Оптика и спектроскопия, 2022, том 130, вып. 2

03

Пучки Гельмгольца–Гаусса с квадратичной радиальной зависимостью

© А.Б. Плаченов [1], Г.Н. Дьякова [2]

[1] МИРЭА — Российский технологический университет,
119454 Москва, Россия
[2] Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,
190000 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: a_plachenov@mail.ru

Поступила в редакцию 10.05.2021 г.
В окончательной редакции 07.11.2021 г.
Принята к публикации 08.11.2021 г.

Построен новый класс локализованных решений параксиального параболического уравнения. Каждое из них имеет вид произведения некоторой гауссовски локализованной осесимметричной функции (не являющейся фундаментальной модой) и амплитудного множителя. Показано, что соответствующую амплитудную функцию можно выразить через произвольное решение уравнения Гельмгольца на вспомогательной двулистной комплексной поверхности. Рассмотренный класс локализованных решений содержит как известные ранее, так и новые семейства решений параболического уравнения. Среди них содержатся решения, описывающие оптические вихри различного порядка, расположенные как на оптической оси, так и вне ее.

Ключевые слова: параболическое уравнение, квадратичные пучки, Гаусс, Гельмгольц, Бессель.

DOI: 10.21883/OS.2022.02.51993.2269-21

1. Введение

В настоящей работе строится новый класс решений параболического уравнения [1,2]

$$2iku_z + \Delta_\perp u = 0, \tag{1}$$

(оно также называется параксиальным волновым уравнением [3]), где $\Delta_\perp = \partial_{xx} + \partial_{yy}$, а $k = \text{const}$ — волновое число. Предполагается, что $|u| \to 0$ при $|x| + |y| \to \infty$. Мы будем называть z продольной координатой, а x и y — поперечными координатами.

Решения уравнения (1) используются для приближенного описания гармонического по времени распространения волн вдоль оси z [1–4] при выполнении условий параксиальности [3,4]. Решения уравнения (1) могут быть использованы и как техническое средство при построении точных негармонических по времени решений волнового уравнения. Выполнения условий параксиальности при этом не требуется [4–9].

Рассматриваемый в работе класс строится на базе квадратичных пучков Бесселя–Гаусса [7] и включает в себя несколько подклассов, один из которых — хорошо известные астигматические гауссовы пучки, связь которых с квадратичными пучками Бесселя–Гаусса исследована в работе [10], другие имеют сходство с асимметричными [11] и смещенными [12] пучками Бесселя–Гаусса. Среди них содержатся решения, описывающие оптические вихри различного порядка, что открывает перспективу их использования в многочисленных приложениях — от манипуляции микрочастицами до передачи информации [13].

Пучки, относящиеся к рассматриваемому классу, в значительной мере наследуют геометрические свойства квадратичных пучков Бесселя–Гаусса, отличающие их от классических (линейных) пучков Бесселя–Гаусса [7,14,15]. Как отмечено в [7], „в то время как последние имеют в существенном коническую геометрию, первые распространяются коллинеарно". Это связано с тем, что квадратичные пучки Бесселя–Гаусса являются компонентами разложения в ряд Фурье по угловой переменной астигматического гауссова пучка, распространяющегося вдоль оптической оси [10], а классические — осесимметрического, но наклоненного относительно оптической оси и/или смещенного в поперечном направлении [15].

При построении рассматриваемого класса используется новое техническое средство — двулистная поверхность и решения уравнения Гельмгольца на этой поверхности. Во избежание ложных ассоциаций сразу хотим подчеркнуть, что эта поверхность не является римановой поверхностью какой-либо аналитической функции комплексной переменной. Важную роль играет вторичное параболическое уравнение, которое возникало ранее в работе [16] при построением класса решений Гельмгольца–Гаусса с линейной радиальной зависимостью. В работах [17,18] этот подход обобщается на среды с квадратичной зависимостью показателя преломления от радиуса.

2. Классы решений Лапласа–Гаусса и Гельмгольца–Гаусса и вторичное параболическое уравнение

Хорошо известна фундаментальная мода уравнения (1) — гауссов пучок [19], имеющий вид

$$G = \frac{C}{q(z)} \exp\left\{ \frac{ik}{2} \frac{r^2}{q(z)} \right\}, \tag{2}$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, $q(z) = z - z_0 - ib$, z_0 и $b > 0$ — вещественные постоянные, а C — комплексная постоянная. Эта функция гауссовски локализована по поперечным координатам. Решения уравнения (1), имеющие вид

$$u = AG, \tag{3}$$

где $A = A(x, y, z) \neq \text{const}$, называются высшими модами. Функцию A назовем амплитудой [16]. Подставив (3) в (1), получаем

$$2ikA_z + \Delta_\perp A + 2ik \frac{xA_x + yA_y}{q(z)} = 0.$$

Выполнив, следуя [16,17,20], комплексную замену переменных

$$X = \frac{x}{q(z)}, \quad Y = \frac{y}{q(z)}, \quad Z = -\frac{1}{q(z)}, \tag{4}$$

после некоторых преобразований приходим к параболическому уравнению для амплитуды:

$$2ikA_Z + \widehat{\Delta} A = 0, \tag{5}$$

где

$$\widehat{\Delta} = \partial_{XX} + \partial_{YY}. \tag{6}$$

По терминологии, предложенной в [17], уравнение (5) называется вторичным параболическим уравнением.

Если амплитуда A не зависит от Z:

$$A = \Psi(X, Y),$$

мы приходим к уравнению Лапласа

$$\widehat{\Delta}\Psi = 0$$

и получаем моды Лапласа–Гаусса [16,20]

$$u = \Psi\left(\frac{x}{q(z)}, \frac{y}{q(z)} \right) G,$$

где Ψ — произвольная гармоническая функция.

Если амплитуда зависит от Z экспоненциально:

$$A = \exp\left(-i \frac{K^2}{2k} Z \right) \Psi(X, Y),$$

где K — произвольная комплексная постоянная, то приходим к уравнению Гельмгольца

$$\widehat{\Delta}\Psi + K^2 \Psi = 0 \tag{7}$$

и получаем моды Гельмгольца–Гаусса [16,20,21]

$$u = \Psi\left(\frac{x}{q(z)}, \frac{y}{q(z)} \right) \exp\left(\frac{iK^2}{2kq(z)} \right) G,$$

где Ψ — произвольное решение уравнения (7).

Частными случаями таких мод являются построенные Гори, Гуаттари и Падовани пучки Бесселя–Гаусса [7,14,15]

$$u_m = \frac{C}{q(z)} \exp\left\{ \frac{ikr^2}{2q(z)} + \frac{iK^2}{2kq(z)} + im\phi \right\} J_m\left(\frac{Kr}{q(z)} \right), \tag{8}$$

где ϕ — полярный угол на плоскости xy, и их обобщения [11,12,17,22].

Отметим, что значения комплексных координат X, Y, отвечающие точкам физического пространства, не являются полностью независимыми: как видно из (4), их аргументы либо совпадают, либо отличаются на π, т. е. X и Y линейно зависимы над полем вещественных чисел. Множество таких пар (X, Y), которое мы будем называть физическим листом, допускает параметризацию через полярные координаты:

$$X = R\cos\Phi, \quad Y = R\sin\Phi, \tag{9}$$

где $R = r/q(z)$ — комплексный полярный радиус, а $\Phi = \phi$ — вещественный полярный угол. Оператор Лапласа на физическом листе, выраженный через R, Φ, имеет вид

$$\widehat{\Delta} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2}, \tag{10}$$

при этом по переменной Φ предполагается выполненным условие 2π-периодичности. В частности, пучки Бесселя–Гаусса (8) могут быть получены выбором решения уравнения (7), имеющего в полярных координатах вид

$$H = J_m(KR) \exp(im\Phi).$$

Изложенные в настоящем разделе приемы будут использованы при построении решений другого типа — квадратичных пучков Гельмгольца–Гаусса.

3. Квадратичные пучки Бесселя–Гаусса и Гельмгольца–Гаусса

Рассмотрим другой тип локализованных решений уравнения (1), а именно найденные Кэроном и Потвлиджем пучки Бесселя–Гаусса с квадратичной радиальной зависимостью [7] или, кратко, квадратичные пучки Бесселя–Гаусса. Эти решения в работе [7] построены в виде

$$u_m = E_m \frac{w_0}{W(z)} \exp\left[-\left(1 + i(\mu^2 + 1)\frac{z}{z_R} \right) \frac{r^2}{W^2(z)} \right] \times J_{|m|/2}\left[\frac{\mu r^2}{W^2(z)} \right] \exp(im\phi), \tag{11}$$

где $J_{|m|/2}$ — функция Бесселя порядка $|m|/2$, а

$$W(z) = w_0\sqrt{1-(\mu^2+1)\left(\frac{z}{z_R}\right)^2+2i\frac{z}{z_R}}. \qquad (12)$$

При этом w_0 и

$$z_R = \frac{kw_0^2}{2} \qquad (13)$$

— вещественные, а E_m и μ — комплексные параметры, характеризующие решение. Пучок (11) гауссовски локализован по поперечным координатам при $|\mathrm{Im}\mu| < 1$. Такие функции существенно отличаются от (8). В частности, аргумент функции Бесселя содержит r^2 вместо r, а ее индекс равен $|m|/2$. В то же время вихрь на оптической оси пучка (11) имеет тот же топологический заряд m, что и (8).

Нам при дальнейших построениях будет удобно пользоваться не оригинальной формой записи (11), которую мы назовем *шотландской*, а альтернативной (*испанской*) формой [10,23], предложенной Чаморро-Посадой:

$$u_m = \frac{C}{\sqrt{q_1(z)q_2(z)}}\exp\left\{ik\xi(z)r^2+im\phi\right\}J_{|m|/2}(k\eta(z)r^2), \qquad (14)$$

где $q_j(z) = z - z_j - ib_j$, $j = 1, 2, z_j$ и $b_j > 0$ — вещественные постоянные, C — комплексная постоянная,

$$\xi(z) = \left(q_1^{-1}(z)+q_2^{-1}(z)\right)/4,$$

$$\eta(z) = \left(q_1^{-1}(z)-q_2^{-1}(z)\right)/4.$$

В работе [10] доказана эквивалентность с точностью до сдвига по продольной переменной z шотландского (11) и испанского (14) представлений квадратичного пучка Бесселя–Гаусса и установлена связь между характеризующими эти представления параметрами.

Отметим, что функция

$$\widehat{G} = \frac{C}{\sqrt{q_1(z)q_2(z)}}\exp\left\{ik\xi(z)r^2\right\}, \qquad (15)$$

в отличие от (2), не удовлетворяет уравнению (1). Тем не менее будем искать решения уравнения (1), обобщающие квадратичные пучки Бесселя–Гаусса (14), в виде, аналогичном (3):

$$u = A\widehat{G}, \qquad (16)$$

с некоторой непостоянной амплитудной функцией $A = A(r, \phi, z)$. Если подставить (16) в (1) и выполнить комплексную замену переменных

$$R = \eta(z)r^2, \quad \Phi = 2\phi, \quad Z = \ln\frac{q_1(z)}{q_2(z)}, \qquad (17)$$

то после некоторых преобразований (Приложение) придем к вторичному параболическому уравнению для амплитуды, имеющему вид

$$2ikA_Z + R(\widehat{\Delta}+k^2)A = 0, \qquad (18)$$

с периодическими условиями

$$A(Z, R, \Phi+4\pi) = A(Z, R, \Phi), \qquad (19)$$

происходящими из требования однозначности решения в физическом пространстве. В уравнении (18) аналитическое выражение для оператора $\widehat{\Delta}$ совпадает с (10). Отличие от рассмотренного выше случая состоит в нестандартных периодических условиях (19) по переменной Φ, играющей роль угла. Поэтому мы будем теперь интерпретировать стоящий в уравнении (18) оператор $\widehat{\Delta}$ как лапласиан на вспомогательной двулистной комплексной поверхности с точкой ветвления при $R = 0$, первый лист которой отвечает $\Phi \in [0, 2\pi)$, а второй — $\Phi \in [2\pi, 4\pi)$ с разрезами при $\Phi = 2\pi n$. Каждый из таких листов аналогичен рассмотренному выше физическому листу, возникающему при построении мод Лапласа–Гаусса и Гельмгольца–Гаусса с обычной (линейной) радиальной зависимостью [16,20,21]. Как и раньше, точки такой поверхности характеризуются комплексной радиальной переменной R и вещественной угловой переменной Φ.

Ограничимся рассмотрением решений (18), не зависящих от Z:

$$A = \Psi(R, \Phi). \qquad (20)$$

В этом случае мы приходим к уравнению Гельмгольца

$$(\widehat{\Delta}+k^2)\Psi(R, \Phi) = 0. \qquad (21)$$

Мы видим, что произвольному решению $\Psi(R, \Phi)$ уравнения Гельмгольца на двулистной поверхности соответствует некоторое решение уравнения (1) в исходном физическом пространстве:

$$u = \Psi(\eta(z)r^2, 2\phi)\widehat{G}. \qquad (22)$$

Если первый сомножитель ограничен или растет не слишком быстро, то функция (22) локализована по поперечным координатам. В этом случае такое решение уравнения (1) естественно назвать квадратичным пучком Гельмгольца–Гаусса. Подчеркнем, что если Ψ является 4π-периодичной по Φ функцией, то функция u соответственно 2π-периодична по ϕ.

Произвольное решение уравнения (21) на двулистной поверхности представляется в виде суммы двух решений, одно из которых 2π-периодично по Φ, а второе 2π-антипериодично. В физическом пространстве это соответствует решениям, четными и нечетным относительно поворота на угол π вокруг оптической оси. Первое слагаемое является гладким решением уравнения (21) на однолистной поверхности (т. е. на плоскости с комплексифицированной радиальной переменной), а второе на первом листе ($\Phi \in [0, 2\pi)$) удовлетворяет уравнению (21) с краевыми условиями на разрезе:

$$\begin{cases}\Psi(R, 2\pi) = -\Psi(R, 0),\\ \Psi_\Phi(R, 2\pi) = -\Psi_\Phi(R, 0),\end{cases}$$

причем на второй лист ($\Phi \in [2\pi, 4\pi)$) оно продолжается нечетным образом.

4. Примеры

4.1. Квадратичные пучки Бесселя–Гаусса

Если взять

$$\Psi_m = J_{|m|/2}(kR)\exp\left\{i\frac{m}{2}\Phi\right\} = J_{|m|/2}(k\eta(z)r^2)\exp\{im\phi\}, \tag{23}$$

то функция (22) совпадет с (14).

4.2. Асимметричные квадратичные пучки Бесселя–Гаусса

Построения настоящего раздела основаны на подходе, позволившем в работе [24] получить асимметричные моды Бесселя, а в работе [11] — асимметричные пучки Бесселя–Гаусса.

Воспользуемся тождеством 5.7.6.1 из [25]

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{t^p}{p!}J_{p+\nu}(s) = s^{\nu/2}(s-2t)^{-\nu/2}J_\nu\left(\sqrt{s(s-2t)}\right), \tag{24}$$

$$|2t| < s.$$

В случае $s = kR$, $\nu = |m|/2$, $t = 2kc\exp(i\Phi\kappa)$ ($\kappa = 1$ для $m \geq 0$, $\kappa = -1$ для $m \leq 0$, при $m = 0$ знак можно взять любым, c — некоторая комплексная константа) из (24) вытекает, что

$$\tilde{\Psi}_m = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(kc)^p}{p!}\Psi_{m+2p\kappa} = \left(\frac{R}{R-2c\exp(i\Phi\kappa)}\right)^{|m|/4}$$
$$\times J_{|m|/2}\left(k\sqrt{R(R-2c\exp(i\Phi\kappa))}\right)\exp\left\{i\frac{m}{2}\Phi\right\}. \tag{25}$$

Эти решения (асимметричные моды Бесселя) были найдены в [24] для случая четных положительных m, когда они регулярны на однолистной поверхности, и были использованы в [11] для построения асимметричных пучков Бесселя–Гаусса. В общем случае, несмотря на ограничение $|2t| < s$ (т.е. $|2c| < R$) в формуле (24), функции (25) удовлетворяет уравнению Гельмгольца (21) на всей двулистной поверхности при произвольном значении c, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой. При этом в точке, где обращается в нуль разность $R - 2c\exp(i\Phi\kappa)$, функция (25) имеет устранимую особенность. При $c = 0$ функции (25) совпадают с (23). Если вернуться к исходным переменным, то (25) принимает вид

$$\tilde{\Psi}_m = \left(\frac{\eta(z)r^2}{\eta(z)r^2 - 2c\exp(2i\phi\kappa)}\right)^{|m|/4}\exp\{im\phi\}$$
$$\times J_{|m|/2}\left(kr\sqrt{\eta(z)(\eta(z)r^2 - 2c\exp(2i\phi\kappa))}\right). \tag{26}$$

Произведение (22) даст новое семейство локализованных решений уравнения (1), которые по аналогии с [11] будем называть асимметричными квадратичными пучками Бесселя–Гаусса [26]. Такие решения содержат оптический вихрь с топологическим зарядом m, расположенный на оптической оси, и вихри с топологическим зарядом ± 1, расположение которых определяется значениями корней функции Бесселя.

4.3. Сингулярные квадратичные пучки Бесселя–Гаусса и их регуляризация

Рассмотрим функции

$$\Psi_m^- = J_{-|m|/2}(kR)\exp\left\{i\frac{m}{2}\Phi\right\}. \tag{27}$$

Такие функции при $R > 0$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца (21) на двулистной поверхности. При четных m функции (27) либо совпадают с (23), либо отличаются от них знаком и не дают новых решений уравнения (1). Если значения m нечетны, то функции (27) уже не выражаются через (23), причем функции Бесселя с отрицательными полуцелыми индексами неограниченно растут при $R \to 0$. Соответственно функции (22) — сингулярные симметричные пучки Бесселя–Гаусса — имеют особенность на оптической оси и, по-видимому, не имеют непосредственного физического смысла.

Воспользуемся тем не менее формулой (24) и построим новые асимметричные сингулярные решения уравнения (21):

$$\tilde{\Psi}_m^- = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(kc)^p}{p!}J_{-|m|/2+p}(kR)\exp\left\{i\left(\frac{m}{2}-p\kappa\right)\Phi\right\}$$
$$= \sum_{p=0}^{[|m|/2]}\frac{(kc)^p}{p!}\Psi_{m-2p\kappa}^- + \sum_{p=1+[|m|/2]}^{\infty}\frac{(kc)^p}{p!}\Psi_{-m+2p\kappa}$$
$$= \left(\frac{R-2c\exp(-i\Phi\kappa)}{R}\right)^{|m|/4}$$
$$\times J_{-|m|/2}\left(k\sqrt{R(R-2c\exp(-i\Phi\kappa))}\right)\exp\left\{i\frac{m}{2}\Phi\right\}, \tag{28}$$

$\kappa = \operatorname{sign} m$, квадратными скобками обозначена целая часть числа. Соответствующие функции (22) с особенностями на оптической оси будем называть сингулярными асимметричными пучками Бесселя–Гаусса.

Избавимся от сингулярностей на оси, для чего составим линейную комбинацию полученных функций, которая будет ограниченной при $R \to 0$. Самый очевидный способ — снова рассмотреть ряд (28), исключив из него сингулярные слагаемые и оставив только регулярные:

$$\Psi = \tilde{\Psi}_m^- - \sum_{p=0}^{[|m|/2]} \frac{(kc)^p}{p!} \Psi_{m-2p\kappa}^- = \sum_{p=1+[|m|/2]}^{\infty} \frac{(kc)^p}{p!} \Psi_{-m+2p\kappa}$$

$$= \left(\frac{R - 2c\exp(-i\Phi\kappa)}{R}\right)^{|m|/4}$$

$$\times J_{-|m|/2}\left(k\sqrt{R(R-2c\exp(-i\Phi\kappa))}\right)\exp\left\{i\frac{m}{2}\Phi\right\}$$

$$- \sum_{p=0}^{[|m|/2]} \frac{(kc)^p}{p!} J_{-|m|/2+p}(kR)\exp\left\{i\left(\frac{m}{2} - p\kappa\right)\Phi\right\}. \tag{29}$$

Такие регуляризованные амплитуды при $R \to 0$ ограничены и стремятся к нулю.

Опишем другой способ регуляризации рассматриваемых решений. Пусть $N > 1 + m/2$ — натуральное число, а $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$. Рассмотрим N функций $\tilde{\Psi}_{m,j}^-$, $j = 1, \ldots, N$ вида (28), отличающиеся значениями констант $c = c_j$, причем $c_j = c_1\omega_N^{j-1}$. Тогда, как нетрудно убедиться, линейная комбинация

$$\Psi = \sum_{j=1}^{N} \omega_N^{j-1} \tilde{\Psi}_{m,j}^- \tag{30}$$

будет ограничена при $R \to 0$, поскольку коэффициенты при всех нерегулярных слагаемых обратятся в нуль.

Вычислив произведение (22), найдем регуляризованный квадратичный пучок Бесселя–Гаусса, локализованное решение уравнения (1). Независимо от способа регуляризации все такие решения нечетны относительно поворота на угол π вокруг оптической оси, обращаются на этой оси в нуль и имеют на ней оптический вихрь с нечетным топологическим зарядом.

Отметим, что поскольку функции Бесселя с полуцелыми индексами выражаются через элементарные функции [27], сингулярные и регуляризованные квадратичные пучки Бесселя–Гаусса также обладают этим свойством.

4.4. Квадратичные косинус–гауссовы пучки

Рассмотрим простейший частный случай сингулярной амплитуды (27), отвечающий $m = \pm 1$ [27]:

$$\Psi_{\pm 1}^- = J_{-1/2}(kR)\exp\left\{\pm\frac{i\Phi}{2}\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi kR}}\cos kR \exp\left\{\pm\frac{i\Phi}{2}\right\}. \tag{31}$$

Тогда, согласно (28),

$$\tilde{\Psi}_{\pm 1}^- = \sqrt[4]{\frac{R - 2c\exp(\mp i\Phi)}{R}}$$

$$\times J_{-1/2}\left(k\sqrt{R(R-2c\exp(\mp i\Phi))}\right)\exp\left\{\pm\frac{i\Phi}{2}\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi kR}}\cos\left(k\sqrt{R(R-2c\exp(\mp i\Phi))}\right)\exp\left\{\pm\frac{i\Phi}{2}\right\}. \tag{32}$$

Функции (31) и (32) — неограниченные при $R \to 0$ решения уравнения (21) на двулистной поверхности.

Рассмотрим вопрос о регуляризации таких амплитуд. Поскольку при $m = \pm 1$ ряд (28) содержит только одно сингулярное слагаемое, простейшая регуляризованная амплитуда, отвечающая (29) — это просто разность $\tilde{\Psi}_{\pm 1}^- - \Psi_{\pm 1}^-$. В общем случае пусть $\tilde{\Psi}_{\pm 1,j}^-$, $j = 1, \ldots, N$ — функции вида (32), отличающиеся значениями комплексных констант $c = c_j$, причем теперь эти константы уже произвольны. Тогда линейная комбинация

$$\Psi = \sum_{j=1}^{N} C_j \tilde{\Psi}_{\pm 1,j}^- \tag{33}$$

при выполнении условия

$$\sum_{j=1}^{N} C_j = 0 \tag{34}$$

ограничена и стремится к нулю при $R \to 0$. В исходных переменных функция (33) имеет вид

$$\Psi = \frac{\exp\{\pm i\phi\}}{r}\sqrt{\frac{2}{\pi k\eta(z)}}$$

$$\times \sum_{j=1}^{N} C_j \cos\left(kr\sqrt{\eta(z)(\eta(z)r^2 - 2c_j\exp(\mp 2i\phi))}\right). \tag{35}$$

Тогда произведение (22) при выполнении (34) — регулярное локализованное решение уравнения (1), нечетное относительно поворота на угол π относительно оптической оси и обращающееся на этой оси в нуль. Функции такого вида в работе [28] были названы квадратичными косинус–гауссовыми пучками.

4.5. Смещенные квадратичные пучки Бесселя–Гаусса

Описание еще одного семейства решений начнем с рассмотрения декартовых координат на рассматриваемой двулистной поверхности:

$$X = R\cos\Phi = \eta(z)(x^2 - y^2), \tag{36}$$

$$Y = R\sin\Phi = 2\eta(z)xy. \tag{37}$$

Очевидно, при изменении Φ на 2π значения X и Y не меняются. Поэтому любая аналитическая функция, которая может быть выражена через (36) и (37), 2π-периодична по Φ и, следовательно, π-периодична по ϕ. Для таких функций оператор $\widehat{\Delta}$ определяется формулой (6).

Заметим, что

$$R^2 = X^2 + Y^2 = (X + iY)(X - iY), \tag{38}$$

$$\exp\{i\Phi\} = \sqrt{(X + iY)/(X - iY)}$$
$$= (X + iY)/R = R/(X - iY). \tag{39}$$

С помощью (38) и (39) мы можем преобразовать функции (23) с четными номерами, регулярные на однолистной поверхности:

$$\Psi_{2m} = J_{|m|}(kR) \exp\{im\Phi\}$$
$$= J_{|m|}\left(k\sqrt{X^2 + Y^2}\right)\left(\frac{X + iY}{X - iY}\right)^{m/2}. \tag{40}$$

Выполним теперь в (40) сдвиг на постоянный комплексный вектор (X_0, Y_0): $X \mapsto X' = X - X_0$, $Y \mapsto Y' = Y - Y_0$ и получим новые решения уравнения Гельмгольца (21):

$$\Psi'_{2m} = J_{|m|}(kR')\left(\frac{X' + iY'}{X' - iY'}\right)^{m/2}, \tag{41}$$

где

$$R' = \sqrt{X'^2 + Y'^2} = \sqrt{(X' + iY')(X' - iY')}.$$

Такие решения уравнения Гельмгольца были рассмотрены в [29] и использованы для построения смещенных бессель–гауссовых пучков в [12,17].

Используя (41) в качестве амплитудной функции в (22), мы получаем новое семейство решений параболического уравнения (1). Заметим, что в случае $X_0 + iY_0 = 0$ (для $m > 0$) или $X_0 - iY_0 = 0$ (для $m < 0$), (41) превращается в (25) для некоторого c, и, следовательно, смещенные квадратичные бессель-гауссовы пучки превращаются в асимметричные, рассмотренные ранее.

Отметим, что оптический вихрь с топологическим зарядом m, в случае несмещенного квадратичного пучка Бесселя–Гаусса расположенный на оптической оси, в результате комплексного сдвига, вообще говоря, изменяет свое положение и оказывается в точке, где обращается в нуль $X' + iY'$ для $m > 0$ или $X' - iY'$ при $m < 0$.

4.6. Астигматические гауссовы пучки

Класс квадратичных пучков Гельмгольца–Гаусса, как оказывается, содержит хорошо известные астигматические гауссовы пучки. В частности, если взять простейшее решение уравнения Гельмгольца (21), имеющее вид плоской волны на вспомогательной поверхности:

$$\Psi = \exp(ikX) = \exp\left(ik\eta(z)(x^2 - y^2)\right), \tag{42}$$

произведение (22) принимает вид гауссовых пучков с простым астигматизмом [19]:

$$u = \frac{C}{\sqrt{q_1(z)q_2(z)}} \exp\left\{\frac{ik}{2}\left[\frac{x^2}{q_1(z)} + \frac{y^2}{q_2(z)}\right]\right\},$$

направление осей которых совпадают с осями координат. Выбрав другое направление волны на плоскости (XY):

$$\Psi = \exp\left(ik(X\cos\varphi + Y\sin\varphi)\right), \tag{43}$$

где φ — вещественная постоянная, мы приходим к гауссовым пучкам с простым астигматизмом, повернутым относительно осей координат [19] при $\varphi \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Если взять в (43) невещественное значение φ, мы получим при некоторых ограничениях на $\mathrm{Im}\varphi$ общеастигматический пучок Арно–Когельника [8,19,30].

Интересно отметить, что, как показано в работе [10], при разложении гауссова пучка с простым астигматизмом или общеастигматического пучка Арно–Когельника в ряд Фурье по переменной ϕ члены такого разложения имеют вид квадратичных пучков Бесселя–Гаусса с четными номерами.

5. Заключение

В настоящей работе построены квадратичные моды Гельмгольца–Гаусса — новый класс локализованных решений параксиального параболического уравнения. Этот класс содержит как известные решения, такие как квадратичные пучки Бесселя–Гаусса и астигматические гауссовы пучки, так и новые семейства решений, требующие подробного изучения.

Построенный класс содержит как параксиальные, так и непараксиальные решения уравнения (1). Параксиальные решения могут быть использованы для приближенного описания гармонического по времени распространения волн вдоль оси z. В то же время для построения точных нестационарных решений волнового уравнения параксиальность не требуется.

Мы хотим отметить, что вторичное параболическое уравнение, полученное в настоящей работе, на наш взгляд, может быть использовано для построения не только мод Гельмгольца–Гаусса, но и иных типов решений.

Хотим также заметить, что, по-видимому, не исключена возможность существования классов пучков Гельмгольца–Гаусса с зависимостью от радиуса, отличной от линейной и квадратичной. На эту мысль наводят найденные в работе [31] решения, по структуре напоминающие асимметричные пучки Бесселя–Гаусса, в которых, однако, аргумент функции Бесселя на больших расстояниях от оптической оси имеет порядок $r^{3/2}$.

Благодарности

Авторы выражают глубокую признательность А.П. Киселеву, инициировавшему настоящее исследование, и П. Чаморро-Посаде, обратившему внимание одного из авторов на положенное в основу построений настоящей работы альтернативное представление для квадратичных пучков Бесселя–Гаусса.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Приложение

Вывод вторичного параболического уравнения (18)

После подстановки (16) в уравнение (1) и сокращений получаем уравнение для амплитуды:

$$2ikA_z + \frac{1}{r}\,\partial_r(rA_r) + \frac{1}{r^2}A_{\phi\phi}4ik\xi(z)rA_r$$
$$+ 4k^2\eta^2(z)r^2A = 0. \quad (44)$$

Выполним комплексную замену переменных, введя новые координаты (17). В этих переменных

$$A_z = 4\eta A_Z - 4\xi RA_R,$$
$$\frac{1}{r}\,\partial_r(rA_r) = 4v(A_R + RA_{RR}),$$
$$4ik\xi rA_r = 8ik\xi RA_R,$$
$$\frac{1}{r^2}A_{\phi\phi} = \frac{4v}{R}A_{\Phi\Phi},$$

и уравнение (44) принимает вид

$$8ikvA_Z + 4vR\left(\frac{A_R}{R} + A_{RR} + \frac{1}{R^2}A_{\Phi\Phi} + k^2A\right) = 0,$$

что после сокращений совпадает с (18).

Список литературы

[1] V.A. Fock. *Electromagnetic diffraction and propagation problems* (Pergamon Press, 1965); В.А. Фок. *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн* (Советское радио, М., 1970).
[2] В.М. Бабич, В.С. Булдырев. *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн* (Наука, М., 1972); V.M. Babich, V.S. Buldyrev. *Asymptotic Methods in Short-Wavelength Diffraction Theory* (Alpha Science, Oxford, 2009).
[3] A.E. Siegman. *Lasers* (University Science Book, 1986).
[4] А.П. Киселев. Опт. и спектр., **102** (4), 661 (2007). [A.P. Kiselev. Opt. Spectr., **102** (4), 603 (2007). DOI: 10.1134/S0030400X07040200].
[5] W. Miller, Jr. *Symmetry and Separation of Variables* (Addison-Wesley, London–Amsterdam, 1977); У. Миллер, мл. *Симметрия и разделение переменных* (Мир, М., 1981).
[6] P.A. Bélanger. JOSA A, **1** (7), 723 (1984). DOI: 10.1364/JOSAA.1.000723
[7] C.F.R. Caron, R.M. Potvliege. Opt. Commun., **164**, 83 (1999). DOI: 10.1016/S0030-4018(99)00174-1
[8] A.P. Kiselev, A.B. Plachenov, P. Chamorro-Posada. Phys. Rev. A, **85** (4), 043835 (2012). DOI: 10.1103/PhysRevA.85.043835
[9] А.П Киселев., А.Б. Плаченов. Записки научн. семинаров ПОМИ РАН, **393**, 167 (2011). [A.P. Kiselev, A.B. Plachenov. J. Math. Sci. **185** (4), 605 (2012). DOI: 10.1007/s10958-012-0944-7].
[10] A.B. Plachenov, P. Chamorro-Posada, A.P. Kiselev. Phys. Rev. A, **102** (2), 023533 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevA.102.023533
[11] V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, R.V. Skidanov, V.A. Soifer. JOSA A, **31** (9), 1977 (2014). DOI: 10.1364/JOSAA.31.001977
[12] А.Б. Плаченов. Опт. и спектр., **126** (3), 311 (2019). DOI: 10.21883/OS.2019.03.47372.274-18 [A.B. Plachenov. Opt. Spectrosc., **126** (3), 232 (2019). DOI: 10.1134/S0030400X19030172].
[13] Y. Shen, X. Wang, Z. Xie, C. Min, X. Fu, Q. Liu, M. Gong, X. Yuan. Light-Sci. Appl., **8**, 90 (2019). DOI: 10.1038/s41377-019-0194-2
[14] F. Gori, G. Guattari, C. Padovani. Opt. Commun., **64** (6), 491 (1987). DOI: 10.1016/0030-4018(87)90276-8
[15] V. Bagini, F. Frecca, M. Santarsiero, G. Schettini, G. Schirripa-Spagnolo. J. Mod. Opt., **43** (6), 1155 (1996). DOI: 10.1080/09500349608232794
[16] А.П. Киселев. Опт. и спектр., **96** (4), 533 (2004). [A.P. Kiselev. Opt. Spectrosc. **96**, 479 (2004). DOI: 10.1134/1.1719131].
[17] A.P. Kiselev, A.B. Plachenov. JOSA A, **33** (4), 663 (2016). DOI: 10.1364/JOSAA.33.000663
[18] I.A. So, A.P. Kiselev, A.B. Plachenov. EPL, **127** (6), 64002 (2019). DOI: 10.1209/0295-5075/127/64002
[19] G. Nemes. Proc. SPIE, **4932**, 624 (2003). DOI: 10.1117/12.472380
[20] A.P. Kiselev. J. Phys. A: Math. Gen., **36** (23), L345 (2003). DOI: 10.1088/0305-4470/36/23/103
[21] J.C. Gutiérrez-Vega, M.A. Bandres. JOSA A, **22** (2), 289 (2005). DOI: 10.1364/JOSAA.22.000289
[22] C. Huang, Y. Zheng, H. Li. JOSA A, **33** (4), 508 (2016). DOI: 10.1364/JOSAA.33.000508
[23] A.B. Plachenov, G.N. Dyakova. In: *Proc. Int. Conf. „2019 Days on Diffraction (DD)*“, ed. by O.V. Motygin, A.P. Kiselev, L.I. Goray, A.A. Fedotov, A.Ya. Kazakov, A.S. Kirpichnikova (SPb, 2019), p. 148. DOI: 10.1109/DD46733.2019.9016581
[24] V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer. Opt. Lett., **39** (8), 2395 (2014). DOI: 10.1364/OL.39.002395
[25] А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. *Интегралы и ряды* (ФИЗМАТЛИТ, М., 2003), т. 2; A.P. Prudnikov, Y.A. Brychkov, O.I. Marichev. *Integrals and Series: Special Functions* (Gordon & Breach, N.Y., 1986).
[26] А.Б. Плаченов, Г.Н. Дьякова. В сб.: *Сборник трудов XI Международной конференции „Фундаментальные проблемы оптики — 2019*“, под ред. С.А. Козлова (Университет ИТМО, СПб, 2019), с. 9.

[27] G.N. Watson. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* (The University press, Cambridge, 1922); Г.Н. Ватсон. *Теория бесселевых функций* (Издательство иностранной литературы, М., 1949), ч. 1.
[28] A.B. Plachenov, G.N. Dyakova. J. Phys.: Conf. Ser., **1399**, 022041 (2019). DOI: 10.1088/1742-6596/1399/2/022041
[29] A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar, A.A. Porfirev. Phys. Rev. A, **91** (5), 053840 (2015). DOI: 10.1103/PhysRevA.91.053840
[30] J.A. Arnaud, H. Kogelnik. Appl. Opt., **8** (8), 1687 (1969). DOI: 10.1364/AO.8.001687
[31] E. Razueva, E. Abramochkin. JOSA A, **36** (6), 1089 (2019). DOI: 10.1364/JOSAA.36.001089