01.5

Двухкомпонентное бризерное решение уравнения Хироты

© Г.Т. Адамашвили

Грузинский технический университет, Тбилиси, Грузия
E-mail: guram_adamashvili@ymail.com

Поступило в Редакцию 30 сентября 2021 г.
В окончательной редакции 11 октября 2021 г.
Принято к публикации 12 октября 2021 г.

Уравнение Хироты трансформируется к связанным нелинейным уравнениям Шредингера с использованием обобщенного пертурбативного метода редукции. Получено решение уравнения Хироты для двухкомпонентного векторного бризера, осциллирующего на суммарной и разностной частотах и суммарных и разностных волновых числах, которое совпадает с векторным 0π-импульсом самоиндуцированной прозрачности.

Ключевые слова: обобщенный пертурбативный метод редукции, двухкомпонентный бризер, уравнение Хироты.

DOI: 10.21883/PJTF.2022.03.51972.19041

Локализованная в пространстве и во времени нелинейная уединенная волна, сохраняющая свою форму неизменной, является одной из наиболее существенных характеристик нелинейной среды, в которой она распространяется. В зависимости от физических условий и свойств среды могут формироваться различные виды уединенных волн, среди которых наиболее часто встречаются солитоны или их различные версии. Особый интерес вызывают уединенные волны малой амплитуды, к которым относятся бризеры. Солитоны и бризеры являются скалярными однокомпонентными нелинейными волнами, которые встречаются в совершенно различных областях физики, таких как гидродинамика, акустика, плазма, оптика, теория поля и др. Нелинейные уединенные волны являются решениями различных нелинейных уравнений, среди которых скалярное нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), система уравнений Блоха–Максвелла, уравнение Кортевега–де Фриза, уравнение синус-Гордона и многие другие. Несмотря на многообразие уравнений, формы и свойства их решений являются идентичными. Методы решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных довольно разнообразны [1–3]. Среди этих методов для получения скалярных однокомпонентных решений нелинейных уравнений часто применяется пертурбативный метод редукции (ПМР) [2]. Этот метод позволяет трансформировать довольно широкий класс нелинейных уравнений к скалярному НУШ, решения которого хорошо известны [1].

В некоторых физических ситуациях две скалярные однокомпонентные волны образуют связанное состояние и распространяются в среде как одна нелинейная волна. Такие волны являются решениями связанных (векторных) НУШ и называются двухкомпонентными векторными солитонами или двухкомпонентными векторными бризерами, которые встречаются как для плоских волн, так и для волноводных и поверхностных мод [4,5].

Специального рассмотрения требует двухкомпонентная волна, которая является связанным состоянием двух скалярных однокомпонентных бризеров с одинаковой поляризацией. Один бризер осциллирует на суммарных, а второй — на разностных частотах и волновых числах. Форма этой нелинейной волны отличается от профилей скалярного солитона и скалярного бризера. Впервые такая волна была исследована в теории оптической самоиндуцированной прозрачности (СИП), а затем и в акустической СИП и была названа векторным 0π-импульсом СИП [5,6].

Рассмотрение двухкомпонентных нелинейных волн, осциллирующих на суммарных и разностных частотах и волновых числах (СРЧВ), стало возможным после разработки обобщенного ПМР [5,6], который позволяет трансформировать нелинейные уравнения СИП к связанным (векторным) НУШ для вспомогательных функций. Несколько позже было доказано, что с применением обобщенного ПМР такой же двухкомпонентный векторный бризер может формироваться также для волн совершенно другой физической природы и для совершенно другого типа уравнений, чем в случае СИП, а именно для модифицированного уравнения Бенжамена–Бона–Махони (МББМ). Уравнение МББМ описывает нелинейные волны в ангармонических твердых телах, плазме, жидкостях, акустических метаматериалах, на поверхности диспергирующих сред и т. д. [7,8].

Решениями перечисленных нелинейных уравнений СИП и МББМ, исследованных обобщенным ПМР, являются вещественные функции пространственной координаты и времени. Однако при описании некоторых нелинейных явлений часто встречаются также такие нелинейные уравнения, которым удовлетворяют комплексные нелинейные функции. К ним относятся скалярное НУШ, комплексное модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза (КМКФ) и уравнение Хироты [3,9]:

$$i\frac{\partial u}{\partial t}+\rho\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\delta|u|^2u+i\sigma\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}+i3\alpha|u|^2\frac{\partial u}{\partial z}=0, \qquad (1)$$

где $u(z,t)$ — комплексная функция пространственной координаты и времени, α, ρ, σ, δ — действительные постоянные, которые удовлетворяют условию

$$\alpha\rho = \sigma\delta. \tag{2}$$

При выполнении условия $\alpha = \sigma = 0$ уравнение Хироты сводится к скалярному НУШ

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \rho\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \delta|u|^2 u = 0. \tag{3}$$

А когда выполняется условие $\rho = \delta = 0$, уравнение (1) преобразуется в уравнение КМКФ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sigma\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + 3\alpha|u|^2\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

Иногда уравнение Хироты представляют как

$$i\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha_2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2|u|^2 u\right) + i\alpha_3\left(\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + 6|u|^2\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0,$$

где $\alpha = 2\alpha_3$, $\delta = -2\alpha_2$, $\rho = -\alpha_2$, $\sigma = \alpha_3$; следовательно, удовлетворяется условие (2). Уравнения (1), (3) и (4) встречаются в различных областях физики, во многих нелинейных системах. В частности, уравнение (1) при выполнении условия (2) характеризует квазирезонансное нелинейное взаимодействие лазерного импульса с системой двухуровневых атомов [10]. Хотя однокомпонентные нелинейные волны этих уравнений исследованы [1,3,9], двухкомпонентный бризер, осциллирующий на СРЧВ, до сих пор не был рассмотрен. Для изучения двухкомпонентных волн уравнения (1) рассмотрим вещественную функцию $U(z,t)$ пространственной координаты и времени в форме

$$U = u + u^*, \tag{5}$$

где комплексная функция $u(z,t)$ является решением уравнения Хироты (1), u^* — комплексно-сопряженная функция u.

Для нелинейных импульсов с длительностью T, удовлетворяющих условию

$$T\omega \gg 1, \tag{6}$$

используем приближение медленно меняющейся огибающей, и вещественная функция $U(z,t)$, которая характеризует нелинейный волновой процесс, может быть представлена в следующей форме [11]:

$$U(z,t) = \sum_{l=\pm1}\hat{u}_l(z,t)e^{il(kz-\omega t)}, \tag{7}$$

где $\hat{u}_l$ — медленно меняющаяся комплексная функция, $e^{il(kz-\omega t)}$ — быстроосциллирующая часть, ω и k — частота и волновое число несущей волны.

Цель настоящей работы — показать, что в случае применения обобщенного ПМР выражение (5) приобретает вид двухкомпонентного векторного бризера, осциллирующего на СРЧВ, если справедливы условие (6) и разложение (7), а амплитуда волны $u = \hat{u}_{+1}e^{i(kz-\omega t)}$ удовлетворяет уравнению Хироты (1), а также определить параметры двухкомпонентной нелинейной волны и доказать связь между уравнением Хироты (скалярным НУШ, КМКФ) и связанным (векторным) НУШ для вспомогательных функций.

Подставляя выражение $u = \hat{u}_{+1}e^{i(kz-\omega t)}$ в уравнение (1) и функцию $u^* = \hat{u}_{-1}e^{-i(kz-\omega t)}$ в комплексно-сопряженное уравнение, получаем нелинейное уравнение для медленно меняющейся комплексной функций $\hat{u}_l$

$$il\frac{\partial \hat{u}_l}{\partial t} + ilA\frac{\partial \hat{u}_l}{\partial z} + B\frac{\partial^2 \hat{u}_l}{\partial z^2} + il\sigma\frac{\partial^3 \hat{u}_l}{\partial z^3} + D|\hat{u}_l|^2\hat{u}_l + 3\alpha il|\hat{u}_l|^2\frac{\partial \hat{u}_l}{\partial z} = 0 \tag{8}$$

и закон дисперсии импульса в среде

$$\omega = (\rho - \sigma k)k^2, \tag{9}$$

где $A = 2\rho k - 3\sigma k^2$, $B = \rho - 3\sigma k$, $D = \delta - 3\alpha k$, $l = \pm1$.

Для исследования двухкомпонентного решения уравнения (8) используем обобщенный ПМР [5,6,8], с помощью которого функцию $\hat{u}_l$ можно представить как

$$\hat{u}_l(z,t) = \sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varepsilon^\alpha Y_{l,n} f_{l,n}^{(\alpha)}(\xi_{l,n},\tau), \tag{10}$$

где $Y_{l,n} = e^{in(Q_{l,n}z-\Omega_{l,n}t)}$, $\xi_{l,n} = \varepsilon Q_{l,n}(z - v_{l,n}t)$, $\tau = \varepsilon^2 t$, $v_{l,n} = \frac{d\Omega_{l,n}}{dQ_{l,n}}$, ε — малый параметр. Такое разложение позволяет выделить из $\hat{u}_l$ еще более медленно меняющиеся вспомогательные функции $f_{l,n}^{(\alpha)}$. Предполагается, что $\omega \gg \Omega_{l,n}$, $k \gg Q_{l,n}$ для любых значений индексов l и n.

Подставляя уравнение (10) в уравнение (8) и приравнивая к нулю члены с одинаковыми степенями ε, после стандартной процедуры [5,6,8] можем получить связанные НУШ для вспомогательных функции $\lambda_\pm = \varepsilon f_{+1,\pm1}^{(1)}$ в виде

$$i\left(\frac{\partial \lambda_\pm}{\partial t} + v_\pm\frac{\partial \lambda_\pm}{\partial z}\right) + p_\pm\frac{\partial^2 \lambda_\pm}{\partial z^2} + \left(q_\pm|\lambda_\pm|^2 + r_\pm|\lambda_\mp|^2\right)\lambda_\pm = 0, \tag{11}$$

а также определить связь между осциллирующими параметрами $\Omega_{l,n}$ и $Q_{l,n}$:

$$\Omega_{\pm1} - AQ_{\pm1} \mp BQ_{\pm1}^2 + \sigma Q_{\pm1}^3 = 0, \tag{12}$$

где

$$p_\pm = B \mp 3\sigma Q_{\pm1}, \quad q_\pm = D \mp 3\alpha Q_{\pm1},$$
$$r_\pm = 2D + 3\alpha(Q_{-1} - Q_{+1}), \quad v_\pm = A \pm 2BQ_{\pm1} - 3\sigma Q_{\pm1}^2,$$
$$\Omega_{\pm1,\pm1} = \Omega_{+1}, \quad \Omega_{\pm1,\mp1} = \Omega_{-1},$$
$$Q_{\pm1,\pm1} = Q_{+1}, \quad Q_{\pm1,\mp1} = Q_{-1}. \tag{13}$$

Подставляя решение уравнения (11) в уравнения (10), (5) и (7), получаем двухкомпонентный векторный бризер, осциллирующий на суммарной $\omega + \Omega_{+1}(k + Q_{+1})$ и разностной $\omega - \Omega_{-1}(k - Q_{-1})$ частотах (волновых числах) уравнения Хироты (1) в форме

$$U(z,t) = R\,\mathrm{sech}\left(\frac{t - \frac{z}{V_0}}{T}\right) \times \sum_{j=\pm 1} F_j \cos\big[(k + jQ_j + k_j)z - (\omega + j\Omega_j + \omega_j)t\big], \tag{14}$$

где $F_{+1} = 1$, $F_{-1} = \sqrt{\frac{p_- q_+ - p_+ r_-}{p_+ q_- - p_- r_+}}$, R, T и V_0 — амплитуда, ширина и скорость двухкомпонентного нелинейного импульса, $k_{\pm 1}$ и $\omega_{\pm 1}$ — действительные постоянные. Предполагаем, что справедливы неравенства $k_{\pm 1} = \frac{V_0 - v_\pm}{2p_\pm} \ll Q_{\pm 1}$, $\omega_\pm \ll \Omega_{\pm 1}$. Параметры нелинейной волны определяются уравнениями (13), дисперсионное соотношение и связь между осциллирующими параметрами представлены уравнениями (9) и (12).

Более точно решение (14) является решением уравнения (5), комплексная амплитуда которого представляет собой решение уравнения Хироты при выполнении условий (6) и (7). Решение (14) совпадает с векторным 0π-импульсом СИП [5,6].

Суммируя полученные результаты, можно сделать следующий важный вывод: применение обобщенного ПМР позволяет получить двухкомпонентные векторные бризеры, осциллирующие на СРЧВ, для функций совершенно различной физической природы (оптические, акустические, гидродинамические, плазменные и т. д.) в разных средах, являющиеся решениями совершенно различных нелинейных уравнений как в случае вещественных функций для уравнений СИП и МББМ, так и в случае комплексных функций для уравнения Хироты, скалярного НУШ и КМКФ.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский, *Теория солитонов* (Наука, М., 1980).
[2] T. Taniuti, N. Iajima, J. Math. Phys., **14**, 1389 (1973).
[3] R. Hirota, *The direct method in soliton theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
[4] D.A. Zezyulin, Y.V. Kartashov, V.V. Konotop, Phys. Rev. A, **104**, 023504 (2021). DOI: 10.1103/PhysRevA.104.023504
[5] G.T. Adamashvili, Eur. Phys. J. D, **74**, 41 (2020). DOI: 10.1140/epjd/e2020-100588-y
[6] G.T. Adamashvili, Phys. Rev. E, **85**, 067601 (2012). DOI: 10.1103/PhysRevE.85.067601
[7] T.B. Benjamin, J.L. Bona, J.J. Mahony, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A, **272**, 47 (1972).
[8] Г.Т. Адамашвили, Письма в ЖТФ, **47** (11), 14 (2021). DOI: 10.21883/PJTF.2021.11.51000.18511
[9] R. Hirota, J. Math. Phys., **14**, 805 (1973).
[10] S.V. Sazonov, Rom. Rep. Phys., **70**, 401 (2018). http://www.rrp.infim.ro/IP/2018/AN401.pdf
[11] Л. Аллен, Дж. Эберли, *Оптический резонанс и двухуровневые атомы* (Мир, М., 1978).