

01.1

Дробный осциллятор с экспоненциально-степенной функцией памяти

© С.Ш. Рехвиашвили, А.В. Псху

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия

E-mail: rsergo@mail.ru

Поступило в Редакцию 14 января 2022 г.

В окончательной редакции 24 января 2022 г.

Принято к публикации 25 января 2022 г.

Рассмотрена новая модель затухающих колебаний осциллятора, основанная на применении математического аппарата дробного интегро-дифференцирования с экспоненциально-степенной функцией динамической памяти. С использованием функции Райта получено точное решение уравнения движения осциллятора. Теоретический анализ показывает, что модель может найти эффективное применение для описания колебательных процессов в низкодобротных динамических (в частности, механических или электрических) системах.

Ключевые слова: дробное интегро-дифференцирование, динамическая память, дробный осциллятор, диссипативная система, сильно демпфированная система, моделирование затухающих колебаний.

DOI: 10.21883/PJTF.2022.07.52290.19137

Дробный осциллятор представляет собой математическую модель диссипативной колебательной системы, в которой действующие силы, в том числе и возвращающая сила, задаются через причинный интеграл. Причинность неразрывно связана с необратимостью процессов во времени, когда прошлое не может зависеть от будущего. В математической модели дробного осциллятора используется степенная функция памяти по временной переменной, которая задает импульс системы. Такую память можно называть динамической. В наследственной механике и электродинамике материальных сред родственным понятием является динамический гистерезис. Присутствие памяти означает, что импульс в текущий момент времени t зависит от предыдущих моментов времени $t' < t$, в течение которых действуют имеющиеся в системе силы. Интегро-дифференциальное уравнение движения дробного осциллятора всегда может быть представлено в классическом виде с обычным ускорением, и слагаемое со старшей дробной производной в нем не отождествляется с силой инерции в обычном понимании. Сам же термин „дробный осциллятор“ аналогичен таким устоявшимся математическим терминам, как „дробный интеграл“, „дробная производная“, „дробно-рациональное уравнение“, „дробно-линейная функция“ и др.

Дифференциальное уравнение дробного порядка с оператором Римана–Лиувилля, которое уместно использовать в качестве основы математической модели дробного осциллятора, было впервые решено в [1]. Активное обсуждение возможных физических приложений этой модели состоялось значительно позже [2–24]. В наших работах [17–20] выявлена взаимосвязь между параметрами моделей дробного осциллятора и классического осциллятора с вязким демпфированием. Показано, что для высокодобротных систем ($Q \gg 1/2$) порядок дробного интегро-дифференциального оператор

ра в уравнении движения выражается через добротность Q . Этот вывод сделан в духе хорошо известной работы [5] и затем подтвержден в [21–24]. Не только диссипация энергии, но и характер самого движения в рамках дробно-дифференциальных моделей контролируется порядком соответствующего оператора и числовым множителем перед ним. В этом можно наглядно убедиться, рассматривая простейшее инфинитное движение (траектория уходит на бесконечность за бесконечное время) под действием постоянной силы и при наличии динамического трения [25]. В классической модели при $t \rightarrow \infty$ ускорение здесь обращается в нуль. В дробно-дифференциальной модели этому отвечает единственный предельный случай, при котором дробная производная дает скорость движения (см. уравнение (10) в [25]), т. е. порядок уравнения движения уменьшается ровно на единицу.

В работе [2] предложено использовать обобщенную функцию памяти, представленную в виде произведения экспоненциальной и степенной функций. Применительно к различным электромагнитным, акустическим и механическим системам такая функция памяти дает возможность корректно изучать физические процессы, имеющие одновременно диффузионную и волновую природу [2]. Кроме того, для этих систем появляется интересная возможность исследовать переход от классического описания к дробно-дифференциальному. Математически это приводит к дробному исчислению с интегро-дифференциальными операторами, содержащими экспоненциально-степенные ядра (в англ. терминологии *tempered fractional calculus* [26–28]). Целью настоящей работы является построение и исследование модели дробного осциллятора с указанной функцией памяти.

Будем рассматривать движение с диссипацией энергии. Запишем уравнение движения вместе с начальным

условием в виде

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} + \beta\mathbf{v}(t) = \frac{1}{m}\mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{v}(0) = 0, \quad (1)$$

где \mathbf{r} , $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ и \mathbf{F} — векторы перемещения, скорости и силы, m — масса, β — положительный коэффициент, характеризующий трение. Решение (1) имеет вид

$$\mathbf{v}(t) = \frac{1}{m} \int_0^t G(t-t')\mathbf{F}(\mathbf{r}, t')dt', \quad (2)$$

$$G(t) = \exp(-\beta t), \quad (3)$$

где $G(t)$ — функция памяти. Если в (2) функцию памяти взять в виде

$$G(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\tau}{t}\right)^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (4)$$

то вместо (1) приходим к следующей задаче Коши:

$$\frac{d^\alpha \mathbf{v}(t)}{dt^\alpha} = \frac{\tau^{1-\alpha}}{m} \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{v}(0) = 0, \quad (5)$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера, τ — некоторая положительная константа с размерностью времени, физический смысл которой раскрывается далее. В (5) используется правосторонняя дробная производная Капуто, которая по определению есть [14–16,29]:

$$\frac{d^\alpha y(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \left(\frac{dy(t')}{dt'}\right) \frac{dt'}{(t-t')^\alpha}.$$

Чтобы объединить модели движения (1) и (5), выберем функцию памяти в виде [2]:

$$G(t) = \frac{\exp(-\beta t)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\tau}{t}\right)^{1-\alpha}. \quad (6)$$

В результате некоторых преобразований из (2) и (6) получаем

$$\frac{d^{\alpha,\beta} \mathbf{v}(t)}{dt^{\alpha,\beta}} = \frac{\tau^{1-\alpha}}{m} \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{v}(0) = 0, \quad (7)$$

где используется оператор

$$\frac{d^{\alpha,\beta} \mathbf{v}(t)}{dt^{\alpha,\beta}} = \exp(-\beta t) \frac{d^\alpha [\mathbf{v}(t) \exp(\beta t)]}{dt^\alpha}.$$

Согласно [30], полученный оператор можно считать обобщенным оператором дробного дифференцирования. Из (7) для одномерного движения осциллятора при $F(t) = -kx(t)$ имеем

$$\frac{d^{\alpha,\beta} \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)}{dt^{\alpha,\beta}} + \omega_0^{1+\alpha} x(t) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad v(0) = 0, \quad (8)$$

где $x(t)$ — смещение осциллятора, x_0 — начальное отклонение, k — коэффициент жесткости, $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 1/\tau$ — частота незатухающих колебаний осциллятора при $\alpha = 1$ и $\beta = 0$. Точное решение задачи (8) имеет вид

$$x(t) = x_0 \left[1 + \int_0^t e^{-\beta s} \phi(\alpha, 0; -\omega_0^{1+\alpha}(t-s)s^\alpha) \frac{ds}{s} \right], \quad (9)$$

где

$$\phi(\alpha, \mu; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! \Gamma(\alpha n + \mu)},$$

$\phi(\alpha, \mu; z)$ — функция Райта [29].

Решение (9) при $\alpha = 1$ описывает затухающие колебания осциллятора с вязким демпфированием, которые определяются формулой

$$x(t) = x_0 \exp(-\gamma t) \left[\cos(\omega t) + \frac{\gamma}{\omega} \sin(\omega t) \right], \quad (10)$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad \gamma = \frac{\beta}{2},$$

ω — частота затухающих колебаний, γ — коэффициент затухания. При $\beta = 0$ из (9) имеем затухающие колебания дробного осциллятора

$$x(t) = x_0 E_{1+\alpha}(-\omega_0^{1+\alpha} t^{1+\alpha}), \quad (11)$$

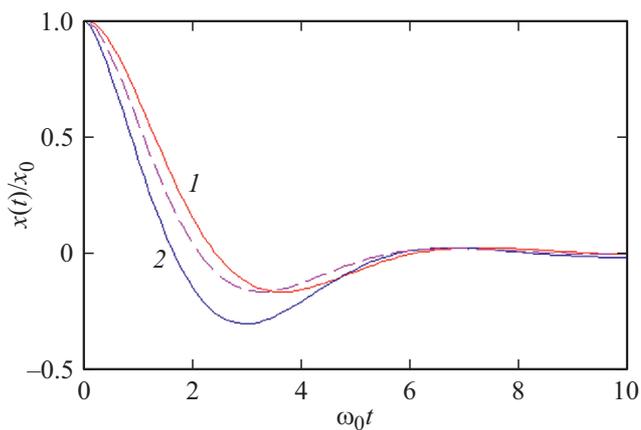
где

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)},$$

$E_\alpha(z)$ — функция Миттаг–Леффлера [29].

Если для высокочастотной колебательной системы выполняется соотношение $\alpha = 1 - 2/(\pi Q)$, где $Q = \omega_0/(2\gamma)$, то решения (10) и (11) будут хорошо приближены друг к другу [17]. В этом случае модели осциллятора с вязким демпфированием и дробного осциллятора оказываются практически равноценными, и поэтому их совместное рассмотрение с помощью функции памяти (4) не требуется. Однако ситуация радикально изменится, если перейти к анализу низкочастотной системы, для которой решения (10) и (11) между собой уже несопоставимы. На рисунке показаны примеры численных расчетов. Функции Райта и Миттаг–Леффлера вычислялись путем суммирования соответствующих рядов; интеграл в (9) вычислялся методом Ромберга. Из рисунка можно видеть, что на малых временах затухание колебаний осциллятора существенно зависит от способа описания диссипации. Как и задумывалось, обобщающая формула (9) дает возможность более гибко описать затухание колебаний.

Подводя итоги, можно отметить следующее. В настоящей работе впервые точно решена задача о колебаниях дробного осциллятора с экспоненциально-степенной функцией динамической памяти. Модель осциллятора,



Быстро затухающие колебания осциллятора. 1 — расчет по формуле (10) при $\beta/\omega_0 = 1$; 2 — расчет по формуле (11) при $\alpha = 0.5$; штриховая кривая — расчет по формуле (9) при $\alpha = \beta/\omega_0 = 0.75$.

основанная на задаче Коши (8), при $\alpha \in (0, 1)$ и $\beta > 0$ эффективно учитывает диссипацию энергии колебаний. Показано, что для низкодобротной системы характер затухания колебаний очень чувствителен к выбору функции памяти (см. формулы (3), (4) и (6)). Чтобы отдать предпочтение той или иной модели и определить численные значения входных параметров, требуется проведение экспериментальных исследований для конкретных динамических систем.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] J.H. Barrett, *Can. J. Math.*, **6** (4), 529 (1954). DOI: 10.4153/CJM-1954-058-2
- [2] R.R. Nigmatullin, *Phys. Status Solidi B*, **123** (2), 739 (1984). DOI: 10.1002/pssb.2221230241
- [3] R.R. Nigmatullin, *Phys. Status Solidi B*, **124** (1), 389 (1984). DOI: 10.1002/pssb.2221240142
- [4] P.P. Нигматуллин, *ТМФ*, **90** (3), 354 (1992). [R.R. Nigmatullin, *Theor. Math. Phys.*, **90** (3), 242 (1992). DOI: 10.1007/BF01036529].
- [5] F. Mainardi, *Chaos Solitons Fract.*, **7** (9), 1461 (1996). DOI: 10.1016/0960-0779(95)00125-5
- [6] B.N. Narahari Achar, J.W. Hanneken, T. Enck, T. Clarke, *Physica A*, **297** (3-4), 361 (2001). DOI: 10.1016/S0378-4371(01)00200-X
- [7] B.N. Narahari Achar, J.W. Hanneken, T. Clarke, *Physica A*, **309** (3-4), 275 (2002). DOI: 10.1016/S0378-4371(02)00609-X
- [8] B.N. Narahari Achar, J.W. Hanneken, T. Clarke, *Physica A*, **339** (3-4), 311 (2004). DOI: 10.1016/j.physa.2004.03.030
- [9] A.A. Stanislavsky, *Phys. Rev. E*, **70** (5), 051103 (2004). DOI: 10.1103/PhysRevE.70.051103
- [10] M. Li, S.C. Lim, Sh. Chen, *Math. Probl. Eng.*, **2011**, 657839 (2011). DOI: 10.1155/2011/657839
- [11] V.E. Tarasov, *Cent. Eur. J. Phys.*, **10** (2), 382 (2012). DOI: 10.2478/s11534-012-0008-0
- [12] J.E. Escalante-Martinez, J.F. Gomez-Aguilar, C. Calderon-Ramon, L.J. Morales-Mendoza, I. Cruz-Orduna, J.R. Laguna-Camacho, *Adv. Mech. Eng.*, **8** (4), 1 (2016). DOI: 10.1177/1687814016643068
- [13] M. Berman, L.S. Cederbaum, *Physica A*, **505**, 744 (2018). DOI: 10.1016/j.physa.2018.03.044
- [14] V.V. Uchaikin, *Fractional derivatives for physicists and engineers* (Springer, Berlin, 2013), vol. 2, p. 19–25.
- [15] R. Herrmann, *Fractional calculus — an introduction for physicists* (World Scientific Publ., Singapore, 2018).
- [16] *Handbook of fractional calculus with applications*, ed. by V.E. Tarasov (De Gruyter, 2019), vol. 4.
- [17] S. Rekhviashvili, A. Pskhu, P. Agarwal, Sh. Jain, *Turk. J. Phys.*, **43** (3), 236 (2019). DOI: 10.3906/fiz-1811-16
- [18] A.B. Псху, С.Ш. Рехвиашвили, *Письма в ЖТФ*, **45** (1), 34 (2019). DOI: 10.21883/PJTF.2019.01.47154.17540 [A.V. Pskhu, S.Sh. Rekhviashvili, *Tech. Phys. Lett.*, **44** (12), 1218 (2018). DOI: 10.1134/S1063785019010164].
- [19] С.Ш. Рехвиашвили, А.В. Псху, *ЖТФ*, **89** (9), 1314 (2019). DOI: 10.21883/JTF.2019.09.48055.284-18 [S.Sh. Rekhviashvili, A.V. Pskhu, *Tech. Phys.*, **64** (9), 1237 (2019). DOI: 10.1134/S1063784219090135].
- [20] С.Ш. Рехвиашвили, А.В. Псху, З.Ч. Маргушев, *Письма в ЖТФ*, **47** (22), 49 (2021). DOI: 10.21883/PJTF.2021.22.51728.18964
- [21] Р.И. Паровик, *Письма в ЖТФ*, **45** (13), 25 (2019). DOI: 10.21883/PJTF.2019.13.47953.17811 [R.I. Parovik, *Tech. Phys. Lett.*, **45** (7), 660 (2019). DOI: 10.1134/S1063785019070095].
- [22] Р.И. Паровик, *ЖТФ*, **90** (7), 1059 (2020). DOI: 10.21883/JTF.2020.07.49436.233-19 [R.I. Parovik, *Tech. Phys.*, **65** (7), 1015 (2020). DOI: 10.1134/S1063784220070154].
- [23] R. Parovik, *Mathematics*, **8** (11), 1879 (2020). DOI: 10.3390/math8111879
- [24] L.F.A. da Silva, V.R. Pedrozo, Jr., J.V.B. Ferreira, *Chin. J. Phys.*, **66**, 673 (2020). DOI: 10.1016/j.cjph.2020.04.020
- [25] K.S. Fa, *Physica A*, **350** (2), 199 (2005). DOI: 10.1016/j.physa.2004.11.041
- [26] F. Sabzikar, M.M. Meerschaert, J. Chen, *J. Comput. Phys.*, **293** (C), 14 (2015). DOI: 10.1016/j.jcp.2014.04.024
- [27] J. Deng, W. Ma, K. Deng, Y. Li, *Math. Probl. Eng.*, **2020**, 7962542 (2020). DOI: 10.1155/2020/7962542
- [28] H.M. Fahad, A. Fernandez, M. ur Rehman, M. Siddiq, *Mediterr. J. Math.*, **18** (4), 143 (2021). DOI: 10.1007/s00009-021-01783-9
- [29] А.В. Псху, *Уравнения в частных производных дробного порядка* (Наука, М., 2005).
- [30] A. Hanyga, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **23** (1), 211 (2020). DOI: 10.1515/fca-2020-0008