01

Двухкомпонентный векторный бризер

© Г.Т. Адамашвили

Грузинский технический университет, Тбилиси, Грузия
E-mail: guram_adamashvili@ymail.com

Поступило в Редакцию 14 августа 2020 г.
В окончательной редакции 14 августа 2020 г.
Принято к публикации 3 марта 2021 г.

Рассматривается двухкомпонентное решение модифицированного уравнения Бенджамина–Бона–Махони. С помощью обобщенной версии пертурбативного метода редукции уравнение трансформируется к связанным нелинейным уравнениям Шредингера для вспомогательных функций. Получено явное аналитическое выражение для формы и параметров двухкомпонентного векторного бризера, компоненты которого осциллируют на суммарной и разностной частотах и волновых числах.

Ключевые слова: двухкомпонентные векторные бризеры, модифицированное уравнение BBM, обобщенный пертурбативный метод редукции.

DOI: 10.21883/PJTF.2021.11.51000.18511

Нелинейные уединенные волны, такие как бризеры и их различные разновидности, являются одним из основных объектов исследования в теории нелинейных волн. Хотя эти волны встречаются в совершенно разных материалах и описывают различные физические явления, многие их общие свойства идентичны. Нелинейные уединенные волны можно разделить на два основных типа: однокомпонентные и двухкомпонентные уединенные волны. Свойства и методы исследования каждого из них различны: методы изучения однокомпонентных волн совершенно неприемлемы для изучения двухкомпонентных уединенных волн. Это связано с тем, что для изучения двухкомпонентных волн требуется большее количество вспомогательных функций и параметров. Ввиду того что число нелинейных уравнений, полностью интегрируемых методом обратной задачи [1], как для однокомпонентных, так и для двухкомпонентных уединенных волн весьма ограничено, используют различные асимптотические методы. В частности, пертурбативный метод редукции (ПМР) адаптирован для изучения однокомпонентных уединенных волн, в этом случае используют одну комплексную вспомогательную функцию и два постоянных параметра [2]. В отличие от ПМР в его обобщенной версии используются две комплексные вспомогательные функции и восемь постоянных параметров, что позволяет исследовать двухкомпонентные нелинейные уединенные волны [3,4].

Волновые уравнения в нелинейной оптике и нелинейной акустике для медленных огибающих функции содержат их первые и вторые производные по пространственным координатам и времени. Первые производные члены описывают формирование однокомпонентных солитонов и бризеров, в то время как относительно малые вторые производные члены (по сравнению с первыми производными) могут описать образование связанных состояний двух однокомпонентных бризеров, движущихся как единое целое, и обеспечивают формирование двухкомпонентного векторного бризера. При этом одна компонента такого векторного импульса осциллирует на суммарной, а вторая — на разностной частоте и волновых числах. Именно такая ситуация реализуется для оптических и акустических резонансных двухкомпонентных векторных бризеров самоиндуцированной прозрачности — векторных 0π-импульсов [3,4]. Изучение нерезонансных нелинейных волн в диспергирующей и нелинейной среде керровского типа привело к аналогичным результатам: формированию двухкомпонентного векторного бризера, осциллирующего на суммарной и разностной частотах и волновых числах (СРЧ) [5].

Учитывая математическую аналогию между акустическими и электромагнитными волнами, интересно рассмотреть совершенно другие явления и соответствующие им уравнения, чем нелинейные уравнения, изучаемые в нелинейной оптике и нелинейной акустике, а именно рассмотреть поверхностные волны в диспергирующих нелинейных средах, ангармонические фононы в кристаллах, акустогравитационные волны в тонких слоях жидкости, нелинейные явления в плазме, нелинейные волны в определенном классе акустических метаматериалов „масса-в-массе“ и т. д. Для описания этих явлений используют уравнение Бенджамина–Бона–Махони (BBM) и его модифицированную версию.

Однокомпонентные нелинейные волны модифицированного уравнения BBM широко исследованы [6–10]. Однако свойства и методы исследования двухкомпонентного векторного бризера, осциллирующего на СРЧ модифицированного уравнения BBM, качественно отличаются от свойств и методов исследования однокомпонентных солитона и бризера этого уравнения. Цель настоящей работы — доказать, что модифицированное уравнение BBM

$$u_t + Cu_z + \beta u_{zzt} + au^2 u_z = 0 \qquad (1)$$

имеет решение в виде двухкомпонентного векторного бризера, осциллирующего на СРЧ, который не был исследован до сих пор. Здесь $u(z,t)$ — действительная функция, C, β и a — произвольные постоянные.

Уравнение (1) можно упростить, используя метод медленно меняющейся огибающей. Для этого функцию $u(z,t)$ можно представить в виде

$$u = \sum_{l=\pm 1} \hat{u}_l e^{il(kz-\omega t)}, \qquad (2)$$

где $\hat{u}_l(z,t)$ — медленно меняющаяся комплексная амплитуда. Подставляя уравнение (2) в нелинейное уравнение (1), получаем закон дисперсии импульса в среде

$$\omega = \frac{Ck}{1-\beta k^2}. \qquad (3)$$

Для исследования двухкомпонентного решения уравнения (1) мы используем обобщенный ПМР [3–5], с помощью которого функцию $\hat{u}_l$ можно представить как

$$\hat{u}_l(z,t) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon^{\alpha} Y_{l,n} f_{l,n}^{(\alpha)}(\xi_{l,n}, \tau), \qquad (4)$$

где

$$Y_{l,n} = e^{in(Q_{l,n}z - \Omega_{l,n}t)}, \quad \xi_{l,n} = \varepsilon Q_{l,n}(z - v_{l,n}t),$$

$$\tau = \varepsilon^2 t, \quad v_{l,n} = \frac{d\Omega_{l,n}}{dQ_{l,n}},$$

ε — малый параметр. Такое разложение позволяет выделить из $\hat{u}_l$ еще более медленно меняющиеся вспомогательные функции $f_{l,n}^{(\alpha)}$. Предполагается, что величины $\Omega_{l,n}$, $Q_{l,n}$ и $f_{l,n}^{(\alpha)}$ удовлетворяют неравенствам $\omega \gg \Omega_{l,n}$, $k \gg Q_{l,n}$,

$$\left|\frac{\partial f_{l,n}^{(\alpha)}}{\partial t}\right| \ll \Omega_{l,n} \left| f_{l,n}^{(\alpha)} \right|,$$

$$\left|\frac{\partial f_{l,n}^{(\alpha)}}{\partial z}\right| \ll Q_{l,n} \left| f_{l,n}^{(\alpha)} \right|$$

для любых значений индексов l и n.

Подставляя уравнения (2) и (4) в уравнение (1) и приравнивая к нулю члены с одинаковыми степенями ε, мы можем получить связанные нелинейные уравнения Шредингера для вспомогательных функции $\lambda_{\pm} = \varepsilon f_{+1,\pm 1}^{(1)}$ в виде

$$i\left(\frac{\partial \lambda_{\pm}}{\partial t} + v_{\pm}\frac{\partial \lambda_{\pm}}{\partial z}\right) + p_{\pm}\frac{\partial^2 \lambda_{\pm}}{\partial z^2} + q_{\pm}\left(|\lambda_{\pm}|^2 + 2|\lambda_{\mp}|^2\right)\lambda_{\pm} = 0, \qquad (5)$$

а также определить связь между величинами $\Omega_{l,n}$ и $Q_{l,n}$. Когда $l = n = \pm 1$, тогда $f_{\pm 1,\pm 1}^{(1)} \neq 0$, и имеем уравнение

$$(\beta k^2 - 1)\Omega_{\pm 1,\pm 1} + (C + 2\beta k\omega)Q_{\pm 1,\pm 1} + 2\beta k \Omega_{\pm 1,\pm 1} Q_{\pm 1,\pm 1} + \beta\omega Q_{\pm 1,\pm 1}^2 + \beta Q_{\pm 1,\pm 1}^2 \Omega_{\pm 1,\pm 1} = 0, \qquad (6)$$

а когда $l = -n = \pm 1$, тогда $f_{\pm 1,\mp 1}^{(1)} \neq 0$, и мы получаем следующее уравнение:

$$(\beta k^2 - 1)\Omega_{\pm 1,\mp 1} + (C + 2\beta k\omega)Q_{\pm 1,\mp 1} - 2\beta k \Omega_{\pm 1,\mp 1} Q_{\pm 1,\mp 1} - \beta\omega Q_{\pm 1,\mp 1}^2 + \beta Q_{\pm 1,\mp 1}^2 \Omega_{\pm 1,\mp 1} = 0, \qquad (7)$$

где

$$p_{\pm} = \beta\frac{2(k \pm Q_{\pm 1})v_{\pm} + (\omega \pm \Omega_{\pm 1})}{1 - \beta(k \pm Q_{\pm 1})^2},$$

$$q_{\pm} = -\frac{a(k \pm Q_{\pm 1})}{1 - \beta(k \pm Q_{\pm 1})^2},$$

$$v_{\pm} = \frac{C + 2\beta(k \pm Q_{\pm 1})(\omega \pm \Omega_{\pm 1})}{1 - \beta(k \pm Q_{\pm 1})^2},$$

$$\Omega_{+1,+1} = \Omega_{-1,-1} = \Omega_{+1}, \quad \Omega_{+1,-1} = \Omega_{-1,+1} = \Omega_{-1},$$

$$Q_{+1,+1} = Q_{-1,-1} = Q_{+1}, \quad Q_{+1,-1} = Q_{-1,+1} = Q_{-1}. \qquad (8)$$

Решение уравнения (5) будем искать в виде (см., например, [3–5])

$$\lambda_{\pm} = \frac{K_{\pm}}{bT}\operatorname{sech}\left(\frac{t - \frac{z}{V_0}}{T}\right)e^{i(k_{\pm}z - \omega_{\pm}t)}, \qquad (9)$$

где $K_{\pm}$, $k_{\pm}$ и $\omega_{\pm}$ — действительные постоянные, V_0 — скорость нелинейной волны. Предполагаем, что справедливы неравенства

$$k_{\pm} \ll Q_{\pm 1}, \qquad \omega_{\pm} \ll \Omega_{\pm 1}. \qquad (10)$$

Подставляя уравнение (9) в уравнения (5), (4) и (2), получаем двухкомпонентный векторный бризер, осциллирующий на СРЧ модифицированного уравнения ВВМ (1), в виде

$$u(z,t) = \frac{2}{bT}\operatorname{sech}\left(\frac{t - \frac{z}{V_0}}{T}\right)\Big\{K_{+}\cos\big[(k + Q_{+1} + k_{+})z - (\omega + \Omega_{+1} + \omega_{+})t\big] + K_{-}\cos\big[(k - Q_{-1} + k_{-})z - (\omega - \Omega_{-1} + \omega_{-})t\big]\Big\}, \qquad (11)$$

где T — ширина двухкомпонентного нелинейного импульса,

$$K_{+}^2 = \frac{p_{+}q_{-} - 2p_{-}q_{+}}{p_{-}q_{+} - 2p_{+}q_{-}}K_{-}^2,$$

$$k_{\pm} = \frac{V_0 - v_{\pm}}{2p_{\pm}},$$

$$\omega_{+} = \frac{p_{+}}{p_{-}}\omega_{-} + \frac{V_0^2(p_{-}^2 - p_{+}^2) + v_{-}^2 p_{+}^2 - v_{+}^2 p_{-}^2}{4p_{+}p_{-}^2},$$

$$T^{-2} = V_0^2\frac{v_{+}k_{+} + k_{+}^2 p_{+} - \omega_{+}}{p_{+}},$$

$$b^2 = \frac{V_0^2 q_{+}}{2p_{+}}\left(K_{+}^2 + 2K_{-}^2\right). \qquad (12)$$

С использованием обобщенной версии ПМР получено двухкомпонентное векторное бризерное решение (11) модифицированного уравнения ВВМ (1). Первый член уравнения (11) — это бризер малой амплитуды, осциллирующий на суммарной частоте $\omega + \Omega_{+1}$ с волновым числом $k + Q_{+1}$ (с учетом уравнений (10)), а второй член — бризер малой амплитуды, осциллирующий на разностной частоте $\omega - \Omega_{-1}$ с волновым числом $k - Q_{-1}$. Нелинейная связь между бризерами характеризуется перекрестными членами $2|\lambda_{\mp}|^2\lambda_{\pm}$ уравнения (5). Параметры нелинейной волны определяются уравнениями (8) и (12). Дисперсионные соотношения и связи между осциллирующими параметрами представлены уравнениями (3), (6) и (7).

Полученный двухкомпонентный векторный бризер (11) идентичен решениям уравнений нелинейной оптики и нелинейной акустики, в частности оптическим и акустическим резонансным векторным 0π-импульсам и нерезонансному двухкомпонентному векторному бризеру в диспергирующей и нелинейной керровской среде [3–5]. Следовательно, полученный результат дает основание сделать вывод, что двухкомпонентный векторный бризер, осциллирующий на СРЧ, характеризует общие нелинейные свойства физических систем, описываемых совершенно разными нелинейными уравнениями, и может формироваться в абсолютно различных физических ситуациях и материалах. Это обстоятельство будет стимулировать не только дальнейшие теоретические и экспериментальные исследования двухкомпонентных векторных бризеров, но и их применение в различных устройствах, в которых используются двухкомпонентные нелинейные уединенные волны.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский, *Теория солитонов* (Наука, М., 1980).
[2] T. Taniuti, N. Iajima, J. Math. Phys., **14**, 1389 (1973).
[3] Г.Т. Адамашвили, М.Д. Пейкришвили, Р.Р. Коплатадзе, Письма в ЖТФ, **43** (7), 17 (2017). DOI: 10.21883/PJTF.2017.07.44464.16383
[4] G.T. Adamashvili, Eur. Phys. J. D, **74**, 41 (2020). DOI: 10.1140/epjd/e2020-100588-y
[5] G.T. Adamashvili, N.T. Adamashvili, M.D. Peikrishvili, R.R. Koplatadze, Arxiv: 1804.02993v1 (2018).
[6] T.B. Benjamin, J.L. Bona, J.J. Mahony, Phil. Trans. R. Soc. (London) A, **272**, 47 (1972).
[7] H. Naher, F.A. Abdullah, A. Bekir, New Trends Math. Sci., **3**, 78 (2015).
[8] P.G. Estevez, S. Kuru, J. Negro, L.M. Nieto, Arxiv: 0707.0760v2 (2007).
[9] В.И. Ерофеев, И.С. Павлов, *Структурное моделирование метаматериалов* (ИПФ РАН, Н. Новгород, 2019).
[10] M.M. Khater, D. Lu, E.H.M. Zahran, Appl. Math. Inf. Sci., **11**, 1347 (2017). DOI: 10.18576/amis/110511