11.1

Аналитическое решение задачи синтеза трехзвенного ступенчатого чебышевского СВЧ-фильтра

© *А.С. Арефьев*

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, Россия
E-mail: arefyev.as@inbox.ru

Поступило в Редакцию 7 декабря 2021 г.
В окончательной редакции 14 декабря 2021 г.
Принято к публикации 16 декабря 2021 г.

Задача синтеза трехзвенного ступенчатого чебышевского СВЧ-фильтра сведена к двум независимым уравнениям четвертой степени относительно волнового сопротивления одного из звеньев. К этим уравнениям применено решение Декарта–Эйлера. Доказано, что в предположении равенства волновых сопротивлений крайних звеньев задача синтеза фильтра имеет два решения. Этим решениям соответствуют одинаковые фазочастотные характеристики. Получены аналитические выражения для волновых сопротивлений звеньев фильтра.

Ключевые слова: СВЧ-фильтр, ступенчатый СВЧ-фильтр, чебышевский СВЧ-фильтр, синтез СВЧ-фильтра.

DOI: 10.21883/PJTF.2022.05.52158.19101

Ступенчатый СВЧ-фильтр представляет собой каскадное соединение регулярных отрезков линии передачи (звеньев) с различными волновыми сопротивлениями [1–4]. Существует численный метод, позволяющий получить точное решение задачи синтеза такого устройства с произвольным количеством звеньев, имеющих одинаковую электрическую длину [5]. Волновые сопротивления звеньев фильтра можно также выразить через параметры прототипного ступенчатого волноводного перехода. В [1] приведено уравнение четвертой степени, к которому сводится синтез трехзвенного перехода с чебышевской частотной характеристикой. Аналитическое решение задачи синтеза, описанное в настоящей работе, позволяет на примере простейшей трехзвенной структуры провести строгое обоснование ряда свойств ступенчатых чебышевских СВЧ-фильтров.

На рисунке изображена схема трехзвенного ступенчатого СВЧ-фильтра. Предполагается, что волновые сопротивления звеньев ρ_1, ρ_2, ρ_3 и волновое сопротивление ρ_0 линии передачи, в которую включен фильтр, не зависят от частоты, а также что электрические длины звеньев θ имеют одинаковые значения. Элемент T_{11} волновой матрицы передачи (коэффициент передачи) фильтра выражается следующим образом [1]:

$$T_{11} = (1/2)[A_{11} + (1/\rho_0)A_{12} + \rho_0 A_{21} + A_{22}]. \quad (1)$$

Здесь A_{ij} — элементы матрицы передачи фильтра, определяемые соотношениями

$$A_{11} = \cos(\theta)\left[\cos^2(\theta) - \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_1}{\rho_3} + \frac{\rho_2}{\rho_3}\right)\sin^2(\theta)\right],$$

$$A_{12} = i\sin(\theta)\left[(\rho_1+\rho_2+\rho_3)\cos^2(\theta) - \frac{\rho_1\rho_3}{\rho_2}\sin^2(\theta)\right],$$

$$A_{21} = i\sin(\theta)\left[\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3}\right)\cos^2(\theta) - \frac{\rho_2}{\rho_1\rho_3}\sin^2(\theta)\right],$$

$$A_{22} = \cos(\theta)\left[\cos^2(\theta) - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\rho_3}{\rho_1} + \frac{\rho_3}{\rho_2}\right)\sin^2(\theta)\right], \quad (2)$$

где i — мнимая единица. Функция рабочего затухания фильтра $L = |T_{11}|^2$. Параметр L может быть представлен в виде многочлена третьего порядка по степеням $\sin^2(\theta)$

$$L = 1 + \sum_{j=1}^{3} C_j \sin^{2j}(\theta) \quad (3)$$

с коэффициентами

$$C_1 = \frac{1}{4}\left[-6 - 2\Omega^{[3]}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}, \frac{\rho_1}{\rho_3}, \frac{\rho_2}{\rho_3}\right) + \Omega^{[3]}\left(\frac{\rho_0^2}{\rho_1^2}, \frac{\rho_0^2}{\rho_2^2}, \frac{\rho_0^2}{\rho_3^2}\right) + 2\Omega^{[3]}\left(\frac{\rho_0^2}{\rho_1\rho_2}, \frac{\rho_0^2}{\rho_1\rho_3}, \frac{\rho_0^2}{\rho_2\rho_3}\right)\right], \quad (4)$$

$$C_2 = \frac{1}{4}\left[6 + 4\Omega^{[2]}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}, \frac{\rho_2}{\rho_3}\right) + 6\Omega^{[1]}\left(\frac{\rho_1}{\rho_3}\right) - 2\Omega^{[3]}\left(\frac{\rho_0^2}{\rho_1^2}, \frac{\rho_0^2}{\rho_2^2}, \frac{\rho_0^2}{\rho_3^2}\right) + \Omega^{[3]}\left(\frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}, \frac{\rho_1^2}{\rho_3^2}, \frac{\rho_2^2}{\rho_3^2}\right) - 6\Omega^{[1]}\left(\frac{\rho_0^2}{\rho_1\rho_3}\right) - 4\Omega^{[2]}\left(\frac{\rho_0^2}{\rho_1\rho_2}, \frac{\rho_0^2}{\rho_2\rho_3}\right) + 2\Omega^{[2]}\left(\frac{\rho_1^2}{\rho_2\rho_3}, \frac{\rho_3^2}{\rho_1\rho_2}\right) - 2\Omega^{[2]}\left(\frac{\rho_0^2\rho_2}{\rho_1^2\rho_3}, \frac{\rho_0^2\rho_2}{\rho_1\rho_3^2}\right)\right], \quad (5)$$

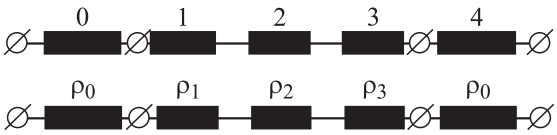
$$C_3 = \frac{1}{4}\left[\Omega^{[1]}\left(\frac{\rho_1^2\rho_3^2}{\rho_0^2\rho_2^2}\right) - 2\right] - C_1 - C_2. \quad (6)$$

Здесь $\Omega^{[m]}(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{k=1}^{m}(x_k + 1/x_k) \quad (m = \overline{1,3})$.

Функция рабочего затухания трехзвенного чебышевского фильтра [1]:

$$L = 1 + h^2 T_3^2[\sin(\theta)/S], \quad (7)$$

где h и S — амплитудный и масштабный множители ($h > 0$, $0 < S < 1$), $T_3(x)$ — многочлен Чебышева первого рода третьего порядка. Из (7) следует, что среднее



Эквивалентная схема фильтра.

значение электрической длины звена в первой полосе заграждения $\theta_0 = \pi/2$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\sin^2(\theta)$ в выражениях (3) и (7), получаем систему нелинейных уравнений относительно волновых сопротивлений звеньев

$$C_1 = 9h^2/S^2, \quad C_2 = -24h^2/S^4, \quad C_3 = 16h^2/S^6. \quad (8)$$

В соответствии с (3), (7)

$$L(\theta = \pi/2) = 1 + \sum_{j=1}^{3} C_j = 1 + h^2 T_3^2(1/S).$$

Принимая во внимание соотношение (6), имеем

$$(\psi^2 - 2 + 1/\psi^2)/4 = h^2 T_3^2(1/S), \quad (9)$$

где $\psi = \rho_1\rho_3/(\rho_0\rho_2)$. Решения уравнения (9) выражаются следующим образом:

$$\psi^{(k)} = \sqrt{1 + h^2 T_3^2(1/S)} + (-1)^k h T_3(1/S) \ (k = 1, 2). \quad (10)$$

Количество неизвестных в уравнениях (8) можно сократить до двух, полагая

$$\rho_2^{(k)} = \rho_1^{(k)}\rho_3^{(k)}/(\psi^{(k)}\rho_0) \ (k = 1, 2). \quad (11)$$

Выражения (4)–(6), (11) инвариантны относительно взаимной замены $\rho_1^{(k)} \leftrightarrow \rho_3^{(k)}$. Тем самым любое из уравнений (8) можно записать двумя способами. Например,

$$C_1^{(k)}\left(\rho_1^{(k)}, \rho_3^{(k)}\right) = 9h^2/S^2,$$

$$C_1^{(k)}\left(\rho_3^{(k)}, \rho_1^{(k)}\right) = 9h^2/S^2 \ (k = 1, 2).$$

Каждое из этих равенств задает первый аргумент $C_1^{(k)}$ как неявную функцию второго аргумента. Таким образом, получаем две одинаковые функции $\rho_1^{(k)} = r^{(k)}\left(\rho_3^{(k)}\right)$ и $\rho_3^{(k)} = r^{(k)}\left(\rho_1^{(k)}\right)$, графики которых зеркально-симметричны относительно линии $\rho_1^{(k)} = \rho_3^{(k)}$. Решениям задачи синтеза фильтра соответствуют точки пересечения данных кривых. Если таковые существуют, то абсцисса и ордината одной из них удовлетворяют условию

$$\rho_1^{(k)} = \rho_3^{(k)} \ (k = 1, 2). \quad (12)$$

С учетом (12) соотношение

$$2C_1^{(k)} + C_2^{(k)} = -6(h^2/S)T_3(1/S) \ (k = 1, 2),$$

следующее из (8), можно привести к виду

$$\sum_{j=0}^{3} \alpha_j^{(k)}\left(\rho_1^{(k)}\right)^j + \left(\rho_1^{(k)}\right)^4 = 0 \quad (k = 1, 2), \quad (13)$$

где

$$\alpha_0^{(k)} = -(\psi^{(k)})^2\rho_0^4, \quad \alpha_1^{(k)} = -2\psi^{(k)}\rho_0^3,$$

$$\alpha_2^{(k)} = -(-1)^k 6\psi^{(k)}\frac{h}{S}\rho_0^2, \quad \alpha_3^{(k)} = 2\psi^{(k)}\rho_0 \ (k = 1, 2). \quad (14)$$

Применяя к первому уравнению четвертой степени (13) решение Декарта–Эйлера [6], имеем

$$\rho_{1,m}^{(1)} = \sqrt{y_1} - (-1)^m\sqrt{y_2} + (-1)^m \operatorname{sign}(\beta_1)\sqrt{y_3} - \frac{1}{4}\alpha_3^{(1)}$$
$$(m = 1, 2),$$
$$\rho_{1,n}^{(1)} = -\sqrt{y_1} - (-1)^n\sqrt{y_2} - (-1)^n \operatorname{sign}(\beta_1)\sqrt{y_3} - \frac{1}{4}\alpha_3^{(1)}$$
$$(n = 3, 4). \quad (15)$$

Здесь

$$\beta_0 = \alpha_0^{(1)} - (1/4)\alpha_1^{(1)}\alpha_3^{(1)} + (1/16)\alpha_2^{(1)}\left(\alpha_3^{(1)}\right)^2 - (3/256)\left(\alpha_3^{(1)}\right)^4,$$

$$\beta_1 = \alpha_1^{(1)} - (1/2)\alpha_2^{(1)}\alpha_3^{(1)} + (1/8)\left(\alpha_3^{(1)}\right)^3,$$

$$\beta_2 = \alpha_2^{(1)} - (3/8)\left(\alpha_3^{(1)}\right)^2,$$

y_m $(m = \overline{1, 3})$ — решения уравнения

$$\sum_{j=0}^{2} \delta_j y^j + y^3 = 0 \quad (16)$$

с коэффициентами $\delta_0 = -(1/64)\beta_1^2$, $\delta_1 = -(1/4)\beta_0 + (1/16)\beta_2^2$, $\delta_2 = (1/2)\beta_2$. Для определения y_m воспользуемся решением Кардано кубического уравнения [6]:

$$y_1 = \nu_1 + \nu_2 - \frac{\delta_2}{3},$$

$$y_m = -\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} + (-1)^m i\sqrt{3}\frac{\nu_1 - \nu_2}{2} - \frac{\delta_2}{3} \ (m = 2, 3),$$

$$\nu_n = \sqrt[3]{-(1/2)\xi_0 - (-1)^n\sqrt{\eta}} \quad (n = 1, 2),$$

$$\eta = (1/4)\xi_0^2 + (1/27)\xi_1^3,$$

$$\xi_0 = \delta_0 - (1/3)\delta_1\delta_2 + (2/27)\delta_2^3, \quad \xi_1 = \delta_1 - (1/3)\delta_2^2.$$

Легко убедиться в том, что величины y_m связаны соотношением

$$\prod_{m=1}^{3} y_m = (1/64)\beta_1^2. \quad (17)$$

Исходя из (14) находим

$$\beta_0 = \frac{3}{2}(\psi^{(1)})^3\left(\frac{h}{S} - \frac{1}{8}\psi^{(1)}\right)\rho_0^4,$$

$$\beta_1 = -\psi^{(1)}\left(8\frac{h}{S^3}\psi^{(1)} + 1\right)\rho_0^3,$$

$$\beta_2 = 3\psi^{(1)}\left(2\frac{h}{S} - \frac{1}{2}\psi^{(1)}\right)\rho_0^2,$$

$$\xi_0 = -\frac{1}{4}\left(\psi^{(1)}\right)^3\frac{h}{S^3}(2+h^2)\rho_0^6,$$

$$\xi_1 = -\frac{3}{4}\left(\psi^{(1)}\right)^2\frac{h^2}{S^2}\rho_0^4,$$

$$\eta = \frac{1}{16}\left(\psi^{(1)}\right)^6\frac{h^2}{S^6}(1+h^2)\rho_0^{12},$$

$$\nu_{1,2} = \frac{1}{2}\psi^{(1)}\frac{\sqrt[3]{h}}{S}\left(\sqrt{1+h^2} \pm 1\right)^{2/3}\rho_0^2.$$

Таким образом, решения уравнения (16) имеют вид

$$y_1 = \rho_0^2\psi^{(1)}\left(\frac{1}{4}\psi^{(1)} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt[3]{h}}{S}\xi\right),$$

$$y_m = \rho_0^2\psi^{(1)}\left[\frac{1}{4}\psi^{(1)} - \left(\frac{3}{2}\frac{h}{S} + \frac{1}{4}\frac{\sqrt[3]{h}}{S}\xi\right)\right.$$
$$\left. +(-1)^m i\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\sqrt[3]{h}}{S}(\sigma_2 - \sigma_1)\right] \quad (m = 2, 3), \qquad (18)$$

где

$$\xi = \left(\sqrt[3]{\sqrt{1+h^2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{1+h^2}-1}\right)^2,$$

$$\sigma_{1,2} = \left(\sqrt{1+h^2} \mp 1\right)^{2/3}.$$

Величины y_2 и y_3 являются комплексно-сопряженными:

$$y_2 = y_3^*, \quad y_2 y_3 = |y_2|^2 > 0. \qquad (19)$$

Абсолютное значение y_2 не обращается в нуль, поскольку $\mathrm{Im}(y_2) > 0$. Тем самым с учетом (17) имеем $y_1 > 0$. Из (19) также следует, что $\sqrt{y_2} = (\sqrt{y_3})^*$. Поэтому среди выражений (15) действительными являются

$$\rho_{1,m}^{(1)} = \sqrt{y_1} - (-1)^m 2\mathrm{Re}\left(\sqrt{y_2}\right) - \frac{1}{2}\psi^{(1)}\rho_0 \quad (m = 1, 2). \qquad (20)$$

Воспользовавшись соотношением

$$\mathrm{Re}\left(\sqrt{y_2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\mathrm{Re}(y_2) + |y_2|},$$

находим

$$\mathrm{Re}\left(\sqrt{y_2}\right) = \rho_0\frac{1}{2}\sqrt{\psi^{(1)}}\left[\frac{\psi^{(1)}}{2} - \left(3\frac{h}{S} + \frac{\sqrt[3]{h}}{S}\frac{\xi}{2}\right)\right.$$
$$\left. + \sqrt{\left(3\frac{h}{S} - \frac{\psi^{(1)}}{2}\right)^2 + \left(6\frac{h}{S} - \frac{\psi^{(1)}}{2}\right)\frac{\sqrt[3]{h}}{S}\xi + \frac{h^{2/3}}{S^2}\xi^2}\right]^{1/2}. \qquad (21)$$

Из (18), (20), (21) следует неравенство $\rho_{1,1}^{(1)} > 0$. Принимая во внимание соотношение

$$\rho_{1,1}^{(1)}\rho_{1,2}^{(1)} = \left(\sqrt{y_1} - \frac{\psi^{(1)}}{2}\rho_0\right)^2 - 4\left[\mathrm{Re}\left(\sqrt{y_2}\right)\right]^2 = \rho_0^2\psi^{(1)}$$
$$\times\left[3\frac{h}{S} + \frac{\sqrt[3]{h}}{S}\xi + \sqrt{\psi^{(1)}\left(\frac{\psi^{(1)}}{4} + \frac{\sqrt[3]{h}}{S}\frac{\xi}{2}\right)}\right.$$
$$\left. + \sqrt{\left(3\frac{h}{S} - \frac{\psi^{(1)}}{2}\right)^2 + \left(6\frac{h}{S} - \frac{\psi^{(1)}}{2}\right)\frac{\sqrt[3]{h}}{S}\xi + \frac{h^{2/3}}{S^2}\xi^2}\right]^{-1}$$
$$\times\left[\psi^{(1)}\left(3\frac{h}{S} - \frac{\psi^{(1)}}{2}\right)\right.$$
$$\left. - \sqrt{(\psi^{(1)})^2\left(3\frac{h}{S} - \frac{\psi^{(1)}}{2}\right)^2 + 2\psi^{(1)}\frac{h}{S^3}\xi(3h^{2/3} + \xi)^2}\right] < 0,$$

имеем $\rho_{1,2}^{(1)} < 0$. Тем самым первое уравнение (13) имеет единственное действительное положительное решение

$$\rho_1^{(1)} = \rho_0\sqrt{\psi^{(1)}}\left\{\sqrt{\frac{\psi^{(1)}}{4} + \frac{\sqrt[3]{h}}{S}\frac{\xi}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\psi^{(1)}}\right.$$
$$+\left[\sqrt{\left(3\frac{h}{S} - \frac{\psi^{(1)}}{2}\right)^2 + \left(6\frac{h}{S} - \frac{\psi^{(1)}}{2}\right)\frac{\sqrt[3]{h}}{S}\xi + \frac{h^{2/3}}{S^2}\xi^2}\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\psi^{(1)}}{2} - 3\frac{h}{S} - \frac{\sqrt[3]{h}}{S}\frac{\xi}{2}\right]^{1/2}\right\}. \qquad (22)$$

Согласно (10), $\psi^{(1)}\psi^{(2)} = 1$, причем $\psi^{(1)} < 1$, $\psi^{(2)} > 1$. Замена $\psi^{(2)} = 1/\psi^{(1)}$, $\rho_1^{(2)} = \rho_0^2/\rho_1^{(1)}$ преобразует второе уравнение (13) в первое уравнение. Таким образом, решения задачи синтеза фильтра связаны условием $\rho_1^{(1)}\rho_1^{(2)} = \rho_0^2$. Равенства (11), (12) позволяют распространить его на волновые сопротивления всех звеньев фильтра, записав

$$\rho_j^{(2)} = \rho_0^2/\rho_j^{(1)} \quad (j = \overline{1, 3}). \qquad (23)$$

Сдвиг фаз между прямыми волнами напряжения на входе и выходе фильтра $\varphi = \arg(T_{11})$. Как следует из (1), (2), коэффициент передачи T_{11} инвариантен относительно замены $\rho_j^{(1)} = \rho_0^2/\rho_j^{(2)}$ или $\rho_j^{(2)} = \rho_0^2/\rho_j^{(1)}$ $(j = \overline{1, 3})$. Таким образом, решениям (11), (12), (22), (23) задачи синтеза фильтра соответствуют одинаковые фазочастотные характеристики.

Проведенный анализ показывает, что в предположении равенства волновых сопротивлений крайних звеньев задача синтеза трехзвенного ступенчатого чебышевского СВЧ-фильтра имеет два решения. Соответствующие этим решениям фильтры имеют идентичные фазочастотные характеристики. Для каждого из звеньев произведение волновых сопротивлений, относящихся к данным решениям, равно квадрату волнового сопротивления линии передачи, в которую включен фильтр.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] А.Л. Фельдштейн, Л.Р. Явич, *Синтез четырехполюсников и восьмиполюсников на СВЧ* (Связь, М., 1971).
[2] *Справочник по элементам полосковой техники*, под ред. А.Л. Фельдштейна (Связь, М., 1979).
[3] A. Das, A. Roy, K. Roy, A. Bhattacharyya, D. Chowdhury, S. Paul, in *2015 IEEE Int. Conf. on electrical, computer and communication technologies* (ICECCT) (IEEE, 2015), p. 1–3. DOI: 10.1109/ICECCT.2015.7226196
[4] W. Zhou, W. Xia, J. Zhang, D. He, C. Liu, Z. Wu, in *2018 IEEE Int. Conf. on computational electromagnetics (ICCEM)* (IEEE, 2018), p. 1–3. DOI: 10.1109/COMPEM.2018.8496690
[5] А.Л. Фельдштейн, Л.Р. Явич, В.П. Смирнов, *Справочник по элементам волноводной техники*, 1-е изд. (Госэнергоиздат, М., 1963).
[6] Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике для научных работников и инженеров* (Наука, М., 1984).