10

Упругие волны в средах с разномодульной нелинейностью с учетом эффектов отражения от ударных фронтов

© В.Е. Назаров

Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН,
603950 Нижний Новгород, Россия
e-mail: v.e.nazarov@appl.sci-nnov.ru

Поступило в Редакцию 22 апреля 2021 г.
В окончательной редакции 12 июня 2021 г.
Принято к публикации 15 июня 2021 г.

Проведено теоретическое исследование распространения продольных сильной низкочастотной и слабой высокочастотной упругих волн в недиспергирующих твердых телах с разномодульной нелинейностью с учетом эффектов отражения от ударных фронтов волны. Получены выражения для формы волны, а также для амплитуд, частот и фаз гармонических составляющих возмущения, отраженного от разрывов нелинейной волны. Проведен численный и графический анализ полученных решений. Отмечается, что экспериментальное изучение эффектов отражения волн от разрывов может быть использовано для определения нелинейного параметра разномодульной среды.

Ключевые слова: продольные упругие волны, бимодульная нелинейность, ударные волны, отражение от разрывов.

DOI: 10.21883/JTF.2021.11.51539.118-21

Введение

Теория нелинейных волновых процессов (НВП) в однородных недиспергирующих средах с квадратичной упругой нелинейностью развита в полной мере [1–3]. Нелинейное распространение плоских продольных волн в таких средах (без учета линейной диссипации) описывается уравнением простых волн [1–3]. Решения этого уравнения справедливы вплоть до образования в профиле волны физически нереализуемой неоднозначности — „перехлеста“; для его устранения в профиль волны вводится ударный фронт — разрыв, соединяющий параметры волны на ее профиле [1–3]. После образования „перехлеста“ (и ударного фронта) волна перестает быть простой, при этом в среде возникает волновое возмущение, связанное с отражением набегающей на разрыв непрерывной части волны, и распространяющееся в обратном направлении — к излучателю [1–5]. Конечно, амплитуда отраженного от разрыва возмущения мала и для его описания необходимо учитывать следующее: кубичное слагаемое в уравнении состояния среды. Для сравнения величин нелинейных эффектов, возникающих при распространении первоначально гармонической волны (ПГВ) в однородных средах, отметим, что в начале при малом искажении волны, амплитуда ее второй гармоники пропорциональна квадрату амплитуды ПГВ, на стадии пилообразной ударной волны амплитуда ее второй гармоники пропорциональна первой степени амплитуды ударной волны, а амплитуда отраженного от разрыва возмущения пропорциональна третьей степени амплитуды ударной волны [2,4,5]. Несмотря на относительную малость эффектов отражения, характеристики гармонических составляющих отраженного возмущения (амплитуды, частоты и фазы) зависят от нелинейных свойств среды, что может быть использовано для определения ее параметра нелинейности.

Эффекты образования „перехлеста“ (и разрыва) в ударных волнах, а также возникновения отраженных от разрывов возмущений, имеют место и в микронеоднородных твердотельных средах, содержащих различные микродефекты (трещины, зерна, дислокации и т. д.) [6] и обладающих неаналитической, в частности, разномодульной (или бимодульной) нелинейностью [7,8]. В таких „неаналитических“ средах закономерности НВП отличаются от аналогичных закономерностей для сред со степенной — квадратичной и кубичной (аналитической) нелинейностью. Выявление этих отличий необходимо для развития теории НВП в микронеоднородных средах с неаналитической нелинейностью, а также для классификации таких сред и создания эффективных методов нелинейной акустической диагностики дефектов их структуры.

Изучению нелинейного распространения продольных упругих волн в разномодульных твердых телах без дисперсии (и без учета отражения от разрывов) посвящено довольно много работ [8–17]. В таких средах нелинейный режим распространения имеет место только для разнополярных волн, а однополярные одиночные импульсы распространяются линейно, с постоянными, но различными скоростями, зависящими от их полярности. В первом приближении (т. е. без учета отражения от разрывов) распространение ПГВ в идеальной (без линейной диссипации) разномодульной среде происходит так, что на каждом периоде волны в ее профиле образуется симметричный „перехлест“, также как и в квадратичной среде, устраняемый введением разрыва — симметричного ударного фронта [11]. В результате амплитуды высших (кратных) гармоник такой ударной волны пропорциональны первой степени амплитуды ПГВ, при этом вследствие нелинейного поглощения на разрыве волна полностью затухает на конечном расстоянии. С учетом же эффектов отражения волны от разрывов (второе приближение) динамика НВП в среде с разномодульной нелинейностью будет несколько отличаться от вышеописанной, не учитывающей отражений. Для выявления таких отличий необходимо проведение соответствующих теоретических исследований.

В настоящей работе проводится теоретическое исследование распространения продольных сильной низкочастотной (НЧ) и слабой высокочастотной (ВЧ) упругих волн в недиспергирующих средах с разномодульной нелинейностью с учетом эффектов отражения волны от ее ударных фронтов.

1. Основные уравнения

Уравнение состояния идеального (без линейной диссипации) разномодульного твердого тела для продольных напряжений σ и деформаций имеет вид [7,14]

$$\sigma(\varepsilon) = \left\{ \begin{matrix} E_1\varepsilon, & \varepsilon \geq 0 \\ E_2\varepsilon, & \varepsilon \leq 0 \end{matrix} \right| = E[\varepsilon - \gamma|\varepsilon|], \quad (1)$$

где $E_{1,2}$ — модули упругости среды при ее растяжении и сжатии, $E = \frac{E_1+E_2}{2}$, $\gamma = \frac{E_1-E_2}{E_1+E_2}$, $E_{1,2} = E(1 \pm \gamma)$, $\gamma \ll 1$, $\varepsilon \ll 1$. Для твердых тел с трещинами $E_2 > E_1$, но для других микронеоднородных материалов может быть, и наоборот, $E_2 < E_1$.

При выполнении неравенства $|\varepsilon| \ll |\gamma| \ll 1$ можно не учитывать геометрическую нелинейность уравнений движения по сравнению с физической (или материальной) нелинейностью уравнения состояния. В этом приближении уравнения теории упругости в лагранжевой и эйлеровой формах совпадают [11].

Из уравнения движения $\rho_0 U_{tt} = \sigma_x(\varepsilon)$ [18] и уравнения состояния (1) получаем (в двух эквивалентных формах) нелинейное волновое уравнение для продольной (вдоль оси x) деформации $\varepsilon(t, x) = \partial U(t, x)/\partial x$:

$$\varepsilon_{tt} - C_0^2\varepsilon_{xx} = -\gamma C_0^2[|\varepsilon|]_{xx}, \ \ \varepsilon_{tt} - C_0^2[(1-\gamma sign\varepsilon)\varepsilon]_{xx} = 0, \quad (2)$$

где $U = U(t, x)$ — смещение, ρ_0 — невозмущенная плотность среды, $C_0 = (E/\rho_0)^{1/2}$. Из уравнений (2) следует, что их нелинейность определяется не амплитудой деформации, а знаком деформации (или ее полярностью). В результате положительные ($\varepsilon > 0$) и отрицательные ($\varepsilon < 0$) импульсные возмущения распространяются с постоянными скоростями C_1 и C_2, причем $C_{1,2} = (E_{1,2}/\rho_0)^{1/2} = \sqrt{(E/\rho_0)(1 \pm \gamma)} = C_0\sqrt{1 \pm \gamma}$. (Для определенности будем считать, что $\gamma > 0$, при этом $C_1 > C_2$.)

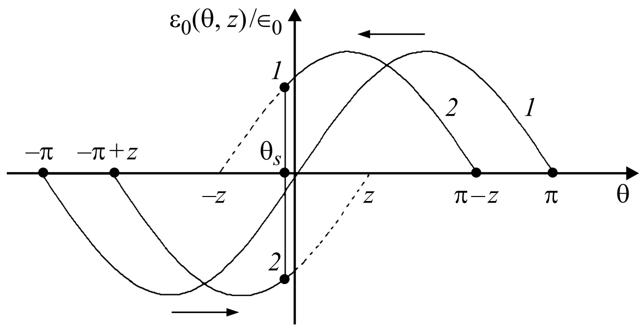

Рис. 1. Эволюция ПГВ: *1* — форма колебания при $z = 0$, *2* — профиль волны на расстоянии $z < \pi$.

Граничное условие зададим в виде суммы двух гармонических (НЧ и ВЧ) колебаний с частотами Ω и ω:

$$\varepsilon(t, x = 0) = \epsilon_0 \sin \Omega t + \epsilon_1 \sin(\omega t + \varphi), \quad (3)$$

где $\epsilon_0 \gg \epsilon_1$, $\Omega \ll \omega$, $\varphi = \text{const}$.

При раздельном возбуждении волн с частотой Ω (или ω) в разномодульной среде будет распространяться НЧ (или ВЧ) волна деформации [11]:

$$\varepsilon_0(\theta, z) = \epsilon_0 \sin\left\{\Omega\left[t - \frac{x}{C_0\sqrt{1+\gamma sign\varepsilon_0}}\right]\right\}$$

$$\approx \epsilon_0 \sin\left\{\Omega\left[t - \frac{x}{C(\gamma)} + \frac{\gamma x}{2C_0} sign\varepsilon_0\right]\right\}$$

$$= \epsilon_0 \sin\left[\Omega\tau + \frac{\gamma K x}{2} sign\varepsilon_0\right] = \epsilon_0 \sin[\theta + z sign\varepsilon_0], \quad (4)$$

$$\varepsilon_1(\theta, z) = \epsilon_1 \sin\left\{\omega\left[t - \frac{x}{C_0\sqrt{1+\gamma sign\varepsilon_0}}\right] + \varphi\right\}$$

$$\approx \epsilon_1 \sin[n(\theta + z sign\varepsilon_1) + \varphi], \quad (5)$$

где $\theta = \Omega\tau$, $\tau = t - \frac{x}{C(\gamma)}$, $C(\gamma) = \frac{2C_0}{(1+\gamma)^{-1/2}+(1-\gamma)^{-1/2}}$, $z = \frac{\gamma k x}{2} \geq 0$, $K = \frac{\Omega}{C_0}$, $\omega = n\Omega$, $n = \omega/\Omega \gg 1$.

Соответственно для скоростей $V_0(t, x) = \partial V_0(t, x)/\partial t$ и $V_1(t, x) = \partial V_1(t, x)/\partial t$ НЧ и ВЧ волн имеем следующие выражения:

$$V_0(\theta, z) = -C_0\epsilon_0 \sin[\theta - z signV_0], \quad (6)$$

$$V_1(\theta, z) = -C_0\epsilon_1 \sin[n(\theta - z signV_1) + \varphi]. \quad (7)$$

Решения (4) и (5) описывают эволюцию профиля НЧ (или ВЧ) волны в системе координат, движущейся со скоростью $C(\gamma)$. На рис. 1 показана эволюция НЧ волны $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\theta, z)$ на расстоянии $z < \pi$; стрелками показаны направления движения положительного и отрицательного полупериодов волны. Из выражений (4) и рис. 1 следует, что искажение первоначально гармонической волны в разномодульной среде происходит так, что на каждом периоде волны (на сколь угодно малом расстоянии z) в ее профиле (при $|\theta| \leq z$) образуется

„перехлест“, устраняемый введением разрыва — ударного фронта при $\theta = \theta_S$. (При $\gamma < 0$ неоднозначность возникает на интервале $|\pi - \theta| \le z$.) В первом приближении по малому параметру γ, $C(\gamma) = C_0$ и отражения от разрыва нет [11], $\theta_S = 0$ для НЧ волны, и $\theta_S = -\varphi/n$ для ВЧ волны, при этом симметричный ударный фронт относительно среды движется со скоростью $C_S = C_0$, причем $C_2 < C_S < C_1$. Во втором приближении по γ, когда $C(\gamma) = \frac{C_0}{1+3\gamma^2/8}$, имеет место отражение от разрыва, а его положение $\theta_S(z)$ несколько сдвигается относительно прежнего $\theta_S = 0$ (или $\theta_S = -\varphi/n$), при этом несимметричный ударный фронт будет двигаться со скоростью $C_S \ne C_0$, $C_2 < C_S < C_1$.

При совместном возбуждении НЧ и ВЧ волн с учетом отражения от разрыва непрерывной части волны и образования слабого отраженного возмущения $e_2(\tau_2)$ выражения для волн деформации $\varepsilon(\theta, z)$ и скорости $V(\theta, z)$ имеют вид

$$\varepsilon(\theta, z) = \epsilon_0 \sin[\theta + z sign\varepsilon] + \epsilon_1 \sin[n(\theta + z sign\varepsilon) + \varphi] + e_2(\tau_2), \tag{8}$$

$$V(\theta, z) = - C_0\epsilon_0 \sin[\theta - z signV] - C_0\epsilon_1 \sin[n(\theta - z signV) + \varphi] + C_1 e_2(\tau_2), \tag{9}$$

где $\theta = \Omega\left[t - \frac{x}{C_0}\left(1 + \frac{3\gamma^2}{8}\right)\right]$, $\tau_2 = t + \frac{x}{C_1} \approx t + \frac{2z}{\gamma\Omega}$, т.е. отраженное от разрыва возмущение $e_2(\tau_2)$ распространяется со скоростью $C_1 > C_S > C_2$, при этом $e_2(\tau_2)$ есть только после разрыва, где $\varepsilon(\theta, z) > 0$, а перед разрывом его нет. Здесь положение разрыва $\widetilde{\theta}_S(z)$ в ударной волне $\varepsilon(\theta, z)$ будет несколько смещено под действием слабой ВЧ волны относительно прежнего положения $\theta_S(z)$, когда $\epsilon_1 = 0$.

Из выражений (8), (9) получаем значения $\varepsilon_1(\widetilde{\theta}_S, z)$, $\varepsilon_2(\widetilde{\theta}_S, z)$, $V_1(\widetilde{\theta}_S, z)$, $V_2(\widetilde{\theta}_S, z)$ и $e_2(\widetilde{\theta}_S, z)$ на разрыве $\widetilde{\theta}_S = \widetilde{\theta}_S(z)$:

$$\varepsilon_1(\widetilde{\theta}_S, z) = \epsilon_0 \sin[\widetilde{\theta}_S + z] + \epsilon_1 \sin[n(\widetilde{\theta}_S + z) + \varphi] + e_2(\widetilde{\theta}_S, z) > 0,$$

$$\varepsilon_2(\widetilde{\theta}_S, z) = \epsilon_0 \sin[\widetilde{\theta}_S - z] + \epsilon_1 \sin[n(\widetilde{\theta}_S - z) + \varphi] < 0,$$

$$V_1(\widetilde{\theta}_S, z) = - C_0\epsilon_0 \sin[\widetilde{\theta}_S + z] - C_0\epsilon_1 \sin[\widetilde{\theta}_S + z + \varphi] + C_1 e_2(\widetilde{\theta}_S, z),$$

$$V_2(\widetilde{\theta}_S, z) = -C_0\epsilon_0 \sin[\widetilde{\theta}_S - z] - C_0\epsilon_1 \sin[\widetilde{\theta}_S - z + \varphi]. \tag{10}$$

Скорость $C_S(\widetilde{\theta}_S, z)$ и положение разрыва $\widetilde{\theta}_S(z)$, а также параметры отраженного от него возмущения $e_2(\widetilde{\theta}_S, z)$ определим из уравнений теории упругости для одномерных продольных волн [18]:

$$\rho_0 \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial \sigma(\varepsilon)}{\partial x}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x}, \tag{13}$$

где ρ — возмущенная плотность среды, $V(t, x) = \partial U(t, x)/\partial t$ — скорость частиц среды. Записывая решение уравнений (11)−(13) в виде стационарной волны, т.е. полагая $V, \sigma, \varepsilon, \rho \propto F(\xi = x - C_S t)$ и интегрируя по ξ от $-\infty$ до $+\infty$, получим граничные условия на разрыве

$$\rho_0 C_S (V_1 - V_2) = -(\sigma_1 - \sigma_2), \tag{14}$$

$$C_S(\rho_1 - \rho_2) = \rho_0(V_1 - V_2), \tag{15}$$

$$C_S(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = -(V_1 - V_2), \tag{16}$$

где индексы 1 и 2 отвечают значениям параметров ударной волны за и перед разрывом.

Из уравнений (15), (16) получаем $\rho_1 - \rho_2 = -\rho_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$.

Из выражений (10), (14), (16) находим $C_S(\widetilde{\theta}_S, z)$:

$$C_S(\widetilde{\theta}_S, z) = \sqrt{\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}} = \sqrt{\frac{E_1\varepsilon_1 - E_2\varepsilon_2}{\rho_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}} = C_0\sqrt{\frac{(1+\gamma)\varepsilon_1 - (1-\gamma)\varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}}$$
$$\approx C_0\left(1 + \frac{\gamma}{2}\frac{\operatorname{tg}\widetilde{\theta}_S}{\operatorname{tg} z} + \frac{\gamma\epsilon_1}{2\epsilon_0 \cos\widetilde{\theta}_S \sin z} \times \left(\sin(n\widetilde{\theta}_S + \varphi)\cos nz - \frac{\operatorname{tg}\widetilde{\theta}_S}{\operatorname{tg} z}\cos(n\widetilde{\theta}_S + \varphi)\sin nz\right)\right), \tag{17}$$

где

$$\left|\frac{\gamma}{2}\frac{\operatorname{tg}\widetilde{\theta}_S}{\operatorname{tg} z} + \frac{\gamma\epsilon_1}{2\epsilon_0 \cos\widetilde{\theta}_S \sin z}\left(\sin(n\widetilde{\theta}_S + \varphi)\cos nz - \frac{\operatorname{tg}\widetilde{\theta}_S}{\operatorname{tg} z}\cos(n\widetilde{\theta}_S + \varphi)\sin nz\right)\right| \ll 1.$$

Вычитая (16) из (14), получаем значение деформации $e_2(\widetilde{\theta}_S, z)$ на разрыве $\widetilde{\theta}_S(z)$:

$$e_2(\widetilde{\theta}_S, z) \approx -\frac{\gamma}{2}\left[\epsilon_0 \sin\widetilde{\theta}_S \cos z + \epsilon_1 \sin(n\widetilde{\theta}_S + \varphi)\cos nz\right],$$
$$|e_2(\widetilde{\theta}_S, z)| \ll \epsilon_0. \tag{18}$$

Для определения положения $\widetilde{\theta}_S(z)$ разрыва продифференцируем выражение $\widetilde{\theta}_S = \Omega\left[\widetilde{t}_S - \frac{x}{C_0}\left(1 + \frac{3\gamma^2}{8}\right)\right]$ по $z = \frac{\gamma K x}{2}$ и, полагая, что $\frac{d\widetilde{t}_S}{dx} = C_S^{-1}(\widetilde{\theta}_S, z)$, получим уравнение

$$\frac{d\widetilde{\theta}_S}{dz} = -\frac{3\gamma}{4} - \frac{\operatorname{tg}\widetilde{\theta}_S}{\operatorname{tg} z} - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0 \cos\widetilde{\theta}_S \sin z}\left(\sin(n\widetilde{\theta}_S + \varphi)\cos nz - \frac{\operatorname{tg}\widetilde{\theta}_S}{\operatorname{tg} z}\cos(n\widetilde{\theta}_S + \varphi)\sin nz\right). \tag{19}$$

2. Распространение и отражение от разрывов сильной НЧ волны

Рассмотрим сначала распространение и отражение от разрывов одной сильной НЧ волны, полагая, что $\epsilon_1 = 0$. В этом случае $\widetilde{\theta}_S(z) = \theta_S(z)$ и из уравнения (19) имеем

$$\frac{d\widetilde{\theta}_S}{dz} = -\frac{3\gamma}{4} - \frac{\operatorname{tg}\theta_S}{\operatorname{tg} z}. \tag{20}$$

Из этого уравнения видно, что положение разрыва θ_S в разномодульной среде для ПГВ не зависит от ее амплитуды. Приближенное решение уравнения (20) с граничным условием $\theta_S(z=0) = 0$ имеет вид

$$\theta_S(z) \approx -\frac{3\gamma}{4}\operatorname{tg}\frac{z}{2} \le 0, \quad |\theta_S(z)| \ll 1, \tag{21}$$

где $z \le z_0 < \pi$, z_0 — расстояние (определяется ниже), при котором на каждом периоде ПГВ образуется однополярный импульс.

Из выражения (21) видно, что при $\gamma > 0$ разрыв движется в сторону отрицательных θ, так что длительность отрицательного полупериода в волне уменьшается быстрее, чем положительного. В итоге на некотором расстоянии z_0 отрицательный полупериод волны должен исчезнуть, а оставшаяся малая часть положительного полупериода будет распространяться с линейной скоростью C_1. (При $\gamma < 0$ образовавшийся вблизи $\theta = \pi$ разрыв также движется влево, но при этом исчезает положительный полупериод, а оставшаяся часть отрицательного полупериода будет распространяться с линейной скоростью C_2).

Покажем, что решение (21) справедливо вплоть до образования (при $z = z_0$) на каждом периоде исходной НЧ волны однополярного положительного импульса. Для этого определим положение разрыва $\theta_S(z = z_0) = \theta_0$ в момент образования однополярного импульса, когда разрыв соединяется с задним фронтом отрицательного полупериода (точкой $-\pi + z_0$ на рис. 1). Из этого условия получаем уравнение для определения расстояния z_0 образования однополярного импульса

$$-\pi + z_0 = -\frac{3\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{z_0}{2} = \theta_0. \tag{22}$$

Решая это уравнение методом возмущений, получаем

$$z_0 \approx \pi - \sqrt{\frac{3\gamma}{2}} < \pi, \quad \theta_0 \approx -\sqrt{\frac{3\gamma}{2}}. \tag{23}$$

Подставляя (23) в (21) легко убедиться, что решение (21) справедливо везде ($0 \le z \le z_0$), вплоть до образования однополярного импульса, форма которого показана на рис. 2; его амплитуда и длительность равны $\varepsilon_0(z \ge z_0) = \sqrt{6\gamma}\epsilon_0 \ll \epsilon_0$ и $2\theta_0 \approx \sqrt{6\gamma} \ll 2\pi$. При $z \ge z_0$ форма однополярного импульса не меняется:

$$\varepsilon_0(\theta_1, z \ge z_0) = \epsilon_0 \sin\theta_1 \ge 0, \ |\theta_1| \le \theta_0 \approx \sqrt{3\gamma/2}, \tag{24}$$

где $\theta_1 = \Omega\tau_1$, $\tau_1 = t - x/C_1$.

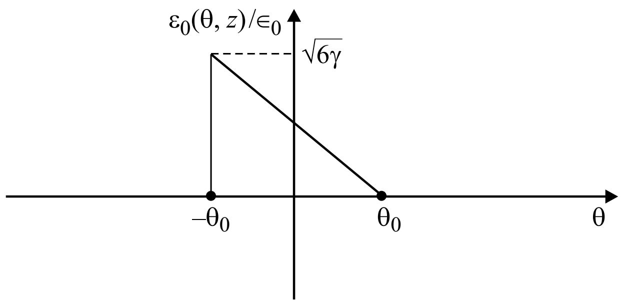

Рис. 2. Форма однополярного импульса на расстоянии $z \ge z_0$.

Далее из уравнений (15), (19) следует, что амплитуда $e_{2,0}(\theta_S, z)$ отраженного от разрыва $\theta_S(z)$ возмущения определяется выражением

$$e_{2,0}(\theta_S, z) \approx -\frac{\gamma}{2}\epsilon_0 \sin\theta_S(z)\cos z$$

$$\approx \frac{3\gamma^2\epsilon_0}{8}\operatorname{tg}\frac{z}{2}\cdot\cos z \ll \epsilon_0. \tag{25}$$

Разложим периодическую функцию (4) при $\theta_S(z) \approx -\frac{3\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2} \le 0$ (рис. 1) в ряд Фурье:

$$\varepsilon_0(\theta, z) = \epsilon_0 \cdot \begin{cases} 0, & -\pi \le \theta \le -\pi + z, \\ \sin(\theta - z) \le 0, & -\pi + z \le \theta \le \theta_S(z), \\ \sin(\theta + z) \ge 0, & \theta_S(z) \le \theta \le \pi - z, \\ 0, & \pi - z \le \theta \le \pi, \end{cases} \tag{26}$$

$$\varepsilon_0(\theta, z) = \epsilon_0\left(\frac{a_0(z)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m(z)\cos m\theta + b_m(z)\sin m\theta\right), \tag{27}$$

где $a_0(z)$, $a_m(z)$ и $b_m(z)$ — коэффициенты ряда Фурье,

$$a_0(z) = -\frac{2\sin\theta_S(z)\sin z}{\pi} \approx \frac{3\gamma}{2\pi}\sin^2\frac{z}{2},$$

$$a_1(z) = -\frac{2\theta_S(z) + \sin 2\theta_S(z)}{2\pi}\sin z \approx \frac{3\gamma}{2\pi}\operatorname{tg}\frac{z}{2}\sin z$$

$$= \frac{3\gamma}{2\pi}\sin^2\frac{z}{2},$$

$$b_1(z) = \frac{(\pi - z)\cos z + \cos^2\theta_S(z)\sin z}{\pi}$$

$$\approx \frac{(\pi - z)\cos z + \sin z}{\pi},$$

$$a_m(z) = \frac{2[\sin\theta_S(z)\cos m\theta_S(z) - m\sin m\theta_S(z)\cos\theta_S(z)]}{\pi(m^2 - 1)},$$

$$b_m(z) = \frac{\begin{array}{c}2\{\cos[(m-1)\theta_S(z)] + (m-1)\cos m\theta_S(z)\cos\theta_S(z)\}\sin z + \\ +(-1)^m \sin mz\end{array}}{\pi(m^2 - 1)}.$$

При отражении НЧ волны $\varepsilon_0(\theta, z)$ от разрыва $\theta_S(z)$, находящегося на расстоянии z ($0 \le z \le z_0$), отраженное возмущение $e_{2,0}(\tau_2, z)$ будет определяться выражением

$$e_{2,0}(\tau_2, z) = \frac{3\gamma^2\epsilon_0}{8}\ \mathrm{tg}\ \frac{z}{2} \cdot \cos z \cdot \left(\frac{a_0(z)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m(z)\right.$$

$$\left.\times \cos[m\Omega_2(z)\tau_2(t, z)] + b_m(z) \sin[m\Omega_2(z)\tau_2(t, z)]\right), \tag{28}$$

где частота $\Omega_2(z)$ основной гармоники отраженного от разрыва $\theta_S(z)$ возмущения $e_{2,0}(\tau_2, z)$ из-за двойного эффекта Доплера [1] имеет вид

$$\Omega_2(z) = \Omega\left(\frac{1-(C_S/C_1)}{1+(C_S/C_1)}\right) \approx \frac{\gamma\Omega}{4}\left(1 + \frac{\gamma}{8}\right.$$

$$\left.\times\left(1 - 3\,\mathrm{tg}^2\ \frac{z}{2}\right)\right) \ll \Omega, \tag{29}$$

$$\tau_2(t, z) = t + x/C_1 \approx t + \frac{2z}{\gamma\Omega},$$

$$\Omega_2(z)\tau_2(t, z) = \Phi_1(t, z) + \Phi_2(t, z),$$

$$\Phi_1(t, z) = \frac{\gamma\Omega t}{4}\ \left(1 + \frac{\gamma}{8}\left(1 - 3\,\mathrm{tg}^2\ \frac{z}{2}\right)\right),$$

$$\Phi_2(t, z) = \frac{z}{2}\ \left(1 + \frac{\gamma}{8}\left(1 - 3\,\mathrm{tg}^2\ \frac{z}{2}\right)\right).$$

Из выражения (29) следует, что частота $\Omega_2(z)$ отраженного от разрыва возмущения зависит от координаты z разрыва, при этом $\Omega_2(z=0) = \frac{\gamma\Omega}{4}\left(1 + \frac{\gamma}{8}\right)$, $\Omega_2(z=\frac{\pi}{2}) = \frac{\gamma\Omega}{4}\left(1 - \frac{\gamma}{4}\right)$ и $\Omega_2(z = z_0) = \frac{\gamma^2\Omega}{32}$.

После несложных преобразований из выражения (28) получаем

$$e_{2,0}(\tau_2, z) = \frac{3\gamma^2\epsilon_0}{8}\ \mathrm{tg}\frac{z}{2}\ \cos z\ \left(\frac{a_0(z)}{2}\right.$$

$$\left.+ \sum_{m=1}^{\infty} c_m(z)\cos m\Phi_1(t, z) - d_m(z)\sin m\Phi_1 t, z)\right), \tag{30}$$

где $c_m(z) = a_m(z)\cos m\Phi_2(z) + b_m(z)\sin m\Phi_2(z)$, $d_m(z) = a_m(z)\sin m\Phi_2(z) - b_m(z)\cos m\Phi_2(z)$.

Полагая в уравнениях (21), (24), (29), (30) $z = z_j \approx j\,\frac{\gamma K\Lambda}{2} \approx j\pi\gamma \le z_0 = \frac{\gamma K x_0}{2} \approx \pi - \sqrt{\frac{3\gamma}{2}}$ и суммируя отражения от всех разрывов $\theta_S(z_j) \approx -\frac{3\gamma}{4}\ \mathrm{tg}\,\frac{z_j}{4} = -\frac{3\gamma}{4}\ \mathrm{tg}\,\frac{j\pi\gamma}{2}$, находим

$$e_{2,0}(\tau_2, z) \approx \frac{3\gamma^2\epsilon_0}{8} \cdot \sum_{j=1}^{N} \mathrm{tg}\,\frac{z_j}{2} \cdot \cos z_j \cdot \left(\frac{a_0(z_j)}{2}\right.$$

$$\left.+ \sum_{m=1}^{\infty} c_m(z_j)\cos m\Phi_1(t, z_j) - d_m(z_j)\sin m\Phi_1(t, z_j)\right), \tag{31}$$

где

$$\Omega_2(z_j) = \frac{\gamma\Omega}{4}\left(1 + \frac{\gamma}{8}\left(1 - 3\,\mathrm{tg}^2\ \frac{j\pi\gamma}{2}\right)\right) \ll \Omega,$$

$$\tau_2(z_j) \approx t + \frac{2z_j}{\gamma\Omega}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$x_0 = \frac{2z_0}{\gamma K} = \frac{\Lambda}{\gamma}\left(1 - \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{3\gamma}{2}}\right), \quad \Lambda = \frac{2\pi}{K},$$

$$j \le N = \left[\frac{x_0}{\Lambda}\right] \approx \left[\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{3}{2\gamma}}\right] \gg 1,$$

$$\Phi_1(t, z_j) = \frac{\gamma\Omega t}{4}\ \left(1 + \frac{\gamma}{8}\left(1 - 3\,\mathrm{tg}^2\ \frac{z_j}{2}\right)\right),$$

$$\Phi_2(z_j) = \frac{z}{2}\ \left(1 + \frac{\gamma}{8}\left(1 - 3\,\mathrm{tg}^2\ \frac{z_j}{2}\right)\right).$$

Поскольку $\pi\gamma \ll 1$, сумму по j в (31) можно заменить интегралом по $y = z_j = j\pi\gamma$:

$$e_{2,0}(\tau_2) \approx \frac{3\gamma\epsilon_0}{8\pi} \cdot \int\limits_0^{\pi-\sqrt{3\gamma/2}} \mathrm{tg}\,\frac{y}{2} \cdot \cos y \cdot \left(\frac{a_0(y)}{2}\right.$$

$$\left.+ \sum_{m=1}^{\infty} c_m(y)\cos m\Phi_1(t, y) - d_m(y)\sin m\Phi_1(t, y)\right)dy, \tag{32}$$

где

$$c_m(y) = a_m(y)\cos m\Phi_2(y) + b_m(y)\sin m\Phi_2(y),$$

$$d_m(y) = a_m(y)\sin m\Phi_2(y) - b_m(y)\cos m\Phi_2(y),$$

$$\Omega_2(y) = \frac{\gamma\Omega}{4}\ \left(1 + \frac{\gamma}{8}\left(1 - 3\,\mathrm{tg}^2\ \frac{y}{2}\right)\right), \quad \tau_2(y) \approx t + \frac{2y}{\gamma\Omega},$$

$$\Omega_2(y)\tau_2(y) = \left(\frac{\gamma\Omega t}{4} + \frac{y}{2}\right)\left(1 + \frac{\gamma}{8}\left(1 - 3\,\mathrm{tg}^2\ \frac{y}{2}\right)\right)$$

$$= \Phi_1(t, y) + \Phi_2(y),$$

$$\Phi_1(t, y) = \frac{\gamma\Omega t}{4}\ \left(1 + \frac{\gamma}{8}\left(1 - 3\,\mathrm{tg}^2\ \frac{y}{2}\right)\right),$$

$$\Phi_2(y) = \frac{y}{2}\ \left(1 + \frac{\gamma}{8}\left(1 - 3\,\mathrm{tg}^2\ \frac{y}{2}\right)\right).$$

Из выражения (32) видно, что отраженное возмущение $e_{2,0}(\tau_2)$ содержит постоянную составляющую и множество НЧ гармоник с частотами $m\Omega_2 \approx m(\gamma\Omega/4) \ll \Omega$, амплитуды которых уменьшаются с ростом номера m. Вообще говоря, их вычисление является довольно сложной задачей. Однако можно легко получить выражение для постоянной составляющей деформации $e_{2,0}(\tau_2)$:

$$\langle e_{2,0}(\tau_2)\rangle \approx \frac{3\gamma\epsilon_0}{16\pi} \cdot \int\limits_0^{\pi-\sqrt{3\gamma/2}} a_0(y) \cdot \mathrm{tg}\,\frac{y}{2} \cdot \cos y\,dy$$

$$= \frac{9\gamma^2\epsilon_0}{16\pi^2}\left(1 + \ln\sqrt{\frac{3\gamma}{2}}\right) < 0.$$

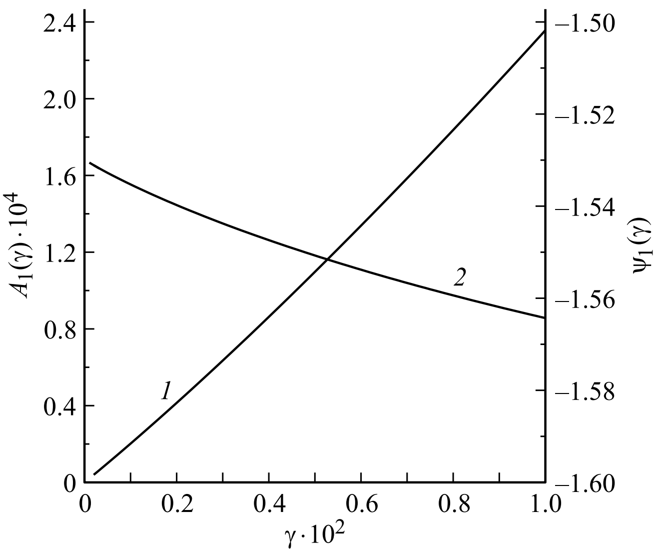

Рис. 3. Зависимости: *1* — $A_1 = A_1(\gamma)$, *2* — $\psi_1 = \psi_1(\gamma)$.

Можно также получить приближенные выражения для нормированных на ϵ_0 амплитуд $A_m(\gamma)$ гармонических составляющих волны $e_{2,0}(\tau_2)$ с частотами $m\Omega_2 \approx m\gamma\Omega/4$ и их фаз $\psi_m(\gamma)$, полагая в (32) $\Omega_2 \approx \frac{\gamma\Omega}{4}$, $\Phi_1(t,y) \approx \frac{\gamma\Omega t}{4}$, $\Phi_2(y) \approx \frac{y}{2}$:

$$e_{2,0}(\tau_2) \approx \frac{3\gamma\epsilon_0}{8\pi} \cdot \int\limits_0^{\pi-\sqrt{3\gamma/2}} \operatorname{tg}\frac{y}{2} \cdot \cos y \cdot \left(\frac{a_0(y)}{2}\right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} c_m(y)[m\Omega_2 t] - d_m(y)\sin[m\Omega_2 t]\right) dy,$$

$$A_m(\gamma) = \sqrt{A_{mS}^2(\gamma) + A_{mC}^2(\gamma)}, \quad \operatorname{tg}\psi_m(\gamma) = \frac{A_{mS}(\gamma)}{A_{mC}(\gamma)}, \quad (33)$$

где

$$A_{mC}(\gamma) = \frac{3\gamma}{8\pi} \cdot \int\limits_0^{\pi-\sqrt{3\gamma/2}} \operatorname{tg}\frac{y}{2} \cdot \cos y \cdot c_m(y) dy,$$

$$A_{mS}(\gamma) = \frac{3\gamma}{8\pi} \cdot \int\limits_0^{\pi-\sqrt{3\gamma/2}} \operatorname{tg}\frac{y}{2} \cdot \cos y \cdot d_m(y) dy,$$

$$c_m(y) = a_m(y)\cos\frac{my}{2} + b_m(y)\cos\frac{my}{2},$$

$$d_m(y) = a_m(y)\sin\frac{my}{2} - b_m(y)\cos\frac{my}{2}.$$

На рис. 3 приведены зависимости $A_1 = A_1(\gamma)$ и $\psi_1 = \psi_1(\gamma)$, из которых следует, что в диапазоне $10^{-4} \le \gamma \le 10^{-2}$ зависимость A_1 от γ близка к линейной — $A_1(\gamma) \propto \gamma$, $A_1(\gamma) \ll 1$, при этом $\psi_1(\gamma)$ слабо зависит от γ — $\psi_1(\gamma) \approx -\pi/2$.

3. Совместное распространение сильной НЧ и слабой ВЧ волн

Как уже отмечалось, при совместном распространении сильной НЧ и слабой ВЧ волн, положение разрыва $\widetilde{\theta}_S(z)$ в волне $\varepsilon = \varepsilon(\theta, z)$ будет немного смещено слабой ВЧ волной относительно прежнего положения $\widetilde{\theta}_S(z) \approx -\frac{3\gamma}{4}\operatorname{tg}\frac{z}{2} \le 0$, когда $\epsilon_1 = 0$. Решая уравнение (19) методом возмущений, т.е. полагая, что $\widetilde{\theta}_S(z) = \theta_S(z) + \psi_S(z)$, $|\psi_S(z)| \ll |\theta_S(z)|$, получим уравнение для $\psi_S(z)$:

$$\frac{d\psi_S}{dz} = -\frac{\psi_S}{\operatorname{tg} z} - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0 \sin z}\left(\sin(n\theta_S + \varphi)\cos nz\right.$$

$$\left. + \frac{3\gamma}{8}\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{z}{2}\right)\cos(n\theta_S + \varphi)\sin nz\right). \quad (34)$$

Решение уравнения (34) имеет вид

$$\psi_S(z) \approx -\frac{\epsilon_1}{n\epsilon_0}\frac{\sin nz}{\sin z}\sin[n\theta_S(z) + \varphi]. \quad (35)$$

В этом случае $\widetilde{\theta}_S(z) = \theta_S(z) - \frac{\epsilon_1}{n\epsilon_0}\frac{\sin nz}{\sin z}\sin[n\theta_S(z) + \varphi]$ и из выражения (18) находим

$$e_2(\widetilde{\theta}_S, z) \approx -\frac{\gamma}{2}\epsilon_0 \sin\theta_S(z)\cos z - \frac{\gamma}{2}\epsilon_1\left(1 - \frac{\operatorname{tg} nz}{n \operatorname{tg} z}\right)$$

$$\times \sin[n\theta_S(z) + \varphi]\cos nz. \quad (36)$$

Из выражения (36) видно, что слабая ВЧ волна не влияет на амплитуду отраженной от разрыва сильной НЧ волны, а сильная НЧ волна влияет на амплитуду отраженной слабой ВЧ волны (через $\theta_S(z) \approx -\frac{3\gamma}{4}\operatorname{tg}\frac{z}{2}$), при этом

$$e_{2,1}(\widetilde{\theta}_S, z) \approx -\frac{\gamma}{2}\epsilon_1\left(1 - \frac{\operatorname{tg} nz}{n\operatorname{tg} z}\right)\sin[n\theta_S(z) + \varphi]\cos nz. \quad (37)$$

При отражении волны $\varepsilon_1(\theta, z)$ от всех разрывов $\widetilde{\theta}_S(z_j)$, находящихся на расстоянии $0 \le z_j \le z_0$, отраженное возмущение $e_{2,1}(\tau_2)$ будет определяться выражением

$$e_{2,1}(\tau_2) \approx -\frac{\gamma\epsilon_1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(1 - \frac{\operatorname{tg} nz_j}{n\operatorname{tg} z_j}\right)\sin[n\theta_S(z_j) + \varphi]$$

$$\times \cos nz_j \cdot \sin[\omega_2(z_j)\tau_2(z_j) + \varphi]$$

$$= -\frac{\gamma\epsilon_1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(1 - \frac{\operatorname{tg} nz_j}{n\operatorname{tg} z_j}\right)\sin[n\theta_S(z_j) + \varphi]\cos nz_j$$

$$\times \left\{\cos[\Psi_2(z_j) + \varphi]\sin\Psi_1(t, z_j) + \sin[\Psi_2(z_j) + \varphi]\right.$$

$$\left. \times \cos\Psi_1(t, z_j)\right\}, \quad (38)$$

где

$$\omega_2(z_j) = \frac{1-(C_S/C_1)}{1+(C_S/C_1)}\,\omega$$
$$\approx \frac{\gamma\omega}{4}\left(1+\frac{\gamma}{8}\left(1-3\,\mathrm{tg}^2\,\frac{z_j}{2}\right)\right) \gg \Omega_2(z_j),$$
$$\omega_2(z=0) = \frac{\gamma\omega}{4}\left(1+\frac{\gamma}{8}\right),$$
$$\omega_2(z=\pi/2) = \frac{\gamma\omega}{4}\left(1-\frac{\gamma}{4}\right),$$
$$\omega_2(z=z_0) = \frac{\gamma^2\omega}{32}, \quad \tau_2(z_j) = t + x/C_1 \approx t + \frac{2z_j}{\gamma\Omega},$$
$$\omega_2(z_j)\tau_2(z_j) \approx \left(\frac{\gamma\omega t}{4}+\frac{nz_j}{2}\right)\left(1+\frac{\gamma}{8}\left(1-3\,\mathrm{tg}^2\,\frac{z_j}{2}\right)\right)$$
$$= \Psi_1(t,z_j)+\Psi_2(t,z_j),$$
$$\Psi_1(t,z_j) = \frac{\gamma\omega t}{4}\left(1+\frac{\gamma}{8}\left(1-3\,\mathrm{tg}^2\,\frac{z_j}{2}\right)\right),$$
$$\Psi_2(z_j) = \frac{nz_j}{2}\left(1+\frac{\gamma}{8}\left(1-3\,\mathrm{tg}^2\,\frac{z_j}{2}\right)\right).$$

Заменяя сумму по j в (38) интегралом по $y = z_j = j\pi\gamma$, получим

$$e_{2,1}(\tau_2) = -\frac{\epsilon_1}{2\pi}\cdot\int\limits_0^{\pi-\sqrt{3\gamma/2}}\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,ny}{n\,\mathrm{tg}\,y}\right)\cdot\sin[n\theta_S(y)+\varphi]$$
$$\times\cos ny\cdot\{\cos[\Psi_2(y)+\varphi]\sin\Psi_1(t,y)$$
$$+\sin[\Psi_2(y)+\varphi]\cos\Psi_1(t,y)\}dy, \qquad (39)$$

где

$$\Psi_1(t,y) = \frac{\gamma\omega t}{4}\left(1+\frac{\gamma}{8}\left(1-3\,\mathrm{tg}^2\,\frac{y}{2}\right)\right),$$
$$\Psi_2(y) = \frac{ny}{2}\left(1+\frac{\gamma}{8}\left(1-3\,\mathrm{tg}^2\,\frac{y}{2}\right)\right).$$

Здесь также можно получить приближенные выражения для нормированной на ϵ_1 амплитуды $B(\gamma,\varphi) = |e_{2,1}(\tau_2)/\epsilon_1|$ волны $e_{2,1}(\tau_2)$ с частотой $\omega_2 \approx \gamma\omega/4$ и ее фазы $\psi(\gamma,\varphi)$, полагая в (39) $\omega_2(y) \approx \frac{\gamma\omega}{4}$, $\Psi_1(t,y) \approx \frac{\gamma\omega t}{4}$, $\Phi_2(y) \approx \frac{ny}{2}$:

$$e_{2,1}(\tau_2) \approx -\frac{\epsilon_1}{2\pi}\cdot\int\limits_0^{\pi-\sqrt{3\gamma/2}}\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,ny}{n\,\mathrm{tg}\,y}\right)\cdot\sin[n\theta_S(y)+\varphi]$$
$$\times\cos ny\cdot\left(\cos\left[\frac{ny}{2}+\varphi\right]\sin\frac{\gamma\omega t}{4}+\sin\left[\frac{ny}{2}+\varphi\right]\right.$$
$$\left.\times\cos\frac{\gamma\omega t}{4}\right)dy, \quad |e_{2,1}(\tau_2)| \ll \epsilon_1. \qquad (40)$$
$$B(\gamma,\varphi) = \sqrt{B_C^2(\gamma,\varphi)+B_S^2(\gamma,\varphi)},$$
$$\mathrm{tg}\,\phi(\gamma,\varphi) = \frac{B_S(\gamma,\varphi)}{B_C(\gamma,\varphi)},$$

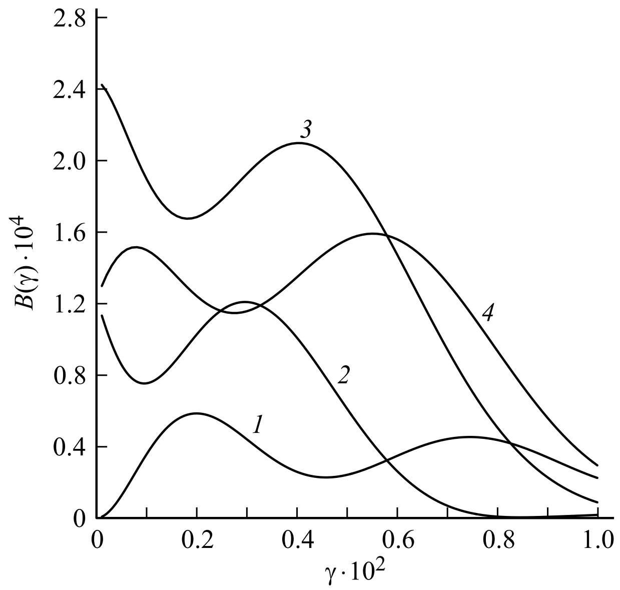

Рис. 4. Зависимости $B = B(\gamma,\varphi)$ от γ при $n = 32$ и различных значениях φ: *1* — 0, *2* — $\pi/4; 5\pi/4$, *3* — $\pi/3; 3\pi/2$, *4* — $3\pi/4; 7\pi/4$.

где

$$B_C(\gamma,\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_0^{\pi-\sqrt{3\gamma/2}}\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,ny}{n\,\mathrm{tg}\,y}\right)\cdot\sin[n\theta_S(y)+\varphi]$$
$$\times\cos ny\cdot\sin\left[\frac{ny}{2}+\varphi\right]dy,$$
$$B_S(\gamma,\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_0^{\pi-\sqrt{3\gamma/2}}\left(1-\frac{\mathrm{tg}\,ny}{n\,\mathrm{tg}\,y}\right)\cdot\sin[n\theta_S(y)+\varphi]$$
$$\times\cos ny\cdot\cos\left[\frac{ny}{2}+\varphi\right]dy.$$

Из выражений (40) видно, что характеристики отраженной от разрывов волны $e_{2,1}(\tau_2)$ зависят не только от параметра γ нелинейности среды, но и от фазы ВЧ волны φ и от значения $n = (\omega/\Omega) \gg 1$. На рис. 4 и 5 приведены зависимости $B(\gamma,\varphi)$ и $\phi(\gamma,\varphi)$ от параметра γ при различных φ и $n = 32$. Из этих рисунков видно, что эти зависимости немонотонны и имеют сложную форму. На рис. 6 приведены зависимости $B(\gamma,\varphi)$ и $\phi(\gamma,\varphi)$ от фазы φ, при $\gamma = 10^{-3}$ и $n = 32$. Эти зависимости периодичны с периодом, равным π, при этом значение $B(\gamma,\varphi)$ в пределах этого периода изменяется весьма заметно — почти в 10 раз. На рис. 7 приведены зависимости $B(\gamma,\varphi)$ и $\phi(\gamma,\varphi)$ от n при $\gamma = 10^{-3}$ и $\varphi = \pi/2$. Здесь довольно сложные, немонотонные и квазипериодические зависимости $B(\gamma,\varphi)$ и $\phi(\gamma,\varphi)$ от n связаны с интерференцией волновых возмущений, возникающих при отражении слабой ВЧ волны от многих разрывов ударной волны (8), при этом $B(\gamma,\varphi)$ уменьшается с ростом n (в среднем, конечно).

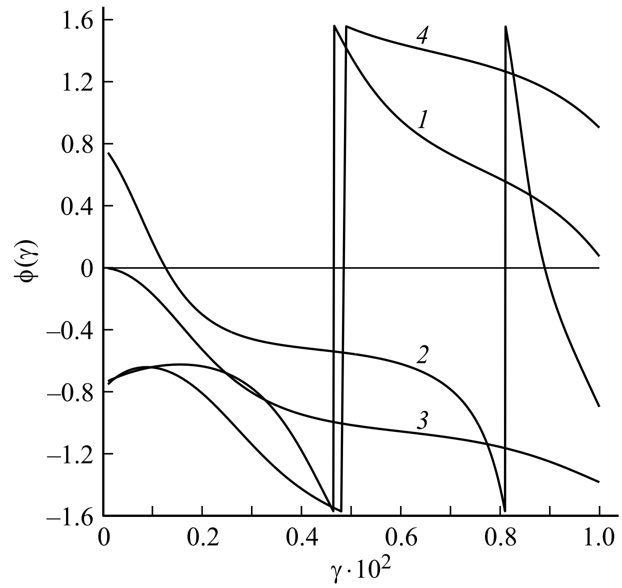

Рис. 5. Зависимости $\phi(\gamma, \varphi)$ от γ при $n = 32$ и различных значениях φ: *1* — 0, *2* — $\pi/4; 5\pi/4$, *3* — $\pi/3; 3\pi/2$, *4* — $3\pi/4; 7\pi/4$.

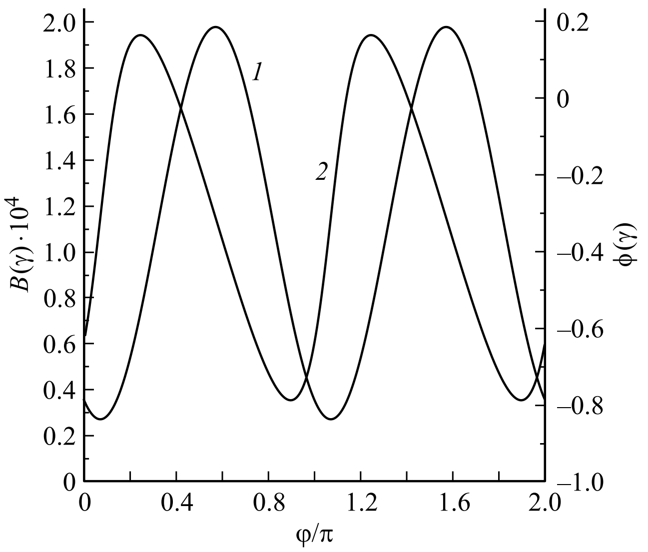

Рис. 6. Зависимости: $B = B(\gamma, \varphi)$ (*1*), $\phi = \phi(\gamma, \varphi)$ (*2*) от фазы φ при $\gamma = 10^{-3}$ и $n = 32$.

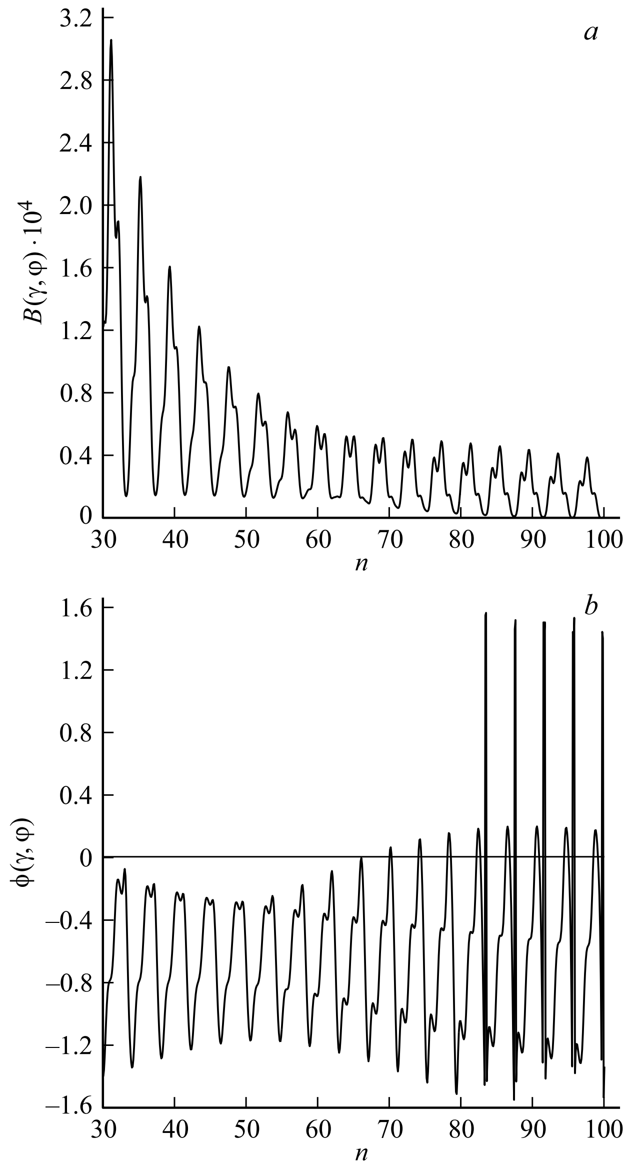

Рис. 7. Зависимости $B(\gamma, \varphi)$ (*a*) и $\phi(\gamma, \varphi)$ (*b*) от n при $\gamma = 10^{-3}$ и $\varphi = \pi/2$.

Наконец, отметим, что при $z \geq z_0 \approx \pi - \sqrt{3\gamma/2}$, т.е. после образования на каждом периоде НЧ волны однополярного импульса, волна, распространяющаяся в положительном направлении оси x, будет представлять собой периодическую последовательность однополярных импульсов (24) и ВЧ импульсов волны $\varepsilon_1(\theta, z)$, распространяющихся со скоростью C_1:

$$\varepsilon(\theta_1, z \geq z_0) \approx \gamma[\epsilon_0 \sin\theta_1 + \epsilon_1 \sin(n\theta_1 + \varphi)]$$

$$\times \sum_{p=1}^{\infty} [h(\theta_1 + \theta_0) - 2\pi p) - [h(\theta_1 - \theta_0) - 2\pi p)] > 0,$$

где $\theta_1 = \Omega\tau_1$, $\tau_1 = t - x/C_1$, $\theta_0 = \sqrt{3\gamma/2}$, $h(\theta_1)$ — функция Хевисайда, $\epsilon_1 \ll \sqrt{6\gamma}\epsilon_0$.

Заключение

В работе проведено теоретическое исследование распространения продольных первоначально гармонических сильной НЧ и слабой ВЧ упругих волн в идеальной недиспергирующей среде с разномодульной нелинейностью с учетом эффектов отражения от ударных фронтов волны. Получены выражения для нелинейной волны, а также для амплитуд, частот и фаз гармонических составляющих возмущения, отраженного от разрывов ударной волны. Показано, что нелинейный режим распространения сильной НЧ первоначально гармонической волны имеет место только до конечного расстояния $z < z_0 \approx \pi - \sqrt{3\gamma/2}$, после чего на каждом периоде НЧ волны образуется слабый однополярный импульс с амплитудой $\varepsilon_0(z \geq z_0) = \sqrt{6\gamma}\epsilon_0 \ll \epsilon_0$ и длительностью $2\theta_0 \approx \sqrt{6\gamma} \ll 2\pi$, который распространяется со скоростью C_1 без изменения формы. При совместном распространении НЧ и ВЧ волн, при $z \geq z_0$, форма нелинейной волны $\varepsilon(\theta, z)$ представляет собой периодическую последовательность однополярных НЧ и ВЧ импульсов, распространяющихся со скоростью C_1. Показано, что амплитуды, частоты и фазы гармонических составляющих отраженной от разрывов сильной НЧ волны определяются параметром разномодульной нелинейности среды, а те же характеристики отраженной слабой ВЧ волны зависят еще от ее начальной фазы и от значения $n = (\omega/\Omega) \gg 1$. Таким образом, результаты исследования эффектов распространения продольных НЧ и ВЧ волн и их отражения от разрывов могут быть использованы для определения нелинейных свойств разномодульных сред при проведении соответствующих экспериментов. Полученные результаты представляют интерес для развития теории волновых процессов в средах с неаналитической нелинейностью; они также могут быть использованы и для создания нелинейных методов акустической диагностики микро- неоднородных твердых тел и материалов, содержащих трещины.

Финансирование работы

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант N20-02-00215A).

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] L.D. Landau, E.M. Lifshiz. *Course of Theoretical Physics, Hydrodynamics* (Pergamon Press, N.Y., 1986), v. 6.
[2] O.V. Rudenko, S.I. Soluyan. *Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics* (Nauka, M., 1975; Consultant Bureau, NY., 1977)
[3] K.A. Naugol'nykh, L.A. Ostrovsky. *Nonlinear Wave Processes in Acoustics* (Cambridge University Press, 1998)
[4] C.L. Morfey, V.W. Sparrow. J. Acoust. Soc. Am., **93** (6), 3085 (1993).
[5] S.N. Makarov. Acustica, **80**, 1 (1994).
[6] M.A. Isakovich. *General Acoustics* (Cembridge Univ., Cembridge, 1973)
[7] S.A. Ambartsumyan, A.A. Khachatryan, Mechan. Solid., **1**, 29 (1966).
[8] С.А. Амбарцумян. *Разномодульная теория упругости* (Наука, М., 1982), 359 с.
[9] Y. Benveniste. Intern. J. Eng. Sci., **18** (6), 815 (1980).
[10] V.P. Maslov, P.P. Mosolov. Appl. Math. Mech. (PMM USSR), **49**, 322 (1985).
[11] V.E. Nazarov, L.A. Ostrovsky. Sov. Phys. Acoustics, **36** (1), 106 (1990).
[12] S.N. Gavrilov, G.C. Herman. J. Sound Vibr., **331**, 4464 (2012).
[13] О.В. Дудко, В.Е. Рагозина. Механика твердого тела, **1**, 134 (2018).
[14] A. Radostin, V. Nazarov, S. Kiyashko. Wave Motion, **50**, 191 (2013).
[15] M. Kuznetsova, M. Khudyakov, V. Sadovskii. Mechan. Adv. Mater. Structures, 1 (2021).
[16] Z. Lu, A.N. Norris. J. Vibration and Acoustics, **142** (2), (2020).
[17] O.V. Dudko, A.A. Mantsybora. J. Appl. Industrial Mathem., **15** (1), 39 (2021).
[18] L.D. Landau, E.M. Lifshiz. *Course of Theoretical Physics, Theory of Elasticity* (Pergamon Press, NY., 1986), v. 7.