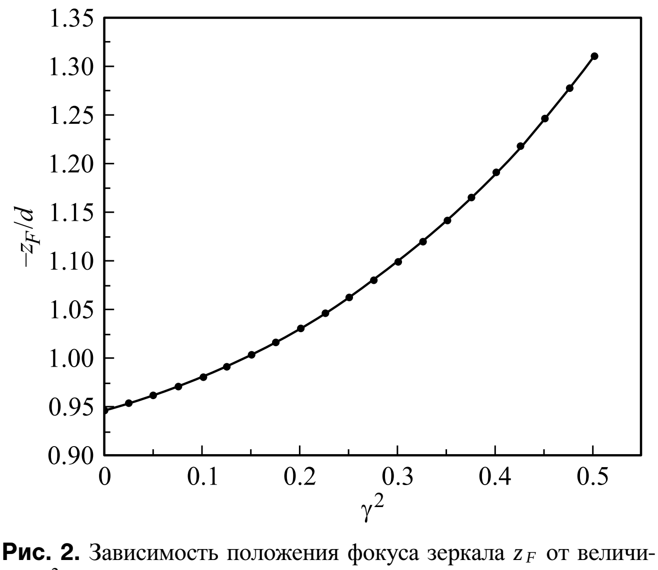

Рис. 2. Зависимость положения фокуса зеркала z_F от величины γ^2.

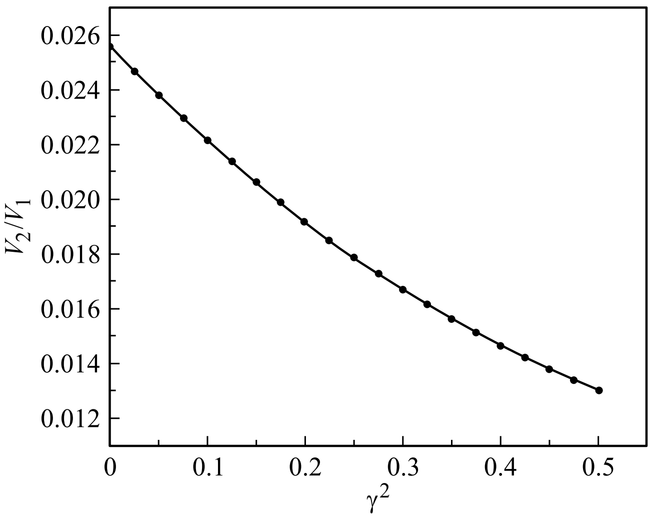

Рис. 3. Зависимость потенциала на среднем электроде V_2 от величины γ^2.

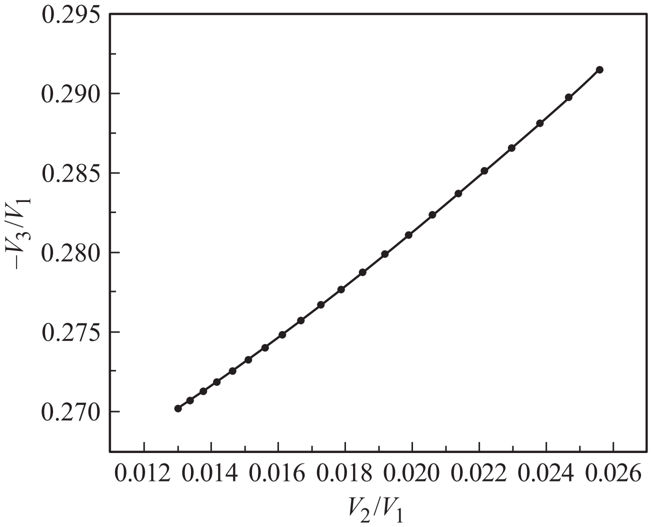

Рис. 4. Зависимость запирающего потенциала V_3 от потенциала V_2.

фокуса зеркала z_F и потенциала на среднем электроде в зависимости от безразмерной величины γ^2, а на рис. 4 — зависимость запирающего потенциала V_3 на третьем электроде от потенциала V_2.

Заметим, что в нерелятивистском приближении результаты данных расчетов полностью совпадают с результатами [14].

Заключение

Известный метод теоретического исследования фокусировки пучков заряженных частиц, опирающийся на представление динамических уравнений в движущейся системе координат, связанной с „центральной" частицей, обобщен на случай суб-релятивистских скоростей частиц. Такое представление существенно расширяет возможности теории фокусировки и позволяет выполнить аберрационный анализ электронно-оптической системы в экстремальных случаях, когда кинетическая энергия в процессе движения частиц изменяется в предельно широком диапазоне энергий — от нулевых значений до величин, сравнимых с энергией покоя электрона. Такие ситуации возникают, например, в эмиссионных системах при ускорении пучков до больших энергий или при отражении релятивистских пучков в электростатических зеркалах.

Полученные результаты и формулы могут быть использованы при разработке новых схем корректоров сферохроматических аберраций электронных линз для нужд высоковольтной электронной микроскопии и пр. Необходимо отметить тот факт, что субрелятивистский режим работы электронного зеркала сопровождается не только появлением смещения положения гауссовой плоскости изображения, но также приводит к изменению электрических параметров зеркала, обеспечивающих условия одновременного устранения сферической и осевой хроматической аберраций. Учет этих изменений может привести к существенному улучшению качества электронного изображения за счет уменьшения основных сферохроматических электронно-оптических аберраций в сочетании с естественным уменьшением дифракционного рассеяния.

Финансирование работы

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант № AP05132483).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] П. Хокс, Э. Каспер. *Основы электронной оптики* (Мир, М., 1993)
[2] P.W. Hawkes. Phil. Trans. R. Soc. A, **367**, 3637 (2009).
[3] M. Haider, H. Rose, S. Uhlemann, E. Schwan, B. Kabius, K. Urban. Ultramicroscopy, **75**, 53 (1998). DOI:10.1016/S0304-3991(98)00048-54
[4] M. Haider, H. Muller, S. Uhlemann. Adv. Imaging Electron Phys., **153**, 43 (2008).
[5] G.F. Rempfer, J. Appl. Phys., **67** (10), 6027 (1990).
[6] D. Preikszas, H. Rose. J. Electron Microsc., **46** (1), 1 (1997).
[7] P. Hartel, D. Preikszas, R. Spehr, H. Muller, H. Rose. Adv. Imaging Electron Phys., **120**, 41 (2002).
[8] O. Krivanek, N. Dellby, R.J. Keyse, M. Murfitt, C. Own, Z. Szilagyi. Adv. Imaging Electron Phys., **153**, 121 (2008).
[9] S.B. Bimurzaev, N.U. Aldiyarov, E.M. Yakushev. Microscopy, **66**, 356 (2017).
[10] E.M. Yakushev, L.M. Sekunova. Adv. Electronics Electron Phys., **68** (5), 337 (1986).

[11] E.M. Yakushev Adv. Imaging Electron Phys., **178**, 147 (2013).
[12] В. Глазер. *Основы электронной оптики* (ГИТТЛ, М., 1957)
[13] Г. Корн, Т. Корн. *Справочник по математике для научных работников и инженеров* (Наука, М., 1968)
[14] S.B. Bimurzaev, G.S. Serikbaeva, E.M. Yakushev. J. Electron Microscopy, **52** (4), 365 (2003).
[15] Б.В. Бобыкин, Ю.А. Невинный, Е.М. Якушев. ЖТФ, **45**, 2368 (1975).