

06

К теории ВРМБ в поле двумерно локализованной и неоднородной волны накачки при произвольном значении угла рассеяния

© Д.К. Солихов¹, Д.У. Хобилов¹, С.А. Двинин²

¹Таджикский национальный университет, физический факультет, 734025 Душанбе, Таджикистан

²Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, 119991 Москва, Россия

e-mail: davlat56@mail.ru

Поступила в редакцию 10.08.2021 г.

В окончательной редакции 12.12.2021 г.

Принята к публикации 25.12.2021 г.

Рассмотрена задача о вынужденном рассеянии Манделъштама–Бриллюэна (ВРМБ) в плазме в поле двумерно локализованной и неоднородной волны накачки при произвольных значениях угла рассеяния. Получены точные решения системы укороченных уравнений для амплитуды электромагнитной рассеянной волны и амплитуды звуковой волны в приближении сильной диссипации звуковых волн при произвольном направлении распространения рассеянной волны. Исследована угловая зависимость интенсивности рассеянного излучения и ее зависимость от параметра неоднородности волны накачки.

Ключевые слова: вынужденное комбинационное рассеяние: ВКР, ВРМБ, SBS, SRS, ионный звук, приближении сильной диссипации.

DOI: 10.21883/OS.2022.04.52281.2631-21

Введение

Вынужденное комбинационное рассеяние (ВКР) света в поле волны накачки, локализованной в пространстве вдоль одного направления (плоский слой), обсуждалось во многих работах [1–3]. Было получено, что для размеров области локализации, превышающих определенную величину, зависящую от амплитуды волны накачки, имеет место абсолютная неустойчивость. Такая неустойчивость возникает только тогда, когда проекции групповых скоростей взаимодействующих волн на направление распространения волны накачки имеют противоположные знаки. Возбуждаются несколько мод, отличающихся координатными зависимостями огибающих амплитуд и имеющих разные пороги и инкременты. Была исследована зависимость амплитуд неустойчивых волн от координаты [1], и показано, что для первой моды, имеющей наиболее низкий порог, внутри области взаимодействия существует единственный максимум амплитуды. Позднее аналогичные вопросы обсуждались применительно к неоднородной плазме [4]. Обычно под неоднородной плазмой подразумеваются неоднородности волны накачки.

Дальнейшее развитие привело к изучению параметрических неустойчивостей в двумерной геометрии. Двумерность возникает как вследствие неоднородности (ограниченности) плазмы, так и вследствие неоднородности поля волны накачки. Вынужденное рассеяние в поле двумерно локализованной волны накачки в однородной плазме обсуждалось во многих работах [5–8]. Было показано, что выход одной из волн через границу обла-

сти взаимодействия стабилизирует абсолютную неустойчивость, и при выполнении определенного порогового условия имеет место конвективное усиление волн. Эти результаты практически применяются для диагностики плазмы, ускорения частиц и интерпретации других нелинейных процессов. В реальных экспериментах среда не всегда однородна и возникает также вопрос о ее влиянии на характеристики рассеянного излучения. Такие задачи исследовались в некоторых давних работах [9–13], но и сегодня вновь становятся актуальными в связи с новыми экспериментальными результатами [14].

В настоящей работе процесс рассеяния исследуется с помощью системы укороченных уравнений для амплитуд взаимодействующих волн, учитывающих неоднородность среды [15]. Получено точное решение для интенсивности рассеянного излучения и исследована ее зависимость от угла рассеяния и характерного размера неоднородности волны накачки при произвольных значениях угла рассеяния в приближении сильной диссипации звуковых волн (длина свободного пробега намного меньше размера неоднородности).

Основные уравнения

Рассмотрим волну накачки с частотой ω_0 и волновым вектором \mathbf{k}_0 , локализованную в прямоугольной области пространства (рис. 1) и распространяющуюся в направлении, противоположном оси Ox . Область взаимодействия волны накачки и рассеянных волн сосредоточена в прямоугольнике $0 < y < L_2$, $-L_{1A} < x < L_{1B}$. Проекция волновых векторов рассеянных волн (звуковой и

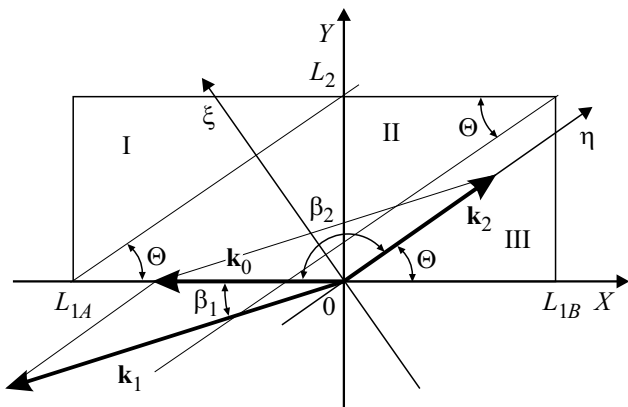


Рис. 1. Область взаимодействия и ориентация волновых векторов ($\mathbf{k}_{0,1,2}$ — соответственно волновые векторы волны накачки, рассеянных звуковой и электромагнитной волн).

электромагнитной с частотами ω_1, ω_2 и волновыми векторами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 на ось OX имеют разные знаки. Для рассматриваемых волн выполнены условия синхронизма $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$. Будем также считать, что неоднородность плазмы либо пространственная конфигурация волны накачки приводят к зависимости волновых векторов волны накачки \mathbf{k}_0 , рассеянной звуковой волны \mathbf{k} и рассеянной электромагнитной волны \mathbf{k}_2 от координаты x . В силу указанной неоднородности условия синхронизма волновых векторов $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ выполняются только при определенном значении координаты $x = x_0$. Без ограничения общности будем считать $x_0 = 0$.

Для расчета развития неустойчивости необходимо задать начальную флуктуацию, эволюция которой в дальнейшем даст жизнь неустойчивой моде. В пространственно ограниченной области существуют несколько способов ее задания. В абсолютно неустойчивой системе такой флуктуацией может быть локальное возмущение в виде δ -функции. При этом на ширине этой δ -функции укладывается много длин волн, и существует это возмущение по времени дольше, чем наименьшая из частот волн, чтобы были выполнены условия синхронизма. Такой подход продемонстрирован в работе [16]. В системе абсолютно устойчивой, даже если она конвективно неустойчива, ограниченное в пространстве и времени начальное возмущение даст ограниченный во времени отклик. Поэтому обычно рассматриваются два подхода — реакция на постоянно существующее возмущение (пробная волна), либо отклик на постоянно возникающие и исчезающие флуктуации. В последнем случае система будет генерировать шумовой спектр. На начальной (линейной) стадии развития неустойчивости (расчет порогов и инкрементов) все подходы приводят к однотипным уравнениям.

В настоящей работе будем считать, что первоначальное возмущение создается пробной электромагнитной волной, распространяющейся под углом β_2 к оси OX . Звуковая волна распространяется под углом β_1 к оси OX .

Уравнения для амплитуд взаимодействующих волн a_1 и a_2 имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1}{\partial t} - V_s \cos \beta_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} + V_s \sin \beta_1 \frac{\partial a_1}{\partial y} + \gamma_s a_1 &= v_1 a_2 e^{-i\varphi(x)}, \\ \frac{\partial a_2}{\partial t} + c \cos \beta_2 \frac{\partial a_2}{\partial x} - c \sin \beta_2 \frac{\partial a_2}{\partial y} + \gamma_t a_2 &= v_2 a_1 e^{i\varphi(x)}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $a_1 = i\delta N/N_0$, δN — возмущение концентрации электронов, $a_2 = \delta E^*$ — амплитуда рассеянной волны, V_s — скорость ионно-звуковой волны, c — скорость света, $\gamma_{s,t}$ — декременты затухания звуковой и рассеянной волн, $v_{1,2}$ — коэффициенты нелинейной связи волн, пропорциональные амплитуде волны накачки. Для процессов вынужденного рассеяния Мандельштама–Бриллюэна (ВРМБ) величины $\gamma_{s,t}$ и $v_{1,2}$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \gamma_s &= \frac{V_s^2}{2\omega_1} \frac{dk_{1x}(x)}{dx} + \frac{v_i}{2}, & \gamma_t &= -\frac{1}{2} \frac{c^2}{\omega_2} \frac{dk_{2x}(x)}{dx} + \frac{v_e \omega_{Le}^2}{2\omega_2^2}, \\ v_1 &= \frac{Ze^2 \epsilon_0}{4\pi m_i} \frac{k_1}{\omega_0 \omega_2 V_s}, & v_2 &= \epsilon_0^* \omega_{Le}^2 / (4\omega_0), \end{aligned}$$

где v_i — частота столкновений ионов с нейтральными частицами или ионами другого сорта, v_2 — частота столкновений электронов с ионами, e, m, N_0 — заряд, масса и концентрация электронов, Z, m_i — зарядовое число и масса ионов, ω_{Le} — ленгмюровская частота электронов, ϵ_0 — амплитуда волны накачки, которая считается заданной, $\varphi(x) = \int_0^x \chi(x') dx'$ — разность фаз взаимодействующих с волной накачки рассеянных и звуковых волн, возникающая из-за неоднородности плазмы и поля волны накачки, $\chi(x) = k_{0x}(x) - k_{2x}(x) - k_{1x}(x)$.

Систему уравнений (1) применительно к ВРМБ можно получить из уравнений гидродинамики плазмы в СВЧ поле и уравнений поля [15,17]. Для описания процесса рассеяния наряду с углами β_1 и β_2 удобно ввести также угол $\theta = \pi - \beta_2$ (рис. 1), который мы будем называть углом рассеяния. Для процессов вынужденного рассеяния углы β_1, β_2 и θ не являются независимыми. Для рассеяния с малыми изменениями частоты ($\omega_1 \ll \omega_0, \omega_2 \cong \omega_0$) волновые векторы \mathbf{k}_0 и \mathbf{k}_2 имеют одинаковые абсолютные значения $k_2 \cong k_0$. Это приближение применимо при выполнении условия $\beta_2 \gg V_s/c$. Поскольку $k_2 \cong k_0$, то $\beta_1 = (\pi - \beta_2)/2 = \theta/2$. Из условия резонансного взаимодействия волн $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ следует, что $k_1 \approx 2k_0 \sin(\theta/2) \approx 2k_0 \cos(\beta_2/2)$.

Для волн, имеющих противоположные знаки проекции групповых скоростей на направления осей OX и OY , эти углы изменяются в пределах $\pi/2 \leq \beta_2 \leq \pi, 0 \leq \beta_1 \leq \pi/4, 0 \leq \theta \leq \pi$. Учтя эти обстоятельства, получим из (1)

$$\begin{aligned} -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{\partial a_1}{\partial x} - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{\partial a_1}{\partial y} + \gamma_1 a_1 \\ = \mu_1 a_2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\varphi(x)}, \end{aligned}$$

$$\cos \theta \frac{\partial a_2}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial a_2}{\partial y} + \gamma_2 a_2 = e^{-i\varphi(x)}, \quad (2)$$

где введены обозначения

$$\mu_1 = \frac{Ze^2 \epsilon_0}{2mm_i} \frac{k_0}{\omega_0^2 V_s^2}, \quad \mu_2 = \epsilon_0^* \frac{\omega_{Le}^2}{4\omega_0 c},$$

$$\gamma_1 = \bar{\gamma}_s / V_s, \quad \gamma_2 = \bar{\gamma}_t / c.$$

Величина $1/\bar{\gamma}_1 = V_s/\gamma_s$ определяет длину свободного пробега ионно-звуковой волны, а $1/\bar{\gamma}_2 = c/\gamma_t$ — длину свободного пробега рассеянной волны. В силу того, что мы рассматриваем стационарный процесс (реакцию на постоянно действующее возмущение), в (2) опущены производные по времени.

Вынужденное рассеяние под углом $\theta = \pi/2$ (боковое рассеяние) и другой геометрии задачи в однородной плазме рассматривалось в работе [7]. Применительно к неоднородной плазме вопрос о боковом рассеянии в поле двумерно локализованной и неоднородной волны накачки рассматривался в недавней работе [18], логическим продолжением которой для произвольного угла рассеяния является настоящее исследование.

Для решения задачи зададим граничные условия. Предположим, что амплитуда высокочастотной волны a_2 в месте ее входа в область взаимодействия постоянна, а амплитуда низкочастотной волны a_1 на границе равна нулю:

$$a_1(x = L_{1B}, y) = a_1(x, y = L_2) = 0, \quad (3)$$

$$a_2(x, y = 0) = a_2(x = L_{1A}, y) = C. \quad (4)$$

Решение уравнений (2) для нулевых граничных условий позволяет выяснить вопрос о порогах конвективной неустойчивости и найти коэффициенты усиления. Для исследования пространственных характеристик амплитуд взаимодействующих волн и угловой зависимости интенсивности рассеянного излучения необходимо решать уравнения (2) с ненулевыми граничными условиями.

Пространственное распределение интенсивности рассеянного излучения при сильной диссипации звуковых волн

Рассмотрим решение системы уравнений (2). Чтобы избавиться от фазового множителя, введем новые функции $b_{1,2}(x, y)$ следующим образом:

$$b_1(x, y) = a_1(x, y) \exp(i\varphi(x)/2),$$

$$b_2(x, y) = a_2(x, y) \exp(-i\varphi(x)/2). \quad (5)$$

Используя (5), преобразуем (2) к виду

$$-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{\partial b_1}{\partial x} - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{\partial b_1}{\partial y} + \left(\gamma_1 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{i}{2} \chi(x)\right) b_1 = \mu_1 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) b_2,$$

$$\cos \theta \frac{\partial b_2}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial b_2}{\partial y} + \left(\gamma_2 + \cos \theta \frac{i}{2} \chi(x)\right) b_2 = \mu_2 b_1. \quad (6)$$

Теперь, согласно (3)–(5), граничные условия для функции $b_{1,2}(x, y)$ примут вид

$$b_1(x = L_{1B}, y) = b_1(x, y = L_2) = 0,$$

$$b_2(x = -L_{1A}, y) = C \exp(-i\varphi(-L_{1A})/2),$$

$$b_2(x, y = 0) = C \exp(-i\varphi(x)/2). \quad (7)$$

Переходу к боковому рассеянию соответствует угол рассеяния $\theta = \pi/2$.

Рассмотрим решение (6) в приближении достаточно сильного затухания звуковых волн, когда можно пренебречь производными $\partial b_1/\partial x(\partial y)$. Условием справедливости этого приближения является равенство $|\partial b_1/\partial x(\partial y)| \ll |\gamma_1, \chi| b_1$. Неоднородность поля волны накачки приводит к тому, что взаимодействие волн в плазме происходит вблизи резонансной точки, где выполнено условие по волновым векторам ($\chi = 0$). Выбрав эту точку за начало координат, можно в ее окрестности записать

$$\chi(x) = xk_0/L_0, \quad (8)$$

где L_0 — масштаб неоднородности плазмы или волны накачки. В приближении сильной диссипации звуковых волн уравнение (6) примет вид

$$b_1 = \frac{\mu_1 \cos(\theta/2) b_2}{(\gamma_1 + i\chi(x) \cos(\theta/2)/2)},$$

$$\cos \theta \frac{\partial b_2}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial b_2}{\partial y} + \left(\gamma_2 + \frac{i}{2} \cos \theta \chi(x) - \frac{\mu_2 \mu_1 \cos(\theta/2)}{(\gamma_1 + i\chi(x) \cos(\theta/2)/2)}\right) b_2 = 0. \quad (9)$$

Перейдем к новой системе координат, в которой

$$x = \eta \cos \theta + \xi \sin \theta, \quad y = \eta \sin \theta - \xi \cos \theta. \quad (10)$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\eta = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad \xi = x \sin \theta - y \cos \theta. \quad (11)$$

При этом уравнение (8) сводится к:

$$\frac{1}{b_2} \frac{\partial b_2}{\partial \eta} = - \left(\gamma_2 + \frac{i}{2} \cos \theta \chi(x(\xi, \eta)) - \frac{\mu_2 \mu_1 \cos(\theta/2)}{(\gamma_1 + i \cos(\theta/2) \chi(x(\xi, \eta))/2)}\right).$$

Таким образом, уравнение содержит производную только по одной координате (η), вторая (ξ) входит в уравнение только как параметр. Вдоль направления распространения волны выполняется соотношение $d\eta = dx/\cos \theta$. Для получения результата необходимо разделить область взаимодействия на

две части. При $-L_{1A} + y \operatorname{tg}(\theta) < x < L_{1B}$ (область I) излучение затравочной волны попадает в нее через границу $y = 0$, при выполнении обратного условия $-L_{1A} < x < -L_{1A} + y \operatorname{tg}(\theta)$ (область II) — через границу $x = L_{1B}$. Интегрирование уравнения с учетом граничных условий приводит к результату (здесь и ниже \tilde{x}, \tilde{y} — координаты точки наблюдения, $\xi_1 = (\tilde{x} \sin \theta - \tilde{y} \cos \theta)$)

$$b_2(\tilde{x}, \tilde{y}) = b_2(x_1(\xi(\tilde{x}, \tilde{y})), y_1(\xi(\tilde{x}, \tilde{y}))) \exp\left(\int_{x_1(\xi(\tilde{x}, \tilde{y}))}^{\tilde{x}} \frac{dx'}{\cos \theta}\right) \times \left(\frac{\mu_2 \mu_1 \cos(\theta/2)}{(\gamma_1 + i \cos(\theta/2) \chi(x'(\xi, \eta)))/2} - \gamma_2 - \frac{i}{2} \cos \theta \chi(x'(\xi, \eta))\right) \times \left(\frac{\mu_2 \mu_1 \cos(\theta/2)}{(\gamma_1 + i \cos(\theta/2) \chi(x'(\xi, \eta)))/2} - \gamma_2 - \frac{i}{2} \cos \theta \chi(x'(\xi, \eta))\right).$$

Координата ξ определяется по координатам \tilde{x}, \tilde{y} точки наблюдения (в которой рассчитывается поле). Нижний предел интегрирования x_1 — координата x точки, через которую в область рассеяния входит луч рассеянной волны, определяется следующими соотношениями (рис. 1): в области I

$$\tilde{y} > (L_{1A} + \tilde{x}) \operatorname{tg} \theta, \quad x_1 = -L_{1A}, \quad (12)$$

а в областях II и III

$$\begin{aligned} \tilde{y} < (L_{1A} + \tilde{x}) \operatorname{tg} \theta, \quad x_1 = \tilde{x} - \tilde{y} / \operatorname{tg} \theta, \\ \tilde{y} > (L_{1A} + \tilde{x}) \operatorname{tg} \theta, \quad x_1 = -L_{1A}. \end{aligned} \quad (13)$$

При $\theta \rightarrow \pi/2$ интеграл остается конечным, так как расстояние между точками интегрирования стремится к нулю. Амплитуда поля рассеянной волны $a_2(x, y)$ в начальной точке определяется с помощью соотношений (7), после чего получаем

$$b_2(\tilde{x}, \tilde{y}) = C \exp(-i\varphi(x_1(\tilde{x}, \tilde{y}))/2) \exp\left(\int_{x_1(\tilde{x}, \tilde{y})}^{\tilde{x}} \frac{dx'}{\cos \theta}\right) \times \left(\frac{\mu_2 \mu_1 \cos(\theta/2)}{(\gamma_1 + i \cos(\theta/2) \chi(x'(\xi, \eta)))/2} - \gamma_2 - \frac{i}{2} \cos \theta \chi(x'(\xi, \eta))\right) \times \left(\frac{\mu_2 \mu_1 \cos(\theta/2)}{(\gamma_1 + i \cos(\theta/2) \chi(x'(\xi, \eta)))/2} - \gamma_2 - \frac{i}{2} \cos \theta \chi(x'(\xi, \eta))\right).$$

Амплитуда звуковой волны может быть найдена как

$$b_1(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mu_1 \cos(\theta/2) b_2(\tilde{x}, \tilde{y}) / (\gamma_1 + i \chi(\tilde{x}) \cos(\theta/2)/2).$$

Наконец, формулы (5) позволяют получить окончательное выражение для амплитуд волн в области взаимодей-

ствия (включая границу):

$$\begin{aligned} a_2(\tilde{x}, \tilde{y}) &= C \exp\left(i(\varphi(\tilde{x}) - \varphi(x_1(\tilde{x}, \tilde{y}))) / 2\right) \\ &\times \exp\left(\int_{x_1(\tilde{x}, \tilde{y})}^{\tilde{x}} \frac{dx'}{\cos \theta} \times \left(\frac{\mu_2 \mu_1 \cos(\theta/2)}{(\gamma_1 + i \cos(\theta/2) \chi(x'(\xi, \eta)))/2} - \gamma_2 - \frac{i}{2} \cos \theta \chi(x'(\xi, \eta))\right)\right), \\ a_1(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \mu_1 a_2(\tilde{x}, \tilde{y}) / (\gamma_1 + i \chi(\tilde{x}) \cos(\theta/2)/2) \\ &\times \exp(-i\varphi(\tilde{x})). \end{aligned} \quad (14)$$

Дальнейшее упрощение заключается в предположении, что зависимость $\chi(\tilde{x})$ достаточно монотонна, поэтому можно использовать линейную аппроксимацию (8). Тогда

$$\begin{aligned} a_2(\tilde{x}, \tilde{y}) &= C \exp(Q(\tilde{x}, x_1) / \cos \theta) \\ &= C \exp\left((\Gamma(\tilde{x}) - \Gamma(x_1)) / \cos \theta\right), \\ a_1(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \mu_1 \cos(\theta/2) a_2(\tilde{x}, \tilde{y}) / (\gamma_1 \\ &+ ik_0 \cos(\theta/2) \tilde{x} / 2L_0) \exp(-i\varphi(\tilde{x})), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \left(-\gamma_2 L_2 \frac{x}{L_2} + \frac{2L_0 \mu_2 \mu_1}{k_0} \operatorname{arctg}\left(\frac{k_0 L_2}{2L_0 \gamma_1} \frac{x}{L_2} \cos(\theta/2)\right) \right. \\ &\left. - i \frac{L_0 \mu_2 \mu_1}{k_0} \ln\left(1 + \frac{k_0^2 L_2^2}{4\gamma_1^2 L_0^2} \frac{x^2}{L_2^2} \cos^2(\theta/2)\right)\right). \end{aligned}$$

Последнее выражение можно упростить, введя следующие безразмерные параметры: $A = 2L_0 \mu_1 / k_0 L_2$, который характеризует относительную роль неоднородности и затухания волны в плазме, $P = \mu_2 \mu_1 / \gamma_1 \gamma_2$, характеризующий превышение порога (при $P = 1$ интенсивность волны, распространяющейся вдоль оси OX в однородной среде, не меняется). Обозначив произведение коэффициента усиления волны при конвективной неустойчивости в однородной среде на поперечный размер L_2 при обратном рассеянии и слабом затухании электромагнитной волны $G = \mu_2 \mu_1 L_2 / \gamma_1$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(x)}{\cos \theta} &= \frac{G}{\cos \theta} \left(A \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{AL_2} \cos(\theta/2)\right) - P^{-1} \frac{x}{L_2} \right. \\ &\left. - i \frac{A}{2} \ln\left(1 + \frac{x^2}{A^2 L_2^2} \cos^2(\theta/2)\right)\right). \end{aligned}$$

В среде, близкой к однородной, $x \cos(\theta/2) / AL_2 \ll 1$, и последняя формула упрощается:

$$\frac{\Gamma(x)}{\cos \theta} = \frac{G}{\cos \theta} \left((\cos(\theta/2) - P^{-1}) \frac{x}{L_2} - i \frac{1}{2A} \frac{x^2}{L_2^2} \cos^2(\theta/2)\right). \quad (16)$$

В предельном случае сильной неоднородности, $|x| \cos^2(\theta/2)/AL_2 \gg 1$ имеем

$$\frac{\Gamma(x)}{\cos \theta} = \frac{G}{\cos \theta} \left(A \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(x) - P^{-1} \frac{x}{L_2} - i \frac{A}{2} \times \ln \left(1 + \frac{x^2}{A^2 L_2^2} \cos^2(\theta/2) \right) \right).$$

Получим теперь окончательные выражения для амплитуды волны.

На границе $y = L_2$ при $\tilde{x} < -L_{1A} + L_2 \operatorname{ctg} \theta$

$$\begin{aligned} \frac{Q(\tilde{x}, y = L_2)}{\cos \theta} &= \frac{G}{\cos \theta} \left(A \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{\tilde{x}}{AL_2} \cos(\theta/2) \right) \right. \right. \\ &+ \left. \left. \operatorname{arctg} \left(\frac{L_{1A}}{AL_2} \cos(\theta/2) \right) \right) \right) - P^{-1} \left(\frac{\tilde{x}}{L_2} + \frac{L_{1A}}{L_2} \right) - i \frac{A}{2} \\ &\times \ln \left(\left(1 + \frac{\tilde{x}^2}{A^2 L_2^2} \cos^2(\theta/2) \right) / \left(1 + \frac{L_{1A}^2}{A^2 L_2^2} \cos^2(\theta/2) \right) \right), \end{aligned} \tag{17}$$

при $\tilde{x} > -L_{1A} + L_2 \operatorname{ctg} \theta$

$$\begin{aligned} \frac{Q(\tilde{x}, y = L_2)}{\cos \theta} &= \frac{G}{\cos \theta} \left(A \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{\tilde{x}}{AL_2} \cos(\theta/2) \right) \right. \right. \\ &- \left. \left. \operatorname{arctg} \left(\frac{\tilde{x} - L_2 \operatorname{ctg} \theta}{AL_2} \cos(\theta/2) \right) \right) \right) - P^{-1} \operatorname{ctg} \theta - i \frac{A}{2} \\ &\times \ln \left(\left(1 + \frac{\tilde{x}^2}{A^2 L_2^2} \cos^2(\theta/2) \right) / \left(1 + \frac{(\tilde{x} - L_2 \operatorname{ctg} \theta)^2}{A^2 L_2^2} \right. \right. \\ &\left. \left. \times \cos^2(\theta/2) \right) \right), \end{aligned} \tag{18}$$

На границе $x = L_{1B}$ при $y < (L_{1A} + L_{1B}) \operatorname{tg} \theta$

$$\begin{aligned} \frac{Q(\tilde{x} = L_{1B}, y)}{\cos \theta} &= \frac{G}{\cos \theta} \left(A \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{L_{1B}}{AL_2} \cos(\theta/2) \right) \right. \right. \\ &- \left. \left. \operatorname{arctg} \left(\frac{L_{1B} - y \operatorname{ctg} \theta}{AL_2} \cos(\theta/2) \right) \right) \right) - P^{-1} \frac{y \operatorname{tg} \theta}{L_2} - i \frac{A}{2} \\ &\times \ln \left(\left(1 + \frac{L_{1B}^2}{A^2 L_2^2} \cos^2(\theta/2) \right) / \left(1 + \frac{(L_{1B} - y \operatorname{tg} \theta)^2}{A^2 L_2^2} \right. \right. \\ &\left. \left. \times \cos^2(\theta/2) \right) \right), \end{aligned} \tag{19}$$

при $y > (L_{1A} + L_{1B}) \operatorname{tg} \theta$

$$\begin{aligned} \frac{Q(\tilde{x} = L_{1B}, y)}{\cos \theta} &= \frac{G}{\cos \theta} \left(A \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{L_{1B}}{AL_2} \cos(\theta/2) \right) \right. \right. \\ &+ \left. \left. \operatorname{arctg} \left(\frac{L_{1A}}{AL_2} \cos(\theta/2) \right) \right) \right) - P^{-1} \frac{L_{1B} + L_{1A}}{L_2} - i \frac{A}{2} \\ &\times \ln \left(\left(1 + \frac{L_{1B}^2}{A^2 L_2^2} \cos^2(\theta/2) \right) / \left(1 + \frac{L_{1A}^2}{A^2 L_2^2} \right. \right. \\ &\left. \left. \times \cos^2(\theta/2) \right) \right). \end{aligned} \tag{20}$$

Приведем также предельные значения выражений (18) и (19) при $\theta \rightarrow \pi/2$, демонстрирующие отсутствие сингулярности:

$$\begin{aligned} \frac{Q(\tilde{x}, y = L_2)}{\cos \theta} &= G \left(\frac{\cos(\theta/2)}{\sin \theta} / \left(1 + \left(\frac{\tilde{x}}{AL_2} \cos(\theta/2) \right)^2 \right) \right) \\ &- \frac{\sin \theta}{P} - i \frac{A}{2} \frac{2\tilde{x}L_2 \sin \theta}{A^2 L_2^2} \cos^2(\theta/2) / \left(1 + \frac{\tilde{x}^2}{A^2 L_2^2} \right. \\ &\left. \times \cos^2(\theta/2) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{Q(\tilde{x} = L_{1B}, y)}{\cos \theta} &= G \left(\frac{y \cos(\theta/2)}{L_2 \sin \theta} / \left(1 + \left(\frac{L_{1B}}{AL_2} \cos(\theta/2) \right)^2 \right) \right) \\ &- \frac{y}{PL_2 \sin \theta} - i \frac{A}{2} \ln \left(\left(1 + \frac{L_{1B}^2}{A^2 L_2^2} \cos^2(\theta/2) \right) \right. \\ &\left. / \left(1 + \frac{(L_{1B} - y \operatorname{tg} \theta)^2}{A^2 L_2^2} \cos^2(\theta/2) \right) \right). \end{aligned}$$

Как следует из полученных формул, качественный вид получаемых зависимостей зависит от безразмерных параметров L_{1A}/L_2 , L_{1B}/L_2 — характеризующих геометрию системы, A — ее неоднородность, P — превышение порога в однородной бесконечной среде.

Параметр G , определяющий усиление сигнала, характеризует размах кривой, не влияя на ее качественное поведение. Результаты расчета безразмерного параметра $U(x, y) = Q(x, y = L_2)/G \cos \theta$ в зависимости от безразмерной координаты точки выхода излучения $X = x/L_2$ приведены на рис. 2. При малых характерных длинах неоднородности L_0 . ($A < 1$, рис. 2, *a*) максимально усиливаются рассеянные волны, проходящие через точку $x = 0$ на линии симметрии $y = L_2/2$. При угле θ , близком к $\pi/2$ (рассеяние вдоль оси OY), полуширина области координат, в которой происходит рассеяние, близка к L_0 . Уменьшение угла рассеяния приводит к тому, что область координат, в которой происходит усиление, увеличивается, однако усиление рассеянной волны падает. Увеличение характерной длины неоднородности (и коэффициента A (рис. 2, *b*, $A = 1$)) приводит к уширению области максимального усиления и

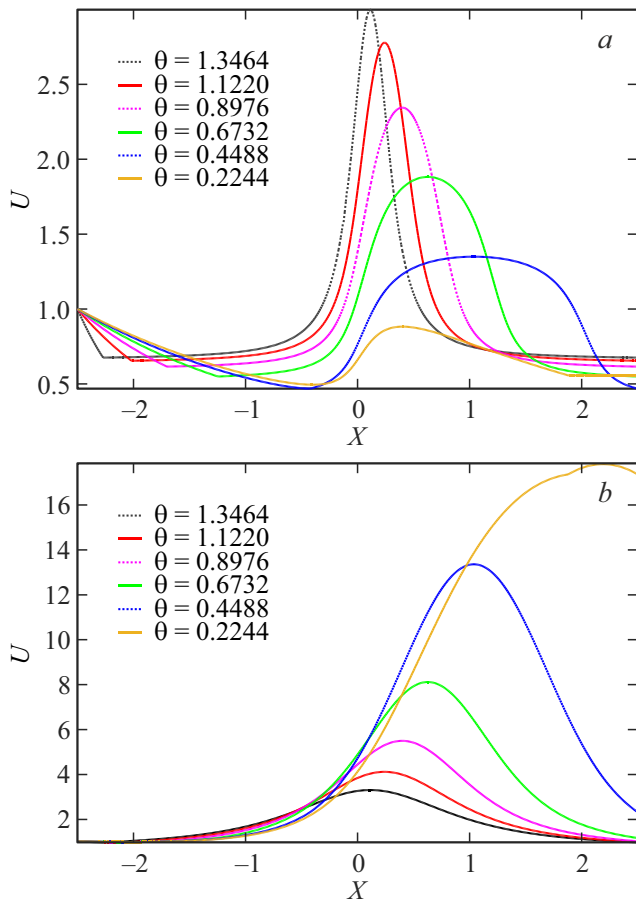


Рис. 2. Зависимость коэффициента усиления волны U в зависимости от точки выхода излучения, безразмерная длина неоднородности $A = 0.2$ (а), 1 (б); параметры области рассеяния и волны накачки $L_{1A}/L_2 = L_{1B}/L_2 = 2.5$, $X = x/L_2$, $P = 10$, $G = 1$.

перемещению его к правой границе области взаимодействия. Поскольку оптический путь, проходимый лучом по области усиления поля, растет с уменьшением угла θ , то усиление сигнала при этом тоже растет. При $A \gg 1$ при выполнении условия $L_2 < L_{1A} + L_{1B}$ справедлива упрощенная формула (16), а основная доля излучения выходит через границу $x = L_{1B}$.

Изломы на кривых рис. 2 связаны с входом пробной волны через границу $x = -L_{1A}$ либо через границу $y = 0$. Квадрат модуля амплитуды излучения выражается формулой

$$|a_2(\tilde{x}, \tilde{y})|^2 = C \exp(2\text{Re}Q(\tilde{x}, \tilde{y})/\cos\theta). \quad (21)$$

Отметим, что в неоднородной среде угловая зависимость интенсивности рассеянной волны очень сильно зависит от превышения порога усиления при данной амплитуде волны накачки. Связано это с тем, что волна, распространяющаяся под малыми углами рассеяния θ , проходит последовательно область усиления (вблизи начала координат) и область затухания (вблизи границ). Поэтому при малых превышениях порога интегральное

усиление может подавляться за счет поглощения в области, где взаимодействие отсутствует (рис. 2, а). При малых затуханиях и больших A рассеяние на малые углы имеет большую интенсивность (рис. 2, б).

Отметим, что поскольку рассеяние определяется несколькими параметрами с размерностью длины (L_0, L_{1A}, L_{1B}, L_2), выбор безразмерных параметров A, G, P для описания процесса неоднозначен. В определенных случаях более удобным может быть использование параметров $\tilde{A} = 2\gamma_1/k_0$, $\tilde{G} = \mu_2\mu_1 L_0/\gamma_1$. При этом выражение для $\Gamma(x)$ принимает вид

$$\Gamma(x) = \tilde{G} \left(\tilde{A} \arctg \left(\tilde{A}^{-1} \frac{x}{L_0} \cos(\theta/2) \right) - P^{-1} \frac{x}{L_0} - 2i\tilde{A} \ln \left(1 + \tilde{A}^{-2} \frac{x^2}{L_0^2} \cos^2(\theta/2) \right) \right).$$

Вычисление интенсивности рассеянного излучения

В экспериментах по изучению ВРМБ представляет интерес не амплитуда рассеянного поля, а его интенсивность на выходе из области взаимодействия волн [19–21]. В соответствии с результатами предыдущего раздела интенсивность рассеянной волны есть

$$I_S(\theta, L_0, L_{1A}, L_{1B}, L_2) = \left\{ \int_{-L_{1A}}^{+L_{1B}} |a_2(x, y = L_2)|^2 \sin\theta dx + \int_0^{L_2} |a_2(x = L_{1B}, y)|^2 \cos\theta dy \right\}. \quad (22)$$

Подставляя (21) в (22), после интегрирования получим явный вид отношения интенсивности рассеянного излучения к интенсивности пробной волны:

$$S(\theta, L_0, L_{1A}, L_{1B}, L_2) = I_S(\theta, L_0, L_{1A}, L_{1B}, L_2)/|C|^2.$$

При $L_2 < (L_{1B} + L_{1A}) \text{tg}\theta$

$$S(\theta, L_0, L_{1A}, L_{1B}, L_2) = \left\{ \int_{-L_{1A}}^{-L_{1A}+L_2 \text{ctg}\theta} \exp\left(2(G(x) - G(-L_{1A}))\right) \sin\theta dx + \int_{-L_{1A}+L_2 \text{ctg}\theta}^{-L_{1B}} \exp\left(2(G(x) - G(x - L_2 \text{ctg}\theta))\right) \sin\theta dx + \int_0^{L_2} \exp\left(2(G(L_{1B}) - G(L_{1B} - y \text{ctg}\theta))\right) \cos\theta dy \right\}.$$

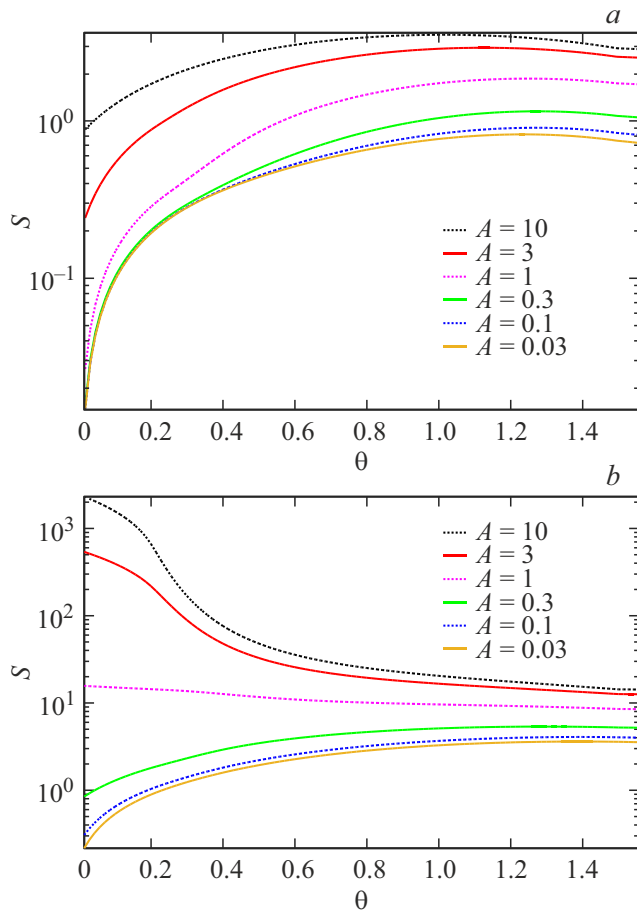


Рис. 3. Зависимость интенсивности рассеянного излучения S от угла рассеяния θ при различных значениях параметра неоднородности волны накачки A , коэффициент пространственного усиления в однородной среде $G = 1$, превышение порога неустойчивости в однородной среде $P = 1$ (a), 5 (b), геометрические параметры области рассеяния $L_{1A}/L_2 = L_{1B}/L_2 = 2.5$.

При $L_2 > (L_{1B} + L_{1A}) \operatorname{tg} \theta$

$$S(\theta, L_0, L_{1A}, L_{1B}, L_2) = \left\{ \int_{-L_{1A}}^{L_{1B}} \exp(2(G(x) - G(-L_{1A}))) \times \sin \theta dx + \int_0^{(L_{1A}+L_{1B}) \operatorname{tg} \theta} \exp(2(G(L_{1B}) - G(L_{1B} - x \operatorname{ctg} \theta))) \cos \theta dy + \int_{(L_{1A}+L_{1B}) \operatorname{tg} \theta}^{L_2} \exp(2(G(L_{1B}) - G(L_{1A})) \cos \theta dy \right\}.$$

Пример расчета интенсивности рассеянного излучения как функции угла рассеяния при различных длинах неоднородности приведен на рис. 3. При слабых ин-

тенсивностях волны накачки ($P = 1$, рис. 3, a) сигнал сильнее ослабляется при распространении вдоль оси Ox ($\theta \rightarrow 0$), а степень ослабления определяется соотношением размеров области усиления (L_0) и общей длины плазмы (L_{1A} и L_{1B}). Поскольку ($L_{1A} + L_{1B} > L_2$), то при распространении поперек области рассеяния ($\theta \rightarrow \pi/2$) ослабление сигнала при малых A оказывается более слабым, а при больших A наблюдается усиление интенсивности пробной волны.

При больших превышениях порога конвективной неустойчивости ($P = 10$, рис. 3, b) и близких размеров L_0 и L_2 угловая зависимость оказывается очень слабой. При $A < 1$ рассеянная энергия увеличивается с углом рассеяния, а при $A > 1$ растет.

Аналогичный расчет интенсивности рассеяния как функции коэффициента A при нескольких углах рассеяния приведен на рис. 4. При больших превышениях порога конвективной неустойчивости интенсивность излучения растет с увеличением характерного размера неоднородности. Насыщение кривой на рис. 4 связано с тем, что характерный размер неоднородности становится больше размера области взаимодействия. Как уже обсуждалось выше, при малых превышениях порога существенную роль играет затухание электромагнитной волны, что приводит к качественному изменению угловой зависимости рассеянного излучения.

Физический смысл имеет либо отношение мощности рассеянного излучения I_S к мощности волны накачки I_0 , $W_1 = I_S/I_0$, при заданной амплитуде пробной волны I_2 , либо отношение мощности I_S к мощности пробной волны I_2 при заданном значении I_0 , $W_1 = I_S/I_0$. Интенсивность волны накачки есть

$$I_0 = |\varepsilon_0|^2 L_2,$$

а интенсивность пробной волны

$$I_2 = |C|^2 (L_2 \cos \theta + (L_{1A} + L_{1B}) \sin \theta).$$

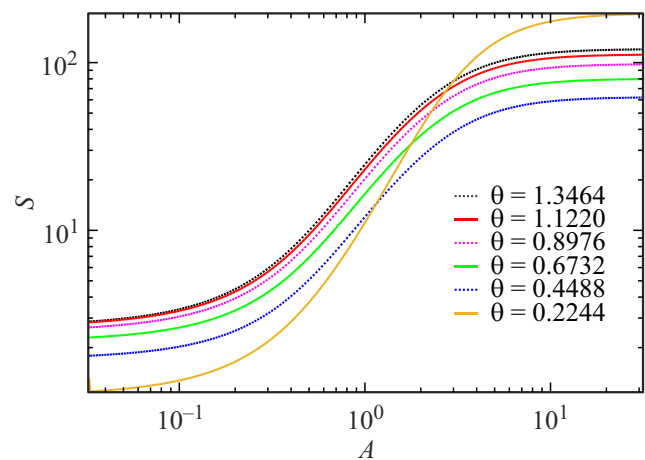


Рис. 4. Зависимость интенсивности рассеянного излучения от параметра неоднородности волны накачки A при различных значениях угла рассеяния θ ; параметры волны накачки $G = 1$, $P = 5$; параметры области рассеяния $L_{1A}/L_2 = L_{1B}/L_2 = 2.5$.

Для оценки применимости полученных результатов приведем результаты экспериментальных работ, где изучалось ВРМБ лазерного излучения. В условиях экспериментов [21], где изучалось ВРМБ лазерного излучения в разреженной плазме газовых мишеней при параметрах $\omega_{Le} = (3.1-8.9) \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$, $\omega_0 = 2 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$ (CO₂-лазер) $\rightarrow \lambda_0 \cong 10^{-3} \text{ cm}$, $T_e = 50 - 100 \text{ eV}$ — плотность потока энергии в пучке, $p = (10^{11} - 10^{13}) \text{ W/cm}^2$; $V_e/V_{Te} \cong 0.3$, порог неустойчивости $P = 1$ достигается при плотности потока энергии $p_{\text{пор}} = (1.5 \cdot 10^8 \div 2.6 \cdot 10^{10}) \text{ W/cm}^2$, при этом для коэффициента усиления $q = G/L_2$ получено значение $G/L_2 \cong (4.5 \cdot 10^2 \div 4.2 \cdot 10^3) \text{ cm}^{-1}$. Поскольку в этих экспериментах $p > p_{\text{пор}}$, то следует ожидать нарастания рассеянного излучения по закону $\exp(qx)$, где максимальное значение x определяется длиной акустики и равно $L_1 = \lambda_0(L_2/2\lambda_0)^2 \cong (1.6 \cdot 10^{-2} \div 10) \text{ cm}$ и $G \cong (7.2 \div 4.2 \cdot 10^4)$.

В наших численных расчетах значение q равно $\approx 2 \cdot 10^2 \text{ cm}^{-1}$. Отсюда следует, что значения коэффициентов усиления волн по порядку величины совпадают. Если принять для L_1 экспериментальное значение, то получим $G(L_{1A} + L_{1B})/L_2 \cong (3.2 \div 2 \cdot 10^3)$, что почти совпадает с экспериментальными данными. Различие указывает на то, что в экспериментах имеются дополнительные факторы, влияющие на ВРМБ и не учтенные в теоретической модели.

Выводы

Рассмотрен процесс ВРМБ в поле двумерно локализованной и неоднородной волны накачки при произвольном значении угла рассеяния с помощью укороченных уравнений для амплитуд рассеянной и звуковой волн в плазме. Получены точные решения для пространственного распределения амплитуды рассеянной волны и интенсивности рассеянного излучения. Формулы записаны таким образом, чтобы сопоставление с бесконечной средой было наиболее очевидным.

1. Получено, что при высоких превышениях порога неустойчивости наиболее сильное рассеяние происходит по направлению, вдоль которого область взаимодействия волн имеет наибольший размер. В частности, для области рассеяния, вытянутой в направлении оси Ox , наиболее интенсивное рассеяние должно идти в направлении этой оси.

2. Когда размер области усиления рассеянной электромагнитной волны ограничен неоднородностью, при высоких превышениях порога неустойчивости рассеяние идет в направлении оси Ox в том случае, если характерный размер неоднородности будет больше поперечного размера области взаимодействия. В противном случае рассеяние идет в поперечном направлении (нижние кривые на рис. 3, б).

3. При малых превышениях порога неустойчивости, когда усиление электромагнитной волны в области

взаимодействия сравнимо с затуханием в окрестности, зависимость рассеянного излучения становится более сложной.

4. Сопоставление расчетов интенсивности рассеянного излучения при ВРМБ по полученным формулам с экспериментом показало их качественное согласие.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] N.M. Kroll. J. Appl. Phys., **36** (1), 34 (1965). DOI: 10.1063/1.1713918
- [2] D.L. Bobroff, H.A. Haus. J. Appl. Phys., **38** (1), 390 (1967). DOI: 10.1063/1.1708986
- [3] Л.М. Горбунов. ЖТФ, **47** (1), 36 (1977). [L.M. Gorbunov. Sov. Phys. Zh. Tekh. Fiz., **47** (1), 36 (1977)].
- [4] А.Д. Пилия. ЖЭТФ, **64** (4), 1237 (1973). [A.D. Piliya. Zh. Eksp. Teor. Fiz., **64** (4), 629 (1973)].
- [5] Л.М. Горбунов, Д.К. Солихов. Физика плазмы, **10** (4), 824 (1984). [L.M. Gorbunov, D.K. Solikhov. Sov. Phys.: Fiz. Plazmy, **10** (4), 824 (1984)].
- [6] Д.К. Солихов. Известия вузов. Радиофизика, **27** (1), 34 (1984). [D.K. Solikhov. Radiophysics and Quantum Electronics, **27** (1), 25 (1984). DOI: 10.1007/BF02120939].
- [7] Д.К. Солихов, К.Н. Овчинников. Краткие сообщения по физике ФИАН, **37** (10), 3 (2010). [D.K. Solikhov, K.N. Ovchinnikov. Bulletin of the Lebedev Physics Institute, **37** (10), 3 (2010). DOI: 10.3103/S1068335610100015].
- [8] Д.К. Солихов, С.А. Двинин. Физика плазмы, **42** (6), 590 (2016). [D.K. Solikhov, S.A. Dvinin. Plasma Physics Reports, **42** (6), 576 (2016). DOI: 10.1134/S1063780X16060076].
- [9] D. Pesme, G. Laval, R. Pellat. Phys. Rev. Lett., **31** (4), 203 (1973). DOI: 10.1103/PhysRevLett.31.203
- [10] D.F. DuBois, D.W. Forslund, E.A. Williams. Phys. Rev. Lett., **33** (17), 1013 (1974). DOI: 10.1103/PhysRevLett.33.1013
- [11] S. Iha, S. Srivastava. Phys. Rev. A, **11** (1) 378 (1975). DOI: 10.1103/PhysRevA.11.378
- [12] F.W. Chambers, A. Bers. Phys. Fluids, **20** (3), 466 (1977). DOI: 10.1063/1.861884
- [13] V. Fuchs, C. Beaudry. Phys. Fluids, **21** (2), 280 (1978). DOI: 10.1063/1.862203
- [14] Z. Toroker, V.M. Malkin, N.Z. Fish. Physics of Plasmas, **21** (11), 113110 (2014). DOI: 10.1063/1.4902362
- [15] Л.М. Горбунов. УФН, **109** (4), 631 (1973). DOI: 10.3367/UFN.0109.197304a.0631 [L.M. Gorbunov Uspekhi Fizicheskikh Nauk (Physics-Uspekhi), **16** (2), 217 (1973). DOI: 10.1070/PU1973v016n02ABEH005166].
- [16] С.А. Двинин, Д.К. Солихов, Ш.С. Нурулхаков. Опт. и спектр., **128** (1), 98 (2020). DOI: 10.21883/OS.2020.01.48844.271-19 [S.A. Dvinin, D.K. Solikhov, Sh.S. Nurulhakov. Opt. Spectrosc., **128** (1), 94 (2020). DOI: 10.1134/S0030400X20010075].
- [17] А. Берс. В сб. *Основы физики плазмы. В двух томах. Том 2*. Ред. А.А. Галеев, Р. Судан (Энергоатомиздат, Москва, 1984), с. 267–330. [A. Bers. In: *Handbook of Plasma Physics. Vol. 2*, ed. by A.A. Galeev and R.N. Sudan, (North-Holland Publishing Company, 1983), p. 451–514].

- [18] С.А. Двинин, Д.К. Солихов, Д.У. Хобилов. В сб.: *XLVIII Международная Звенигородская конференция по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу, ICRAF-2021, 15–19 марта 2021 г. Сборник Тезисов Докладов* (ООО „Издательство МБА“ Москва, 2021), с. 24. [S.A. Dvinin, D.K. Solikhov, D.U. Hobilov. In: *XLVIII Zvenigorod Conference on Plasma Physics and Controlled Fusion. Zvenigorod, 15–19 March 2021*. DOI: 10.34854/ICRAF.2021.48.1.154].
- [19] Д.К. Солихов, С.А. Двинин, Д.У. Хобилов. Известия вузов. Физика, **62** (12), 42 (2019). DOI: 10.17223/00213411/64/6/49 [D.K. Solikhov, S.A. Dvinin, D.U. Khobilov. Russian Physics J., **62** (12), 42 (2019). DOI: 10.1007/s11182-020-01967-y].
- [20] A.A. Offenberger, M.R. Cerveman, A.M. Yam, A.W. Pasternak. J. Appl. Phys., **47** (4), 1451 (1976). DOI: 10.1063/1.322806
- [21] A. Ng, L. Pitt, D. Salzmann, A.A. Offenberger. Phys. Rev. Lett., **42** (5), 307 (1979). DOI: 10.1103/PhysRevLett.42.307