

03
Смещение предела устойчивости течений при наличии случайных флуктуаций скорости вращения

© Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова

Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова,
119192 Москва, Россия
e-mail: jilenko@imec.msu.ru

Поступило в Редакцию 2 февраля 2022 г.
В окончательной редакции 13 марта 2022 г.
Принято к публикации 14 марта 2022 г.

Численно исследована нелинейная устойчивость изотермических трехмерных течений вязкой несжимаемой нестратифицированной жидкости во вращающемся сферическом слое в присутствии шума. Рассмотрен переход между устойчивым нестационарным течением и неустойчивостью в виде бегущих азимутальных волн. Шум малой амплитуды вносится в течение случайными широкополосными возмущениями скорости вращения внутренней сферы относительно постоянного во времени среднего значения, внешняя сфера неподвижна. Предложен подход, позволяющий в присутствии шума упростить нахождение критического числа Рейнольдса, соответствующего пределу устойчивости. Проведено сравнение результатов, полученных предлагаемыми и хорошо известными методами.

Ключевые слова: шум, течения с вращением, сферическое течение Куэтта, управление неустойчивостью.

DOI: 10.21883/JTF.2022.06.52506.22-22

Введение

Крупномасштабные течения в атмосфере подвержены влиянию внешних воздействий, различающихся видом спектра и имеющих широкий диапазон временных масштабов — от модуляции поступающей в атмосферу солнечной радиации [1] до широкополосных миллисекундных изменений продолжительности дня [2]. Такие воздействия принято рассматривать как внешний по отношению к течению шум, на фоне которого в результате развития неустойчивости происходит формирование когерентных структур. Критическое число Рейнольдса Re_c , соответствующее пределу устойчивости, может изменяться как при совместном влиянии шума и периодической модуляции [3], так и под воздействием только внешнего шума [4]. Возможно, это связано с генерацией средних течений [4–6]. Шум увеличивает инкременты нарастания линейных мод и время взаимодействия между модами, а также может влиять на выбор волнового числа азимутальной моды [7]. Шум может приводить к изменению частоты и диффузии фазы колебаний [8,9], а также к хаотизации течений [10,11]. В течениях с вращением потеря устойчивости и хаотизация могут зависеть не только от уровня шума, но и от его временных характеристик [12].

Для течений во вращающихся сферических слоях, которые и являются предметом исследования настоящей работы, численно в осесимметричной постановке в [4] было показано, что под влиянием шума кинетическая энергия течений возрастает, а предел устойчивости снижается пропорционально увеличению уровня шума. Эти результаты были получены в упрощенной постановке, при которой рассматривалась линейная устойчивость

осредненного на большом временном интервале поля скорости, мгновенные поля скорости рассчитывались при случайных широкополосных флуктуациях скорости вращения внутренней сферы. Но вопрос о единственности решений подобных задач с различными видами внешних воздействий, в том числе и с шумом, пока остается открытым [13].

В связи с этим возрастает значение анализа устойчивости течений с использованием полных трехмерных уравнений Навье–Стокса. Критическое значение числа Рейнольдса Re_{c0} , соответствующее пределу устойчивости в отсутствие шума, принято определять по аппроксимации зависимости амплитуды колебаний от надкритичности $A \sim (Re - Re_{c0})^{1/2}$ при $(Re - Re_{c0}) \rightarrow 0$, здесь A — вычисляемая амплитуда колебаний скорости после потери течением устойчивости и образования бегущих азимутальных волн [14]. Однако результаты расчета течений с двумерной конвекцией [3] показывают, что указанная выше аппроксимация в присутствии шума не применима. В связи с этим возникает необходимость проводить расчеты в области $(Re - Re_c) \rightarrow 0$. Но, как будет далее показано, существенное увеличение времени переходных процессов в этой области не позволяет достоверно вычислять малые значения A , поэтому желательнее найти аппроксимацию зависимости A от Re и в этом случае. Цель настоящей работы — при наличии случайных флуктуаций скорости вращения численно, на основе решения полной трехмерной системы уравнений Навье–Стокса, определить величину Re_c , найти зависимость A от Re , а также продемонстрировать преимущества нового подхода, позволяющего определить Re_c с меньшими вычислительными затратами.

1. Численный метод и область исследования

Рассматриваются изотермические течения вязкой несжимаемой нестратифицированной жидкости во вращающемся сферическом слое, описываемые в инерциальной системе координат уравнениями Навье–Стокса и неразрывности:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = U \times \text{rot} U - \text{grad} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} \right) - \nu \text{rot} \text{rot} U, \text{div} U = 0.$$

Здесь U, p — поле скорости течения и давление соответственно; ρ, ν — плотность и кинематическая вязкость жидкости. Граничными условиями являются прилипание и непротекание, которые в сферической системе координат с радиальным (r), полярным (θ) и азимутальным (φ) направлениями могут быть представлены в следующем виде:

$$u_\varphi(r = r_k) = \Omega_k(t) r_k \sin \theta, \quad u_r(r = r_k) = 0, \\ u_\theta(r = r_k) = 0, \quad k = 1, 2.$$

Здесь u_φ, u_r, u_θ — азимутальная, радиальная и полярная компоненты скорости U , индексы 1 и 2 относятся к внутренней ($k = 1$) и внешней ($k = 2$) твердым сферическим границам; Ω_k, r_k — угловая скорость вращения и радиус соответствующей сферы. Как уже отмечалось, в настоящей работе внешняя сфера неподвижна, $\Omega_2 = 0$, в связи с чем далее нижний индекс у Ω_1 и Re_1 опускается. Дополнительный шум в течения вносится также как и в [4,7] случайными широкополосными флуктуациями скорости вращения внутренней сферы:

$$\Omega(t) = \Omega_0 + N r n(j).$$

Здесь Ω_0 — осредненная часть скорости вращения, постоянная во времени, $r n(j)$ — псевдослучайное число из последовательности со стандартным нормальным распределением и средним нулевым значением, изменяемое на каждом шаге по времени, N — амплитуда шума. Так же как и в [4,7], спектр флуктуаций скорости вращения имеет равную амплитуду в широком диапазоне частот и представляет собой „белый шум“. Амплитуда шума определяется выражением

$$N = \frac{1}{\Omega_0} \sqrt{\frac{1}{K-1} \sum_{i=1}^K (\Omega(t_i) - \Omega_0)^2},$$

где K — длина временной выборки. Все расчеты проведены при $N = 0.04$ для сравнения с результатами работы [4], в которой выполнен анализ линейной устойчивости в осесимметричной упрощенной постановке (см. выше) для этого же значения N . Так же как и в [4,15], одна и та же последовательность случайных чисел использовалась во всех расчетах.

При численном решении использовались алгоритм [16] и основанные на нем программы [16,17] с

консервативной конечно-разностной схемой дискретизации уравнений Навье–Стокса (УНС) по пространству и полуявной схемой Рунге–Кутты третьего порядка точности для интегрирования по времени. В отличие от [4] в рассчитываемых нестационарных течениях не ставились условия симметрии относительно плоскости экватора и оси вращения. Дискретизация по пространству проводилась с уменьшением размера ячеек вблизи сфер (по r) и плоскости экватора (по θ). Отношение максимального размера ячейки к минимальному равнялось двум, общее количество узлов $5.76 \cdot 10^5$. Зависимость результатов расчета от конфигурации расчетной сетки изучена ранее подробно во многих работах (например, в [18]). Расчеты проведены при размерных параметрах, соответствующих условиям проведения экспериментов и расчетов в [4]: $\nu = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $r_1 = 0.075 \text{ m}$, $r_2 = 0.15 \text{ m}$, и с постоянным шагом во времени $dt = 0.025 \text{ s}$. При расчетах проводилась запись зависимости величин скорости течения от времени в точках, расположенных в меридиональной плоскости течения на лучах с угловыми отклонениями от оси вращения $\theta = 17.84^\circ$ (вблизи оси вращения), 45.63° (в средних широтах) и $\theta = 89.67^\circ$ (вблизи плоскости экватора) и относительными расстояниями от внутренней сферы $R = 0.177, 0.284, 0.381, 0.487, 0.60, 0.67$ и 0.76 , где $R = (r - r_1)/(r_2 - r_1)$. Точка с координатами $R = 0.67$ и $\theta = 45.63^\circ$ выбрана для представления результатов как наиболее близкая к положению точки измерения азимутальной компоненты скорости в эксперименте [4]. Результаты расчетов представлены ниже в зависимости от числа Рейнольдса $\text{Re} = \Omega r_1^2/\nu$, расчеты проводились в диапазоне изменения Re от 488 до 500.

2. Результаты

Напомним, что в настоящей работе рассматривается влияние шума на изменение положения предела устойчивости течения во вращающемся сферическом слое. В отсутствие шума течение до потери устойчивости стационарно и симметрично относительно оси вращения и плоскости экватора [19]. При добавлении случайных флуктуаций в сигнал скорости вращения указанные выше симметрии сохраняются, но поле скорости течения становится случайным и нестационарным [4]. Рассмотрим, каким образом случайные флуктуации скорости вращения внутренней сферы распространяются в течении до потери ими устойчивости. Иллюстрацией этого процесса могут служить среднеквадратичные отклонения азимутальной компоненты скорости $\text{rms } u_\varphi$ (рис. 1):

$$\text{rms } u_\varphi(r, \theta) = \sqrt{\frac{1}{K_t} \sum_{k=1}^{K_t} (u_\varphi(t_k, r, \theta) - u_{\varphi av}(r, \theta))^2}.$$

Здесь левое слагаемое — мгновенное значение азимутальной скорости в момент времени t , а правое слагаемое — осредненное во времени значение азимутальной

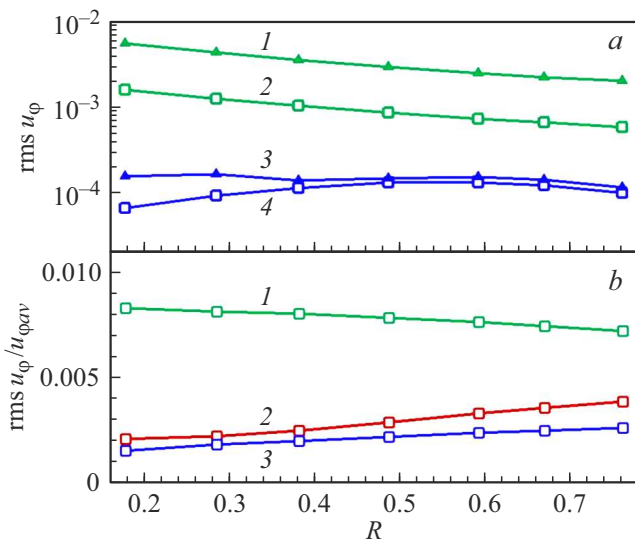


Рис. 1. Зависимость $\text{rms } u_\phi$, [m/s] (*a*) и $\text{rms } u_\phi/u_{\phi av}$ (*b*) от R при $\text{Re} = 488$. *a* — 1, 3 — периодические колебания скорости вращения с $g = 0.3$ Hz, $A = 0.046$; 2, 4 — случайные флуктуации скорости вращения $N = 0.04$, 1, 2 — $\theta = 89.67^\circ$, 3, 4 — $\theta = 45.63^\circ$. *b* — случайные флуктуации скорости вращения, θ : 1 — 89.67° , 2 — 17.84° , 3 — 45.63° .

скорости течения. Если в экваториальной плоскости значения $\text{rms } u_\phi$ (кривая 2 на рис. 1, *a*) экспоненциально затухают в радиальном направлении по мере удаления от внутренней сферической границы, то на средних широтах наблюдается локальный максимум вблизи $R = 0.5$ (кривая 4 на рис. 1, *a*). Для сравнения на рис. 1, *a* представлены также значения $\text{rms } u_\phi$ (кривые 1, 3) при периодических колебаниях скорости вращения внутренней сферы: $\Omega(t) = \Omega_0(1 + A \sin(2\pi gt + \phi))$, A, g — амплитуда и частота модуляции, Ω_0 — средняя скорость вращения внутренней сферы. Для представленного на рис. 1, *a* случая $g = 0.3$ Hz наблюдается удовлетворительное качественное соответствие распространения случайных и периодических колебаний. В случае изменения величины g качественное соответствие сохраняется только в экваториальной плоскости. На рис. 1, *b* представлены величины $\text{rms } u_\phi$, нормированные на величину средней азимутальной компоненты скорости течения $u_{\phi av}$. Если в экваториальной плоскости $\text{rms } u_\phi/u_{\phi av}$ уменьшаются по мере удаления от внутренней сферы (кривая 1), то на средних широтах и вблизи оси вращения (кривые 2 и 3) наблюдается возрастание $\text{rms } u_\phi/u_{\phi av}$ при увеличении R , что связано с уменьшением $u_{\phi av}$ при приближении к внешней границе.

В рассматриваемом сферическом слое с относительной толщиной $\delta = (r_2 - r_1)/r_1 = 1$ при стационарных граничных условиях потеря течением устойчивости при $\text{Re} > \text{Re}_{c0}$ происходит мягко, без гистерезиса [19,20]. При этом формируются распространяющиеся в направлении вращения внутренней сферы бегущие азимутальные волны [19] с волновыми числами $m = 3$ и/или $m = 4$.

Все компоненты скорости во всем слое изменяются во времени периодически [19,20]. Как в отсутствие шума [19,20], так и при его наличии [4], доминирующей является мода $m = 4$, так как в обоих случаях выполняется соотношение $\lambda_4 > \lambda_3$, где λ_4 и λ_3 — инкременты нарастания линейных мод с волновыми числами $m = 4$ и 3 соответственно. И именно для моды $m = 4$ выполняются в дальнейшем все расчеты.

При наличии шума были рассчитаны течения до и после потери устойчивости. На рис. 2 представлены зависимости u_ϕ от времени на средних широтах ($\theta = 45.63^\circ$). Видно, что в нестационарном течении до потери устойчивости (кривые 3 и 4 на рис. 2) по мере увеличения R , т.е. удаления от источника шума, характер случайных флуктуаций скорости изменяется. Ближе к внутренней сфере (кривая 3) наблюдаются малоамплитудные высокочастотные флуктуации, тогда как вблизи внешней сферы (кривая 4) преобладает низкочастотный сигнал большей амплитуды. Это связано с более быстрым затуханием высокочастотных составляющих по сравнению с низкочастотными, и полностью соответствует полученным ранее спектрам флуктуаций скорости вращения внутренней сферы и спектрам азимутальных компонент скорости на удалении от нее (рис. 1 в [4]). В сигнале скорости течения после потери устойчивости (кривые 1, 2 на рис. 2) доминирует периодическая зависимость от времени с флуктуирующими во времени средним и амплитудой.

Расчеты в осесимметричной постановке течений до потери устойчивости [4] показали, что добавление шума в виде флуктуаций скорости вращения внутренней сферы может приводить к изменению профилей средней скорости. Генерация средних течений хорошо известна и для других видов нестационарных граничных условий и обусловлена наличием нелинейности и вязкости в УНС [6]. На рис. 3 показано изменение под влиянием шума относительных приращений азимутальной ком-

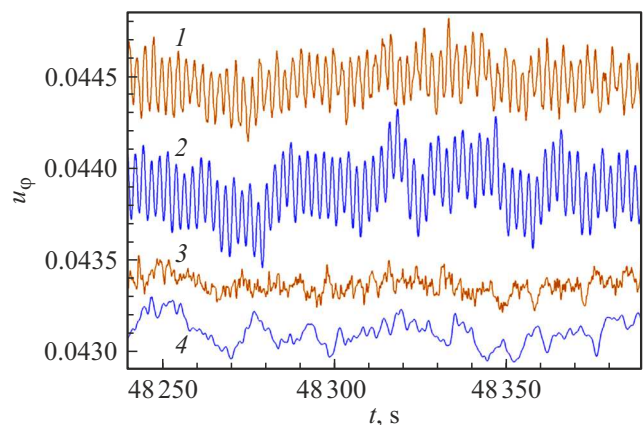


Рис. 2. Зависимость от времени t азимутальной компоненты скорости u_ϕ [m/s] при $\text{Re} = 492.77$ (1, 2) и 491 (3, 4); 1, 3 — $R = 0.177$, 2, 4 — $R = 0.76$. Зависимости 2–4 сдвинуты вверх по оси ординат для наглядности изображения.

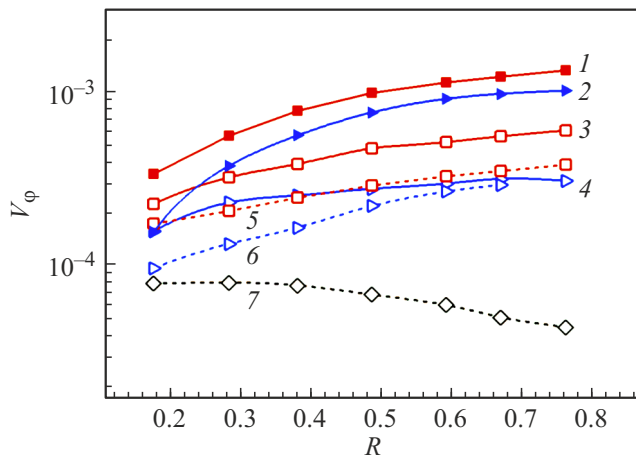


Рис. 3. Зависимость V_φ от относительного расстояния между сферическими границами R для устойчивых течений при $Re = 488$, $g = 0.3$ Hz, $A = 0.046$ (1, 2, сплошные линии, закрытые символы), $Re = 488$, случайные флуктуации скорости вращения (3, 4, сплошные линии, открытые символы) и неустойчивых течений при $Re = 492.9$ (5–7, прерывистые линии, открытые символы). θ : 1, 3, 5 — 17.84° , 2, 4, 6 — 45.63° , 7 — 89.67° .

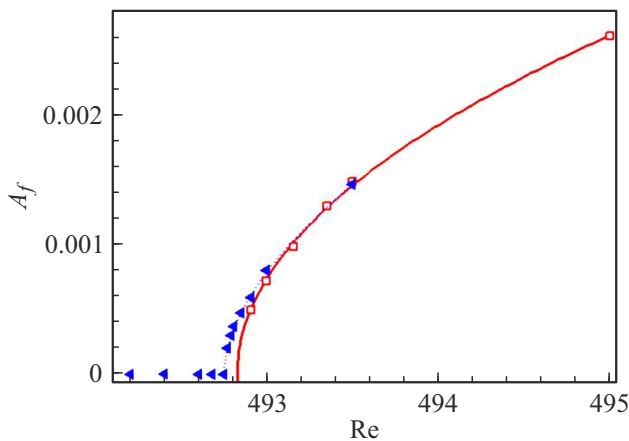


Рис. 4. Амплитуда колебаний азимутальной скорости A_f [m/s] в зависимости от числа Re при $R = 0.67$ и $\theta = 52.9^\circ$. Открытые символы (красные) — $N = 0$, закрытые символы (синие) — $N = 0.04$. Сплошная (красная) линия — параболическая аппроксимация зависимости A_f от числа Re при $N = 0$. Значения A_f , равные нулю, соответствуют расчетам, в которых наблюдалось непрерывное во времени уменьшение величины A_f более чем в 1000 раз по сравнению с начальным значением.

поненты скорости V_φ в течениях до и после потери устойчивости, а также представлено сравнение со случаем периодических колебаний скорости вращения ($V_\varphi = (u_{\varphi av} - u_{\varphi 0})/u_{\varphi 0}$, $u_{\varphi 0}$ — азимутальная компонента скорости при стационарных граничных условиях). В течениях как до, так и после потери устойчивости $V_\varphi > 0$, что свидетельствует о генерации среднего течения в азимутальном направлении. Вблизи оси вращения и на средних широтах V_φ увеличивается в радиальном

направлении, такая же зависимость от R характерна и для периодических колебаний скорости вращения. Снижение V_φ по мере удаления от внутренней сферы наблюдается только в экваториальной плоскости. Наибольшие относительные приращения азимутальной компоненты скорости наблюдаются в области течения, расположенной вблизи оси вращения и внешней сферы. Для осесимметричных течений до потери устойчивости такой же результат получен ранее в [4]. Величины V_φ , как правило, выше в случае течения до потери устойчивости (сплошные линии на рис. 3), исключением служит область на средних широтах вблизи внешней сферы.

При определении величины Re_c в качестве начальных условий могут использоваться закритические ($Re > Re_c$) значения Re [16], далее расчеты проводятся путем уменьшения Re и при традиционном подходе только при его закритических величинах [16,18]. В настоящей работе такой подход реализуется путем ступенчатого снижения Re от выбранной начальной величины, и определения амплитуды колебаний A_f азимутальной компоненты скорости после окончания переходного процесса и выхода A_f на постоянное во времени значение (напомним, что это относится к случаю $Re > Re_c$). При $Re < Re_c$ наблюдается постепенное затухание A_f без выхода на постоянное значение.

Величины A_f , так же как и в [7], вычислялись с использованием преобразования Гильберта (НТ). Для этого сначала из $u_\varphi(t)$ фильтрацией выделялся сигнал $u_4(t)$ в полосе частот $f_4 \pm \Delta f$, соответствующей азимутальной моде $m = 4$: $f_4 = 0.43$ Hz, $\Delta f = 0.005$ Hz. После этого величина A_f определялась как модуль аналитического сигнала:

$$A_f = |u_4(t) + i\text{НТ}(u_4(t))|.$$

При таком способе определения A_f можно получить зависимость амплитуды от времени для всей временной выборки. Также определялись и амплитуды азимутальных мод в экспериментах при $Re < Re_c$ [4].

На рис. 4 представлена зависимость величины A_f от числа Re в указанной выше точке течения, в других областях течения зависимости качественно такие же. Видно, что при $Re < 493$ величины A_f при наличии шума больше аналогичных величин, соответствующих стационарным граничным условиям. И предел устойчивости, определяемый равенством $A_f = 0$, смещается в область меньших по сравнению со случаем $N = 0$ чисел Re . Этот вывод совпадает с результатами анализа линейной устойчивости для усредненных во времени осесимметричных течений [4]. Смещение предела устойчивости под действием шума может определяться по зависимости от чисел Re не только A_f , но и других параметров течения, например $\text{rms } u_\varphi$ (по моменту достижения постоянного значения, рис. 5, а) или нормированной средней величины азимутальной компоненты скорости $W = u_{\varphi av}/\Omega_0 r$ (по излому зависимости от числа Re , рис. 5, б).

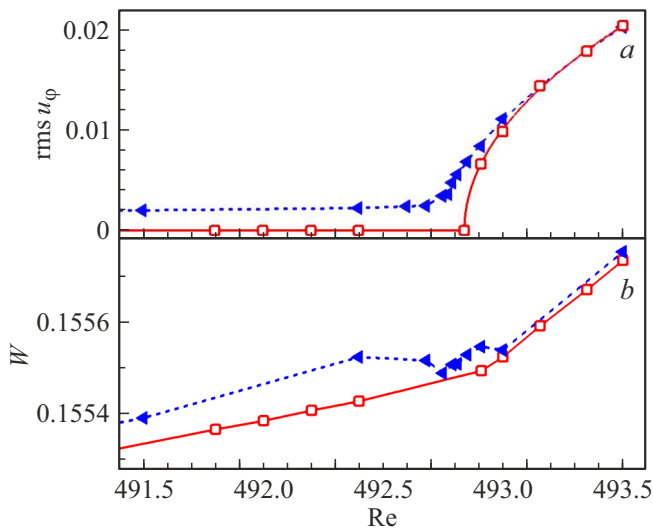


Рис. 5. Зависимость среднеквадратичных отклонений азимутальной компоненты скорости течения (a) и нормированной средней скорости течения (b) от числа Re. Открытые символы (красные) — $N = 0$, закрытые (синие) — $N = 0.04$.

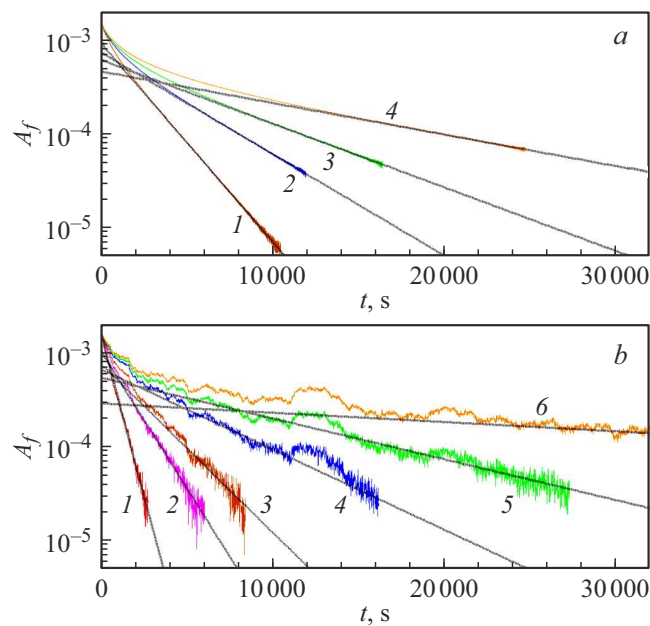


Рис. 6. Зависимость A_f [m/s] от времени t (сплошные линии) и экспоненциальная аппроксимация этой зависимости (пунктирные линии) при отсутствии шума (a) и при наличии шума (b). a — $Re = 492.4$ (1), 492.6 (2), 492.68 (3), 492.75 (4); b — $Re = 491.5$ (1), 492.2 (2), 492.4 (3), 492.6 (4), 492.68 (5), 492.75 (6).

Тем не менее сам факт смещения положения предела устойчивости под действием шума не снимает вопроса о величине этого смещения и точности его определения. При отсутствии шума, как указывалось выше, положение предела устойчивости принято определять по стремлению к нулю параболической аппроксима-

ции $A_f \sim (Re - Re_c)^{1/2}$. При наличии конечной амплитуды шума подобные аппроксимации неизвестны, и точность определения предела устойчивости в этом случае можно повышать путем уточнения зависимости A_f от числа Re при $(Re - Re_c) \rightarrow 0$. Однако при приближении к пределу устойчивости время переходного процесса между начальным и конечным значениями A_f может существенно увеличиваться: так, при $Re = 492.77$ необходимое время счета увеличивается до $4.8 \cdot 10^4$ s, что составляет более $3.3 \cdot 10^4$ оборотов внутренней сферы, что в 1.5 раза больше, чем при $Re = 492.9$. При этом возможность достижения не зависящего от времени среднего значения A_f заранее не известна, поскольку, как отмечалось выше, при $Re < Re_c$ A_f постоянно уменьшается. В связи с этим интересно рассмотреть другие подходы к определению зависимости A_f от числа Re.

При наличии шума один из таких подходов базируется на свойствах амплитуд азимутальных мод течения. При $Re < Re_c$ амплитуды азимутальных мод экспоненциально затухают во времени, в том числе и при наличии шума [4]. Рассмотрим, как происходит изменение величин A_f при $Re < Re_c$ (рис. 6). Видно, что как при стационарных граничных условиях (рис. 6, a), так и при случайных флуктуациях скорости вращения (рис. 6, b) после быстрого уменьшения на начальном участке наблюдается экспоненциальная зависимость A_f от t : $A_f \sim \exp(-Bt)$, где B — декремент затухания. С увеличением числа Re величина декремента затухания B снижается, и зависимость A_f от t стремится к горизонтальной прямой, поскольку условие $B = 0$ выполняется при $Re = Re_c$. На рис. 7 представлена зависимость величин декрементов затухания от числа Re, позволяющая определить величины Re_c как в отсутствие шума, так и при его наличии из условия $B = 0$. Видно, что вблизи предела устойчивости зависимость B от числа Re близка к линейной, а величина Re_c при наличии шума меньше, чем аналогичная величина при стационарных граничных условиях, что соответствует

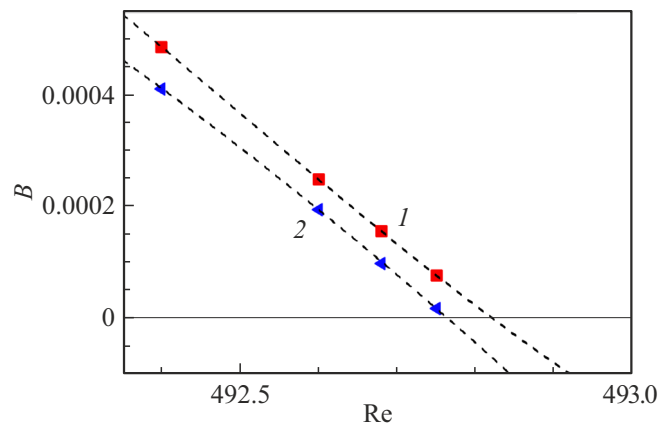


Рис. 7. Зависимость декрементов затухания B от числа Re. 1 — (красные символы) — $N = 0$, 2 — (синие символы) — $N = 0.04$. Пунктирные линии — аппроксимация данных для 1 и 2, горизонтальная линия — $B = 0$.

Сравнение результатов определения положения предела устойчивости, рассчитываемого различными методами

Вид решения	Re_{c0} ($N = 0$)	Re_c ($N = 0.04$)	$(Re_{c0} - Re_c)/Re_{c0}$
Анализ линейной устойчивости (из [4])	489.284	489.246	$7.7665 \cdot 10^{-5}$
Нелинейное решение, известный способ	492.822	492.761 ± 0.011	$1.2378 \cdot 10^{-4}$
Нелинейное решение, предлагаемый метод	492.822	492.765 ± 0.001	$1.1566 \cdot 10^{-4}$

результатам, полученным при традиционном подходе (рис. 4). Сравнение Re_c , полученных разными методами, представлено в таблице, и свидетельствует о хорошем соответствии результатов.

Результаты, показанные на рис. 7 и 6, демонстрируют преимущества предлагаемого подхода для определения критического числа Re_c как в отсутствие шума, так и при его наличии. Во-первых, близкий к линейному вид зависимости $B(Re)$ при $Re < Re_c$ позволяет уменьшить необходимое количество расчетов при разных числах Re , что, естественно, ведет к сокращению объема вычислений. Во-вторых, экспоненциальная зависимость A_f от времени позволяет уменьшить длительность временной выборки при каждом значении Re , что также ведет к сокращению вычислительных затрат.

Заключение

Проведено численное исследование влияния случайных флуктуаций, добавляемых к постоянной средней скорости вращения внутренней сферы, на устойчивость течений вязкой несжимаемой жидкости во вращающемся сферическом слое. Показана аналогия между воздействием шума и воздействием периодических колебаний на распределение флуктуаций скорости в течении до потери устойчивости. Как и в случае периодической модуляции скорости вращения внутренней сферы, под действием шума растут средние скорости течения. Установлено, что увеличение средних скоростей течения под действием шума выше в течениях до потери устойчивости по сравнению с течениями после потери устойчивости.

Показано, что при добавлении шума уменьшается, по сравнению со стационарными граничными условиями, величина критического значения числа Рейнольдса Re_c , соответствующего пределу устойчивости течения. Этот результат получен традиционным методом из анализа зависимости амплитуды колебаний скорости течения от чисел Рейнольдса при $Re > Re_c$. Предложен новый метод определения величины Re_c , основанный на анализе поведения амплитуды колебаний скорости течения при числах Рейнольдса, меньших, чем Re_c , а именно — экспоненциального затухания амплитуды колебаний со временем и близкой к линейной зависимости декремента затухания от числа Re . Результаты, полученные разными методами, показали хорошее совпадение. Продемонстрирована возможность сокращения объема вычислений при использовании предлагаемого подхода. Открытым

остается вопрос о возможности использования данного подхода не только в случае добавления шума к постоянной скорости вращения, но и при другом характере зависимости граничных условий от времени, например, при периодических колебаниях скорости вращения, что и будет предметом последующих исследований.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] V. Lucarini, T. Bodai. *Nonlinearity*, **33**, R59 (2020). DOI: 10.1088/1361-6544/ab86cc
- [2] R. Hide, J.O. Dickey. *Science*, **253** (5020), 629 (1991).
- [3] Д.В. Любимов, Т.П. Любимова, Б.С. Марышев. *Изв. РАН, МЖГ*, **6**, 30 (2010). [D.V. Lubimov, T.P. Lubimova, B.S. Maryshev. *Fluid Dyn.*, **45** (6), 859 (2010).]
- [4] Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова. *ЖТФ*, **91** (6), 933 (2021). DOI: 10.21883/JTF.2021.06.50862.345-20
- [5] V.G. Kozlov, N.V. Kozlov, S.V. Subbotin. *Acta Astr.*, **130**, 43 (2017). DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.actaastro.2016.10.018>
- [6] D. Cebron, J. Vidal, N. Schaeffer, A. Borderies, A. Sauret. *J. Fluid. Mech.*, **916**, A39 (2021). DOI: 10.1017/jfm.2021.220
- [7] D. Zhilenko, O. Krivonosova, M. Gritsevich, P. Read. *Chaos*, **28**, 053110 (2018). DOI: 10.1063/1.5011349
- [8] H. Nakao, J.-n. Teramae, D.S. Goldobin, Y. Kuramoto. *Chaos*, **20**, 033126 (2010). DOI: 10.1063/1.3488977
- [9] D.S. Goldobin, J.-n. Teramae, H. Nakao, G.B. Ermentrout. *Phys. Rev. Lett.*, **105**, 154101 (2010). DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.154101
- [10] M. Pradas, D. Tseluiko, S. Kalliadasis, D.T. Papageorgiou, G.A. Pavliotis. *Phys. Rev. Lett.*, **106**, 06062 (2011). DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.060602
- [11] O.G. Chkhetiani, E.B. Gledzer. *Phys. A*, **486**, 416 (2017). DOI: 10.1016/j.physa.2017.05.027
- [12] S.K. Nath, A.K. Chattopadhyay. *Phys. Rev. E*, **90**, 063014 (2014). DOI: 10.1103/PhysRevE.90.063014
- [13] U. Karban, B. Bugeat, E. Martini, A. Towne, A.V.G. Cavalieri, L. Lesshafft, A. Agarwal, P. Jordan, T. Colonius. *J. Fluid Mech.*, **900**, R5 (2020). DOI: 10.1017/jfm.2020.566
- [14] Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. *Теоретическая физика*. Т. 6. *Гидродинамика* (Наука, М., 1986), 3-е изд.
- [15] M.L. Waite. *Phys. Fluids*, **29**, 126602 (2017). DOI: 10.1063/1.5004986
- [16] N. Nikitin. *J. Comp. Phys.*, **217** (2), 759 (2006). DOI: 10.1016/j.jcp.2006.01.036
- [17] О.Э. Кривоносова. *Дисс. к.ф.-м.н.* (МГУ, М., 2007)

- [18] Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова. Письма в ЖТФ, **44** (11), 3 (2018). DOI: 10.21883/PJTF.2018.11.46191.17049 [D.Yu. Zhilenko, O.E. Krivonosova. Tech. Phys. Lett., **44** (6), 457 (2018). DOI: 10.1134/S1063785018060147]
- [19] Ю.Н. Беляев, И.М. Яворская. В сб. *Течения вязкой жидкости во вращающихся сферических слоях и их устойчивость. Итоги науки и техники, сер. МЖГ*, под ред. А.И. Михайлова (ВИНИТИ, М., 1980), т. 15, с. 3.
- [20] G. Dumus. Ph.D. Thesis. California Institute of Technology, 1991.