

00

## Кооперативные эффекты при стационарной генерации сверхизлучательного рамановского лазера

© К.С. Тихонов<sup>1</sup>, А. Рот<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034 Санкт-Петербург, Россия,

<sup>2</sup> Ганноверский университет им. Лейбница,  
30167, Ганновер, Германия

e-mail: tikhonov.kyril@gmail.com

Поступила в редакцию 08.05.2022 г.

В окончательной редакции 08.05.2022 г.

Принята к публикации 12.05.2022 г.

Рассмотрен стационарный режим генерации для обобщенной модели сверхизлучательного рамановского лазера. Модель включает в себя конкурирующие индивидуальные и кооперативные атомные процессы, возникающие при взаимодействии атомов с внешними световыми полями. Получены средние значения поляризации атомной среды и двухатомных корреляций. Найден диапазон значений параметров задачи, при котором в атомном ансамбле возникают кооперативные эффекты. С помощью квантовой теоремы регрессии определены спектральные характеристики генерируемого излучения. С помощью разложения по кумулянтам оценено наличие корреляций старших порядков между атомами.

**Ключевые слова:** сверхизлучательный лазер, коррелированные состояния атомов, кооперативные эффекты, кумулянтный анализ.

### 1. Введение

В основе работы сверхизлучательного лазера [1] лежит явление кооперативного спонтанного излучения (или сверхизлучения Дике) [2]. В отличие от обычных лазеров, активная среда которых находится в высокодобротном, „хорошем“ резонаторе, сверхизлучательный лазер работает в режиме так называемого „плохого“ резонатора [3]. В таком режиме фотоны генерируемого света покидают резонатор практически мгновенно, но этого оказывается достаточно для согласования фаз отдельных излучающих атомов друг с другом, что приводит к формированию долгоживущей коллективной когерентности в атомной среде. Со временем корреляции между атомами накапливаются и вдоль оси резонатора ансамбль атомов излучает как целое с шириной линии излучения, сравнимой с шириной атомного лазерного перехода. В теории сверхизлучательный лазер, работающий на часовом переходе, может достигать ширины линии излучения порядка 1 мГц [4]. Кроме того, поскольку когерентность излучаемого света определяется атомной средой, а не резонатором, сверхизлучательный лазер оказывается почти нечувствительным как к тепловым, так и к техническим вибрациям зеркал, которые накладывают фундаментальное ограничение стабильности для лазерных источников с пассивными оптическими резонаторами [5,6]. Таким образом, благодаря высокой стабильности и узкости спектральной линии, сверхизлучательные лазеры часто рассматриваются в контексте нового поколения атомных часов и стандартов частоты [7]. Однако это вовсе не означает, что сверхизлучательные источники когерентного излучения не востребованы в

других областях. В частности, усиление спонтанного излучения за счет эффекта сверхизлучения может происходить в том числе и на двухфотонных рамановских переходах, что уже было показано в экспериментальных работах [8,9]. Такие источники излучения интересны для ряда важных задач магнитометрии [10], а также для генерации неклассических состояний света [11].

Простейшая модель сверхизлучательного лазера, описывающая динамику двухуровневой атомной системы в присутствии внешних электромагнитных полей, включает в себя индивидуальную накачку атомов из основного состояния в возбужденное и их коллективный распад на обратном переходе [4,12]. В настоящей работе мы рассмотрим обобщенную модель сверхизлучательного рамановского лазера, которая (кроме индивидуальных накачки и распада атомов) будет включать в себя также два конкурирующих кооперативных процесса, действующих на переходе между основным и возбужденным состояниями и обратном ему в эффективной двухуровневой схеме. Такие процессы характерны для атомов, имеющих сложную многоуровневую энергетическую структуру, как, например, рубидий и цезий, которые часто используются в оптических экспериментах. Отметим, что даже в случае простой модели сверхизлучательного лазера кооперативный режим генерации возникает только при определенном выборе ее параметров. В частности, скорость индивидуальной накачки атомов внешним лазерным полем должна превосходить скорость распада возбужденного состояния атома, чтобы создать инверсию населенности в атомной среде, но при этом она не должна быть слишком большой, чтобы не разрушить фазовые соотношения, возникающие между отдельными

излучателями. В рассматриваемой обобщенной модели из-за наличия нескольких конкурирующих процессов баланс между параметрами примет значительно более сложный вид. В работе мы найдём диапазон значений параметров модели, при которых возникает кооперативное излучение атомов среды, и определим спектральные характеристики света на выходе резонатора в стационарном режиме генерации.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 мы рассмотрим простейшую модель сверхизлучательного лазера, с помощью которой опишем наиболее важные его характеристики в стационарном режиме генерации. В частности, нас будут интересовать средняя поляризация атомов (инверсия населенностей атомной среды) и двухатомные корреляции, наличие которых, как мы увидим, будет свидетельствовать о возникновении в среде кооперативных эффектов. Полученные результаты помогут при анализе решений для обобщенной модели сверхизлучательного лазера в разд. 3, в котором мы найдём спектр излучения и определим его характеристики. В частности, мы покажем, что при оптимальных условиях генерации ширина спектральной линии излучения окажется сравнимой с шириной атомного перехода. В разд. 4 с помощью разложения по кумулянтам оценим наличие корреляций старших порядков между атомами в стационарном режиме генерации сверхизлучательного лазера. Кроме того, в работе уделим особое внимание ряду теоретических методов, которые часто применяют при исследовании сверхизлучательного лазера: квантовой теореме регрессии, с помощью которой мы найдем спектр излучения, и кумулянтному анализу, который позволит определить наличие межатомных корреляций в системе.

## 2. Модель сверхизлучательного лазера

Вначале рассмотрим простейшую модель сверхизлучательного лазера, которая позволит описать основные происходящие в нем физические процессы, приводящие к кооперативному излучению атомов. Её общий вид схематически представлен на рис. 1, *a*. Ансамбль из  $N$  двухуровневых атомов помещён внутри одномодового резонатора с шириной линии  $\kappa$ . Резонатор подобран так, что частота  $\omega_c$  поддерживаемой им моды  $\hat{a}$  совпадает с частотой  $\omega_{eg}$  перехода между основным  $|g\rangle$  и возбужденным  $|e\rangle$  уровнями атома, т.е.  $\omega_c = \omega_{eg}$ . Взаимодействие между полем резонатора и атомами опишем с использованием дипольного приближения, при этом будем считать, что поле взаимодействует с каждым атомом одинаково и сила взаимодействия определяется однофотонной частотой Раби  $\Omega/2$  (рис. 1, *b*). Временная эволюция состояния такой системы будет подчиняться

уравнению Линдблада:

$$\frac{d}{dt}\rho = -i\frac{\omega_{eg}}{2}[J^z + \hat{a}^\dagger\hat{a}, \rho] - i\frac{\Omega}{2}[J^+\hat{a} + J^-\hat{a}^\dagger, \rho] + w\sum_i \mathcal{D}[\sigma_i^+]\rho + \kappa\mathcal{D}[\hat{a}]\rho, \quad (1)$$

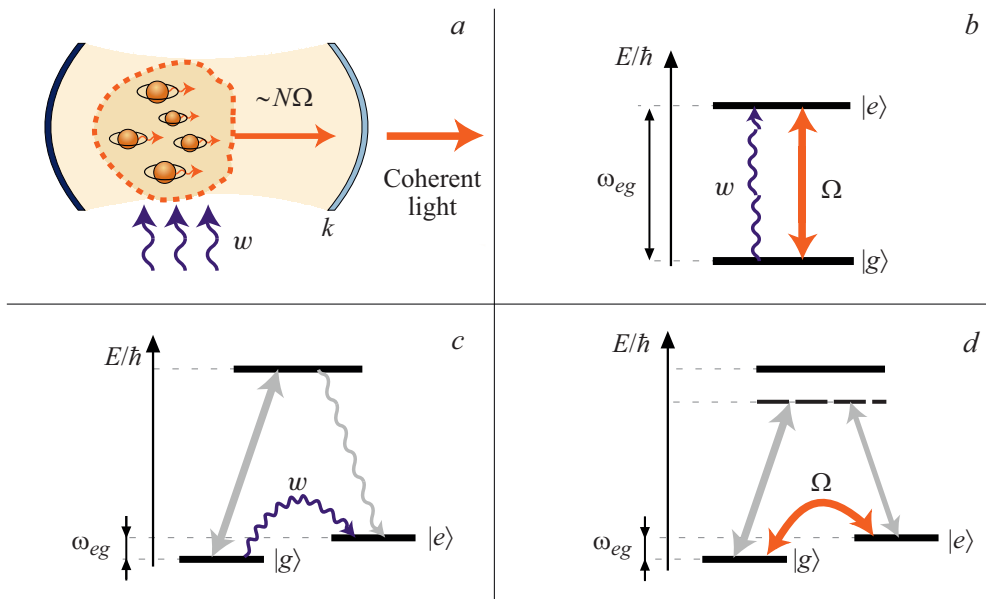
где с помощью  $\mathcal{D}[A]\rho = A\rho A^\dagger - 1/2A^\dagger A\rho - 1/2\rho A^\dagger A$  обозначены супероператоры Линдблада, а  $J^z = \sum_{i=1}^N \sigma_i^z$  и  $J^\pm = \sum_{i=1}^N \sigma_i^\pm$  – коллективные операторы углового момента, записанные через матрицу Паули  $\sigma_i^z$  и лестничные (повышающие и понижающие) операторы  $\sigma_i^\pm$   $i$ -го атома. Кроме когерентного взаимодействия атомов ансамбля с внутррезонаторным полем мы также включили в уравнение (1) уход фотонов из резонатора со скоростью  $\kappa$  и индивидуальную накачку атомов со скоростью  $w$ , которая переводит атомы из основного состояния  $|g\rangle$  в возбужденное  $|e\rangle$ . Отметим, что индивидуальная природа накачки важна по двум причинам. Во-первых, как было показано в работах [12,13], только в этом случае происходит формирование коллективного дипольного момента ансамбля атомов, т.е. ансамбль будет излучать как целое. Во-вторых, индивидуальная накачка может сбалансировать другие некогерентные процессы, такие как индивидуальный спонтанный распад атомов ансамбля. Для простоты анализа индивидуальный спонтанный распад не был включен в уравнение (1), однако его вклад будет оценен в дальнейшем при рассмотрении обобщенной модели сверхизлучательного лазера в разд. 3.

В отличие от обычных лазеров, когерентность излучения которых зависит от свойств резонатора, когерентность излучения сверхизлучательного лазера определяется кооперативными эффектами в атомной среде. Эти эффекты возникают в режиме „плохого резонатора“, когда уход фотонов из резонатора оказывается быстрее других процессов, входящих в (1), т.е.  $\kappa \gg w, \Omega$ . Это позволяет адиабатически исключить поле  $\hat{a}$  из уравнения Линдблада и рассмотреть динамику состояния атомов среды отдельно [12]. Для этого мы использовали метод проекторов, описанный в [14]. В результате после адиабатического исключения моды резонатора было получено управляющее уравнение, описывающее эволюцию матрицы плотности  $\rho_{at}$  атомной системы:

$$\frac{d}{dt}\rho_{at} = w\sum_i \mathcal{D}[\sigma_i^+]\rho_{at} + \gamma\mathcal{D}[J^-]\rho_{at}, \quad (2)$$

в котором с помощью  $\gamma = \Omega^2/\kappa$  обозначена эффективная скорость распада атома из возбужденного состояния  $|e\rangle$  в основное состояние  $|g\rangle$ .

Из (2) выведем систему уравнений, описывающую временную эволюцию средних значений для поляризации (инверсии населенностей)  $\langle \sigma_1^z \rangle$  и двухатомных корреляций  $\langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle$ , содержащих относительную фазу



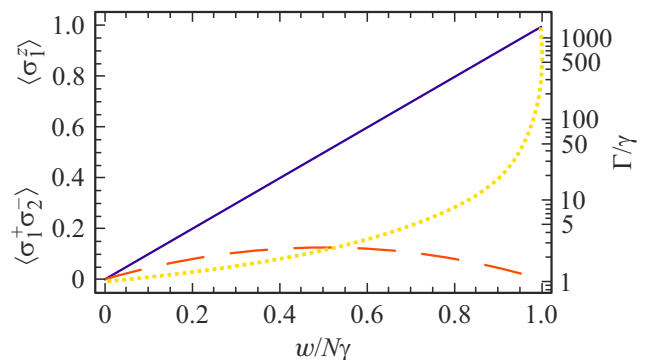
**Рис. 1.** (a) Сверхизлучательный лазер на основе ансамбля из  $N$  атомов, помещенных в резонатор с шириной линии  $\kappa$ ; (b) эффективная двухуровневая энергетическая схема атомов внутри резонатора, которая на практике может быть реализована через процессы, показанные в (c) и (d).  $w$  — эффективная скорость накачки атомов,  $\Omega/2$  — эффективная однофотонная частота Раби, (c) оптическая накачка атома с  $\lambda$ -схемой уровней, (d) двухфотонный рамановский переход, индуцированный внешним полем в атоме с  $\lambda$ -схемой уровней.

между двумя излучателями:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle\sigma_1^z\rangle &= w(1 - \langle\sigma_1^z\rangle) - \gamma(1 + \langle\sigma_1^z\rangle) \\ &\quad - 2(N - 1)\gamma\langle\sigma_1^+\sigma_2^-\rangle, \\ \frac{d}{dt}\langle\sigma_1^+\sigma_2^-\rangle &= \{(N - 2)\gamma\langle\sigma_1^z\rangle - (w + \gamma)\}\langle\sigma_1^+\sigma_2^-\rangle \\ &\quad + \frac{\gamma}{2}(\langle\sigma_1^z\rangle + 1)\langle\sigma_1^z\rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

Нижними индексами обозначены номера атомов. При этом в силу того, что атомы взаимодействуют с модой резонатора и внешней накачкой одинаково, между ними существует перестановочная симметрия, которая позволяет выбрать атомы из ансамбля произвольным образом. Кроме того, при записи системы уравнений (3) было использовано разложение по кумулянтам, в котором мы пренебрегли корреляциями третьего порядка и произвели факторизацию момента  $\langle\sigma_1^+\sigma_2^-\sigma_3^z\rangle = \langle\sigma_1^+\sigma_2^-\rangle\langle\sigma_3^z\rangle$ , а также учли, что  $\langle\sigma_1^z\rangle\langle\sigma_2^z\rangle = \langle\sigma_1^z\rangle^2$  [15]. Наличие корреляций старших порядков будет оценено в разд. 4.

Чтобы найти средние значения поляризации  $\langle\sigma_1^z\rangle$  и двухатомных корреляций  $\langle\sigma_1^+\sigma_2^-\rangle$ , установившихся в стационарном режиме генерации сверхизлучательного лазера, нужно левую часть (3) приравнять нулю и затем решить получившуюся однородную систему уравнений. На рис. 2 представлены зависимости этих наблюдаемых от безразмерной индивидуальной скорости накачки атомов  $w/N\gamma$ . Из рисунка видно, что при увеличении скорости накачки поляризация растет линейно, тогда как



**Рис. 2.** Средняя поляризация  $\langle\sigma_1^z\rangle$  (тёмно-фиолетовая сплошная линия), двухатомные корреляции  $\langle\sigma_1^+\sigma_2^-\rangle$  (оранжевая штриховая линия) и спектральная ширина линии  $\Gamma$ , выраженная в единицах эффективной скорости распада атома  $\gamma$  из возбужденного состояния  $|e\rangle$  в основное  $|g\rangle$  (желтая пунктирная линия) в стационарном режиме генерации сверхизлучательного лазера. Количество атомов  $N = 10^6$ .

кривая для двухатомных корреляций описывает перевернутую параболу, нарастающую от нуля при  $w/N\gamma = 0$  до максимального значения при  $w/N\gamma = 0.5$  и затем спадающую до нуля при  $w/N\gamma = 1$ . Наличие ненулевых значений двухатомных корреляций, как мы увидим из расчета ширины спектральной линии излучения, свидетельствует о возникновении сверхизлучения, при котором скорость перехода атома  $\gamma$  из возбужденного состояния  $|e\rangle$  в основное  $|g\rangle$  оказывается усилена в зависимости от числа атомов в возбужденном состоя-

нии. Из графиков видно, что для этого скорость накачки атомов  $w$  должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\gamma < w < N\gamma. \quad (4)$$

Здесь нижняя граница  $w_{\min} = \gamma$  отвечает возникновению в атомной среде инверсии населенностей, необходимой для лазерной генерации. Это существенно отличается от обычного лазера, в котором нижний порог генерации достигается тогда, когда накачка превышает потери резонатора. Верхняя граница  $w_{\max} = N\gamma$  отвечает ситуации, когда кооперативное излучение атомов исчезнет из-за наличия шума, вызванного самой накачкой.

Для вычисления спектра излучения мы использовали квантовую теорему регрессии (разд. 3) и получили, что его величина будет определяться преобразованием Фурье, взятом от двухвременной корреляционной функции коллективных атомных операторов:

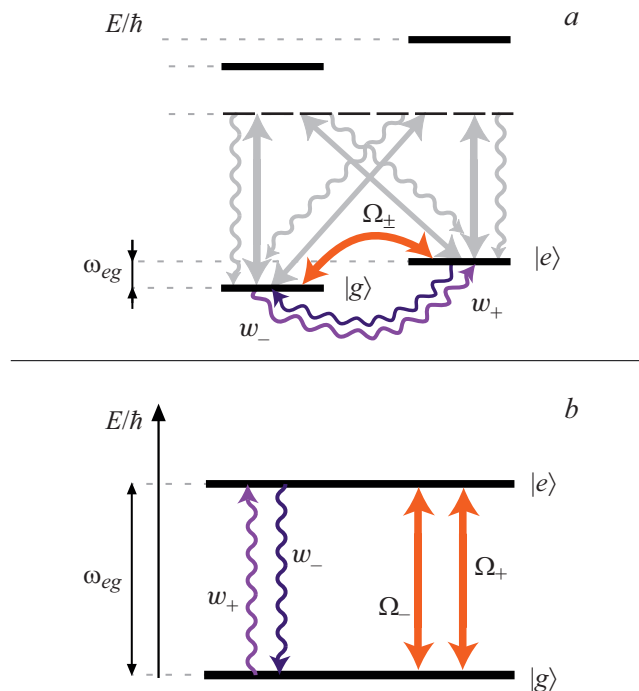
$$S(\omega) = \mathcal{F}[\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(0) \rangle](\omega) = \frac{\Omega^2}{\kappa^2} \mathcal{F}[\langle J^+(t)J^-(0) \rangle](\omega), \quad (5)$$

которая в свою очередь может быть найдена из уравнения

$$\frac{d}{dt} \langle J^+(t)J^-(0) \rangle = \left( i\omega_{eg} - \frac{\Gamma}{2} \right) \langle J^+(t)J^-(0) \rangle. \quad (6)$$

Как мы увидим далее, спектр излучения будет иметь лоренцев профиль с шириной линии  $\Gamma = w + \gamma - (N - 1)\gamma \langle \sigma_1^\pm \rangle$ , которая при оптимальном выборе скорости накачки  $w$ , соответствующему максимуму двухатомных корреляций  $\langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle$ , оказывается сравнимой с  $\gamma$  (рис. 2).

Приведенная модель сверхизлучательного лазера базируется на использовании ансамбля двухуровневых атомов, и, как было показано в работах [4,12], такой модели оказывается достаточно для описания основных свойств возникающего кооперативного излучения. На практике такая модель может быть реализована, в частности, с помощью индуцированных внешними полями двухфотонных рамановских переходов в атомах с  $\Lambda$ -конфигурацией энергетических уровней (рис. 1, *c, d*). Верхний уровень при этом из-за наличия отстройки от резонанса может быть адиабатически исключен, т.е. атомы могут быть описаны с помощью эффективной двухуровневой схемы. Однако в реальных атомах со сложной энергетической структурой уровней нерезонансные двухфотонные рамановские переходы приведут к тому, что в уравнении для матрицы плотности появятся дополнительные кооперативные и индивидуальные члены, которые будут конкурировать между собой, что приведет к совершенно новым условиям возникновения в среде сверхизлучательного лазерного перехода (или даже нескольких таких переходов).



**Рис. 3.** (а) Энергетическая схема уровней атома, в которой обозначены процессы индивидуальной накачки, действующей с эффективной скоростью  $w_+$  на переходе  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ , индивидуальной накачки, действующей с эффективной скоростью  $w_-$  на переходе  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ , а также индуцированные внешними полями двухфотонные рамановские переходы, происходящие с эффективной однофотонной частотой Раби  $\Omega/2$ ; (б) упрощенная эффективная схема уровней атома, включающая в себя только актуальные при решении задачи процессы.

### 3. Обобщенная модель сверхизлучательного рамановского лазера

#### 3.1. Управляющее уравнение

Как было показано в предыдущем разделе, даже в упрощенной модели сверхизлучательный режим генерации атомов ансамбля требует соблюдения определенного баланса между скоростью индивидуальной накачки и скоростью кооперативного распада. В этом разделе мы рассмотрим обобщенную модель рамановского сверхизлучательного лазера, которая включает в себя дополнительные конкурирующие кооперативные и индивидуальные процессы, возникающие в эффективной двухуровневой схеме атома вследствие нерезонансных двухфотонных рамановских переходов (рис. 3). Эти дополнительные процессы приведут к возникновению нового, более тонкого баланса между параметрами модели, соблюдение которого необходимо для сверхизлучательного режима генерации.

Динамику состояния рассматриваемой атомно-полевой системы после адиабатического исключения нерезонансных уровней энергии опишем с помощью

следующего управляющего уравнения, полученного с использованием приближения вращающихся координат [16]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho = & -i\frac{\omega_{eg}}{2}[J^z, \rho] - i\left[\left(\frac{\Omega_-}{2}J^+ + \frac{\Omega_+}{2}J^-\right)\hat{a} + h.c., \rho\right] \\ & + w_+ \sum_i \mathcal{D}[\sigma_i^+] \rho + w_- \sum_i \mathcal{D}[\sigma_i^-] \rho + \kappa \mathcal{D}[\hat{a}] \rho, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\omega_{eg}$  — разность частот между двумя подуровнями основного состояния атома  $|g\rangle$  и  $|e\rangle$ . В данное уравнение в соответствии с моделью Джейнса-Каммингса включен кооперативный член, пропорциональный эффективной частоте Раби  $\Omega_-$ , описывающий переход атомов ансамбля с уровня  $|g\rangle$  на уровень  $|e\rangle$  в результате взаимодействия с модой резонатора  $\hat{a}$  и внешним классическим полем (на рис. 3, *a* показано левой прямой вертикальной стрелкой), а также кооперативный член, пропорциональный эффективной частоте  $\Omega_+$ , действующий на обратном переходе, т.е. с уровня  $|e\rangle$  на уровень  $|g\rangle$ , и индуцированной другим классическим полем (на рис. 3, *a* показано правой прямой вертикальной стрелкой). Отметим, что если энергетический зазор  $\omega_{eg}$  между уровнями мал по сравнению с частотой внешних классических полей, то они будут действовать как на одном, так на другом переходе (рис. 3, *a*). Кроме того, мы также включили в модель процесс индивидуальной накачки с эффективной скоростью  $w_+$  на переходе  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$  и процесс индивидуальной накачки с эффективной скоростью  $w_-$ , действующей на переходе  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ , а также уход фотонов из резонатора со скоростью  $\kappa$ .

Как и раньше, будем считать, что уход фотонов из резонатора происходит гораздо быстрее всех остальных процессов, входящих в (7), т.е.  $\kappa \gg \Omega_{\pm}, w_{\pm}$ . После адиабатического исключения поля резонатора с помощью метода проекторов получим управляющее уравнение для матрицы плотности, описывающее временную динамику состояния только атомной системы:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_{at} = & -i\frac{\omega_{eg}}{2}[J^z, \rho_{at}] + w_+ \sum_i \mathcal{D}[\sigma_i^+] \rho_{at} \\ & + \gamma_- \mathcal{D}[J^-] \rho_{at} + w_- \sum_i \mathcal{D}[\sigma_i^-] \rho_{at} + \gamma_+ \mathcal{D}[J^+] \rho_{at}, \end{aligned} \quad (8)$$

в котором  $\gamma_- = \Omega_-^2/\kappa$  — эффективная скорость распада атома из возбужденного состояния  $|e\rangle$  в основное состояние  $|g\rangle$ , а  $\gamma_+ = \Omega_+^2/\kappa$  — эффективная скорость обратного ему перехода.

В полученном уравнении первые два члена, отвечающие индивидуальной накачке на переходе  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$  и кооперативному распаду на переходе  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ , совпадают с правой частью уравнения (3). В то же время третий и четвертый члены представляют собой индивидуальную „накачку“ и кооперативный „распад“ в обратную сторону, т.е. действуют так, как если бы обозначения уровней  $|e\rangle$  и  $|g\rangle$  поменяли местами. Таким образом, в

полученном уравнении возникает определенная симметрия: если заменить в обозначениях „плюсы“ на „минусы“ а „минусы“ на „плюсы“, то вид уравнения при этом не изменится. Эту симметрию удобно использовать при анализе полученных решений. В частности, без потери общности достаточно рассмотреть только те случаи, когда  $w_+ > w_-$ . Кроме того, как следует из полученных ранее решений для упрощенной модели, приведенных на рис. 2, кооперативные эффекты в атомной среде появляются тогда, когда в среде создана достаточная инверсия населенностей, при которой скорость индивидуальной накачки  $w$  по порядку величины оказывается сравнимой со скоростью кооперативного распада  $N\gamma$ . Следовательно, будем считать, что выполняется условие  $w_+, w_- \gg \gamma_-, \gamma_+$ . Также предположим, что  $\gamma_- > \gamma_+$ . Во всех остальных случаях система будет вести себя аналогичным образом с той лишь разницей, что атомные уровни „поменяются местами“.

Из (8) нетрудно получить уравнения для поляризации  $\langle \sigma_1^z \rangle$  и двухатомных корреляций  $\langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \sigma_1^z \rangle = & w_+(1 - \langle \sigma_1^z \rangle) - w_-(1 + \langle \sigma_1^z \rangle) \\ & - 2(N - 1)(\gamma_- - \gamma_+) \langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle = & \{(N - 2)(\gamma_- - \gamma_+) \langle \sigma_1^z \rangle \\ & - (w_+ + w_- + \gamma_- + \gamma_+)\} \langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle \\ & + \frac{1}{2} ((\gamma_- - \gamma_+) + (\gamma_- + \gamma_+) \langle \sigma_1^z \rangle) \langle \sigma_1^z \rangle, \end{aligned} \quad (9)$$

где, как и ранее, с помощью разложения по кумулянтам были исключены корреляции третьего порядка и произведена факторизация следующих моментов [15]:  $\langle \sigma_1^z \sigma_2^z \rangle \approx \langle \sigma_1^z \rangle^2$  и  $\langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \sigma_3^z \rangle \approx \langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle \langle \sigma_1^z \rangle$ . Чтобы найти стационарное решение этих уравнений, нужно положить левые части равными нулю и решить получившуюся систему однородных уравнений.

На рис. 4, *a* приведены решения стационарных уравнений для средней поляризации  $\langle \sigma_1^z \rangle$  и двухатомных корреляций  $\langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle$  в зависимости от безразмерной скорости накачки  $w_+/N\gamma_-$ , нормированной на число атомов  $N$ , при  $\gamma_+ = 0$ , т.е. в присутствии только одного кооперативного распада в (8) с уровня  $|e\rangle$  на уровень  $|g\rangle$ . Сплошные кривые соответствуют упрощенной модели сверхизлучательного лазера при  $w_- = 0$  (как на рис. 2), которые будем использовать для сравнения. Штрихованная и пунктирные линии соответствуют двум другим случаям, когда  $w_-/N\gamma_- = 0.03$  и  $w_-/N\gamma_- = 0.06$ . Видно, что наличие дополнительного индивидуального члена в (8) на переходе с  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$  (его можно рассматривать как индивидуальный распад) приводит к смещению нижнего и верхнего порогов генераций, т.е. изменению граничных условий (4). При этом поляризация среды растёт с ростом скорости накачки  $w_+$  до некоторого

значения, после чего достигает насыщения и выходит на плато. Максимум двухатомных корреляций

$$\max_{w_+} \langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle = \frac{1}{8} - \frac{w_-}{N\gamma_+} \frac{1}{\frac{\gamma_-}{\gamma_+} - 1}$$

достигается при скорости накачки  $w_{+,opt} = N(\gamma_- - \gamma_+)/2 - w_-$  для  $N \gg 1$ .

На рис. 4, *b* показаны зависимости средней поляризации  $\langle \sigma_1^z \rangle$  и двухатомных корреляций  $\langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle$  от  $\gamma_+/\gamma_-$  при  $w_+/N\gamma_- = 0.1$ . Видно, двухатомные корреляции в системе оказываются весьма чувствительными к наличию индивидуального распада атомов с уровня  $|e\rangle$  на уровень  $|g\rangle$ .

Стационарное решение для двухатомных корреляций  $\langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle$  показывает, что сверхизлучательный режим в системе возникает тогда, когда скорость индивидуальной накачки  $w_+$  удовлетворяет следующим неравенствам:

$$w_- < w_+ < N(\gamma_- - \gamma_+) \frac{w_+ - w_-}{w_+ + w_-} - w_- \quad (10)$$

По сравнению с полученными ранее граничными условиями (4) для упрощенной модели сверхизлучательного лазера, новые граничные условия связывают между собой все четыре скорости, входящие в (8). Таким образом, требуется соблюдение более тонкого баланса между ними для кооперативной генерации когерентного света.

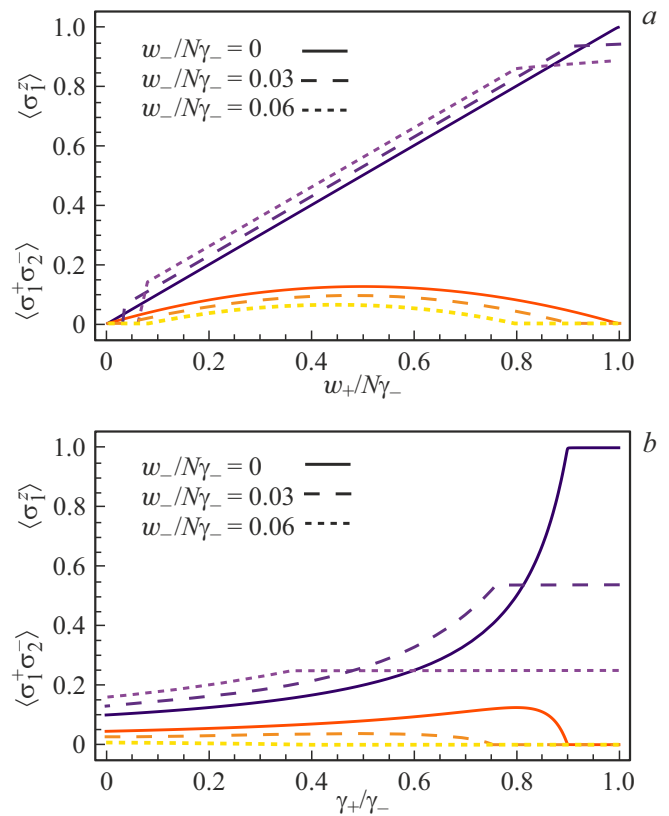
На рис. 5, *a-f* представлен общий вид зависимости средней поляризации  $\langle \sigma_1^z \rangle$  и двухатомных корреляций  $\langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle$  от безразмерной скорости индивидуальной накачки  $w_+/N\gamma_-$ , нормированной на число атомов  $N$ , и безразмерной скорости  $\gamma_+/\gamma_-$  кооперативного процесса на переходе  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ . На рис. 5, *a-f* (а также рис. 5, *g-i*) пунктирной кривой обозначен диапазон значений параметров, при которых в атомной среде возникает кооперативное излучение, что подтверждается расчетом спектра.

### 3.2. Спектр излучения

Чтобы найти спектр излучения, генерируемого рамановским сверхизлучательным лазером, воспользуемся квантовой теоремой регрессии [14,17]. Для этого вернемся к управляющему уравнению (7), описывающему временную эволюцию матрицы плотности системы до адиабатического исключения резонатора, и с его помощью запишем уравнение для среднего значения полевого оператора уничтожения  $\hat{a}$ :

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{a}(t) \rangle = -\frac{\kappa}{2} \langle \hat{a}(t) \rangle - i \left( \Omega_+ \langle J^-(t) \rangle + \Omega_- \langle J^+(t) \rangle \right). \quad (11)$$

В правую часть уравнения входят средние значения атомных коллективных повышающего и понижающего операторов  $\langle J^+(t) \rangle$  и  $\langle J^-(t) \rangle$ . Поскольку  $\kappa \gg w_{\pm}, \Omega_{\pm}$ ,



**Рис. 4.** Средняя поляризация  $\langle \sigma_1^z \rangle$  (три верхние линии), двухатомные корреляции  $\langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle$  (три нижние линии) в зависимости от следующих параметров задачи: (а) безразмерной накачки  $w_+/N\gamma_-$  на переходе  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ ; (б) безразмерной скорости кооперативного процесса  $\gamma_+/\gamma_-$  на переходе  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ . Количество атомов  $N = 10^6$ .

изменение со временем  $\langle J^+(t) \rangle$  и  $\langle J^-(t) \rangle$  происходит медленнее, чем  $\langle \hat{a}(t) \rangle$ , что позволяет использовать управляющее уравнение для матрицы плотности атомной системы (8) для определения их временной эволюции вместо уравнения для матрицы плотности полной системы (7). Получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle J^-(t) \rangle &= -i w_{eg} \langle J^-(t) \rangle \\ &- \frac{1}{2} \{ \gamma_- + \gamma_+ + \omega_+ + \omega_- - (\gamma_- - \gamma_+) N \langle \sigma_1^z \rangle \} \langle J^-(t) \rangle, \end{aligned} \quad (12)$$

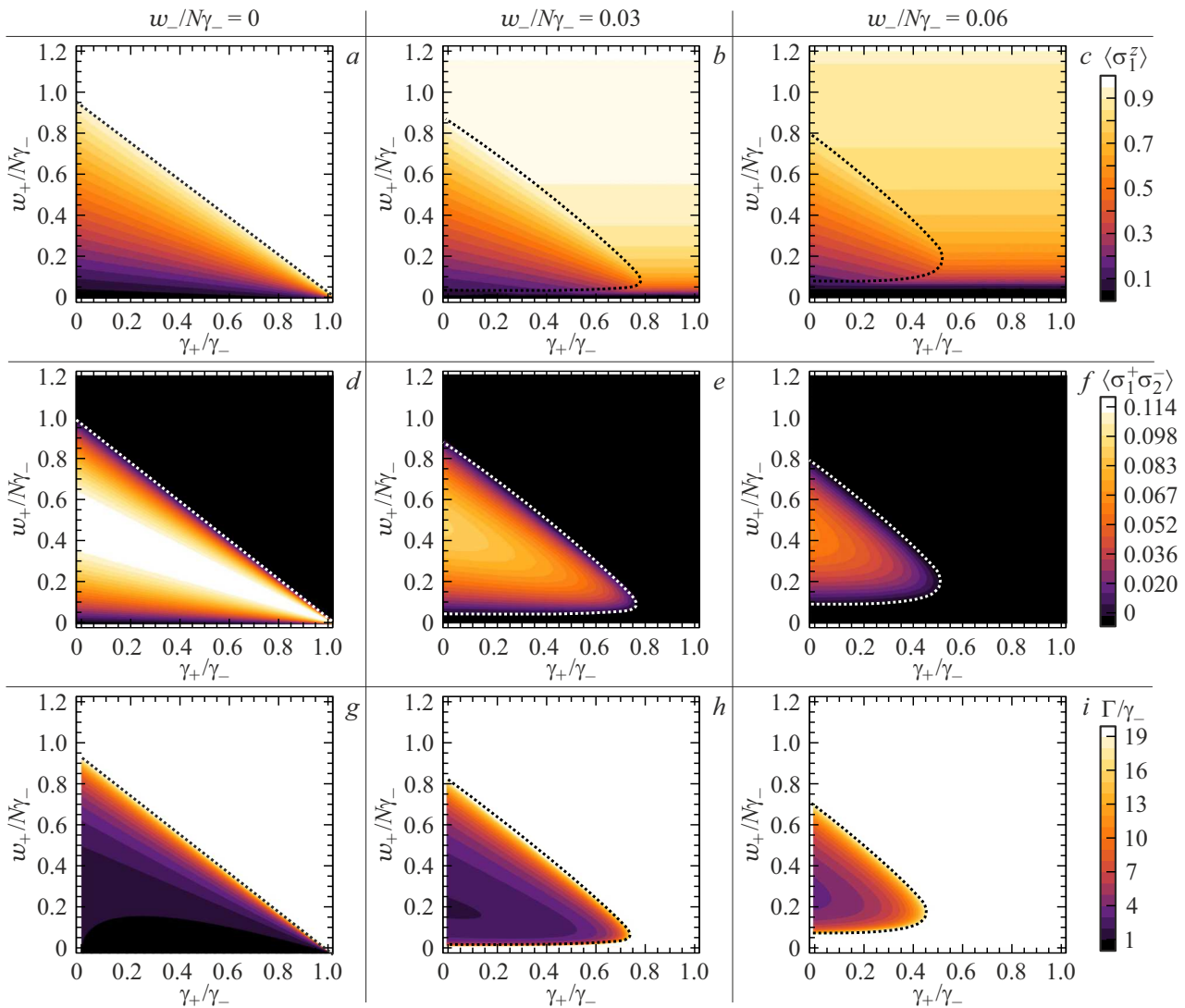
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle J^+(t) \rangle &= +i w_{eg} \langle J^+(t) \rangle \\ &- \frac{1}{2} \{ \gamma_- + \gamma_+ + \omega_+ + \omega_- - (\gamma_- - \gamma_+) N \langle \sigma_1^z \rangle \} \langle J^+(t) \rangle, \end{aligned} \quad (13)$$

решая которые, найдём:

$$\langle J^-(t) \rangle = \langle J^-(0) \rangle e^{-\frac{1}{2}\Gamma t} e^{-i w_{eg} t}, \quad (14)$$

$$\langle J^+(t) \rangle = \langle J^+(0) \rangle e^{-\frac{1}{2}\Gamma t} e^{+i w_{eg} t}, \quad (15)$$





**Рис. 5.** (a–c) Поляризация  $\langle \sigma_1^z \rangle$ ; (d–f) двухатомные корреляции  $\langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle$ ; (g–i) безразмерная ширина спектральной линии  $\Gamma/\gamma_-$  в зависимости от безразмерной скорости индивидуальной накачки  $w_{\pm}/N\gamma_-$ , нормированной на число атомов  $N$ , и безразмерной скорости  $\gamma_+/\gamma_-$ . Количество атомов  $N = 10^6$ .

где  $\Gamma = \gamma_- + \gamma_+ + \omega_+ + \omega_- - (\gamma_- - \gamma_+)N\langle \sigma_1^z \rangle$  является спектральной шириной линии излучения. Подставляя полученные временные зависимости для  $\langle J^+(t) \rangle$  и  $\langle J^-(t) \rangle$  в (11), получим неоднородное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{a}(t) \rangle + \frac{\kappa}{2} \langle \hat{a}(t) \rangle = -i(\Omega_+ \langle J^-(0) \rangle e^{-\frac{1}{2}\Gamma t} e^{-i\omega_{eg}t} + \Omega_- \langle J^+(0) \rangle e^{-\frac{1}{2}\Gamma t} e^{i\omega_{eg}t}), \quad (16)$$

из которого находим решение для  $\langle \hat{a}(t) \rangle$ :

$$\langle \hat{a}(t) \rangle = C(0)e^{-\frac{\kappa}{2}t} + i \left( \frac{\Omega_- \langle J^+(0) \rangle}{-i\omega_{eg} + (\Gamma - \kappa)/2} e^{i\omega_{eg}t} + \frac{\Omega_+ \langle J^-(0) \rangle}{i\omega_{eg} + (\Gamma - \kappa)/2} e^{-i\omega_{eg}t} \right) e^{-\Gamma t/2}, \quad (17)$$

где  $C(0) = 0$ , так как в начальный момент времени поле отсутствует.

Согласно квантовой теореме регрессии [14,17], для набора операторов  $\{Y_i\}$  открытой квантовой системы, средние значения которых описываются замкнутой линейной системой дифференциальных уравнений

$$\partial_t \langle Y_i(t) \rangle = \sum_j G_{ij}(t) \langle Y_j(t) \rangle,$$

где  $G_{ij}(t)$  — некоторые функции, связывающие эти средние между собой, двухвременную корреляционную функцию можно записать как

$$\partial_t \langle Y_i(t + \tau) Y_k(t) \rangle = \sum_j G_{ij}(\tau) \langle Y_j(t + \tau) Y_k(t) \rangle.$$

Таким образом, из (17) следует выражение для двухвременной корреляционной функции  $\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(0) \rangle$ :

$$\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(0) \rangle = \left( \frac{\Omega_-^2 \langle J^-(0)J^+(0) \rangle}{w_{eg}^2 + (\Gamma - \kappa)^2/4} e^{-i w_{eg} t} + \frac{\Omega_+^2 \langle J^+(0)J^-(0) \rangle}{w_{eg}^2 + (\Gamma - \kappa)^2/4} e^{i w_{eg} t} \right) e^{-\Gamma t/2}. \quad (18)$$

Спектр излучения получается простым взятием преобразования Фурье:

$$S(\omega) = \mathcal{F}[\langle \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(0) \rangle](\omega).$$

Видно, что наличие двух кооперативных переходов атомов  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$  и  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$  в правой части (7) приводит к наличию двух линий с лоренцевыми контурами. При этом спектральная ширина  $\Gamma$  для каждой из них будет одинаковой (при  $w_+ > w_-$  и  $N \gg 1$ ) и равна

$$\frac{\Gamma}{\gamma_-} \approx \left( \frac{1}{W_-(1-W_+)} + \frac{W_+}{1-W_+} - W_+ - \frac{1}{W_-} \right) \left( 1 - \frac{\gamma_+}{\gamma_-} \right) = \frac{W_+ + W_+W_-(W_- - W_+W_- - 1)}{(W_+ - 1)(W_- - 1)W_-} \left( 1 - \frac{\gamma_+}{\gamma_-} \right), \quad (19)$$

где для удобства записи ввели безразмерную величину

$$W_\pm := \frac{(w_+ \pm w_-)(w_+ + w_-)}{N(\gamma_- - \gamma_+)(w_+ - w_-)}.$$

На рис. 5,  $g-i$  представлена безразмерная ширина линии  $\Gamma/\gamma_-$  в зависимости от тех же параметров обобщенной модели, что и для проанализированных ранее средних поляризации и двухатомных корреляций. Видно, что, как и для обычного сверхизлучательного лазера, ширина спектральной линии в обобщенной модели сверхизлучательного рамановского лазера также оказывается сравнимой с  $\gamma_-$  в области, где существуют ненулевые двухатомные корреляции и выполняются граничные условия (10). Для удобства анализа обобщенной модели и наглядности на рис. 6 схематично показан вид получившегося спектра излучения, где с помощью  $S_+$  и  $S_-$  обозначены интенсивности лоренцевых пиков. При этом для их отношения имеем

$$\frac{S_+}{S_-} = \frac{\gamma_+}{\gamma_-} \frac{1}{1 - \frac{\langle J^+ J^- \rangle}{\langle J^+ \rangle \langle J^- \rangle}} \approx \frac{\gamma_+}{\gamma_-}. \quad (20)$$

Отметим, что интенсивности пиков не могут быть одинаковыми, поскольку граничные условия (10) не выполняются при  $\gamma_+ = \gamma_-$ .

#### 4. Влияние корреляций старших порядков

Оценим наличие межатомных корреляций старших порядков при стационарном режиме генерации сверхизлучательного лазера. Для простоты проанализируем упрощенную модель, описываемую уравнением (2),

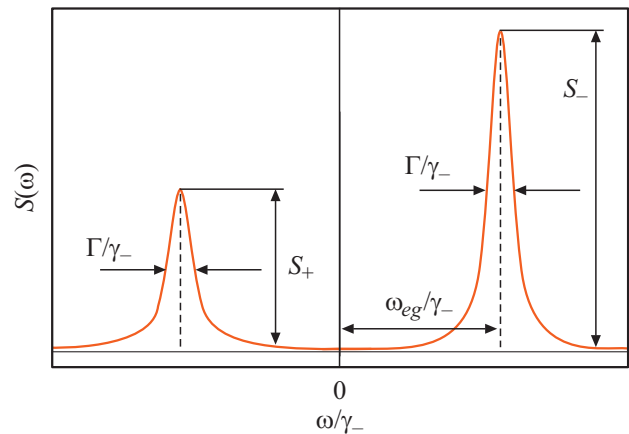


Рис. 6. Вид получившегося спектра излучения  $S(\omega)$  и его характеристики.

когда есть только кооперативный переход на переходе  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$  и индивидуальная накачка на переходе  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ . Запишем управляющее уравнение для редуцированной матрицы плотности подансамбля из  $n$  произвольно взятых атомов (нижний индекс „at“, использованный ранее для обозначения атомной системы, здесь и далее будем опускать):

$$\dot{\rho}_n = L_n(\rho_n) - \frac{1}{2} \gamma(N-n) \sum_{i=1}^n \left\{ \sigma_-^{(i)} \text{Tr}_{\{n+1\}}[\sigma_+^{(n+1)} \rho_{n+1}] + h.c. \right\}, \quad (21)$$

где  $\rho_n = \text{Tr}_{\{n+1, \dots, N\}}[\rho]$  — редуцированная матрица плотности для  $n$  частиц. В фигурных скобках указаны оставшиеся  $(N-n)$  частиц, по состояниям которых взят частичный след от матрицы плотности полного ансамбля из  $N$  частиц  $\rho$ . В правой части уравнения с помощью  $L_n$  обозначен супероператор, осуществляющий временное развитие  $\rho_n$  согласно (2). Кроме того, мы учли, что взаимодействие атомов с внутривибрационным полем является одинаковым и ансамбль оказывается симметричным относительно перестановки двух любых его частиц. В частности, это позволяет описать взаимодействия рассматриваемого подансамбля с оставшимися  $(N-n)$  атомами с помощью редуцированной матрицы плотности  $\rho_{n+1}$ , описывающей состояние  $n$  частиц подансамбля и одной из  $(N-n)$  оставшихся.

Видно, что уравнение (21) оказывается незамкнутым, так как в его правую часть входит редуцированная матрица плотности  $\rho_{n+1}$ , описывающая состояние  $(n+1)$  частицы. Чтобы убрать из системы корреляции  $(n+1)$ -го порядка и выразить  $\rho_{n+1}$  через  $\rho_n$ , используем разложение по кумулянтам. Удобство использования кумулянтов для описания корреляций между частями составной системы заключается в том, что в отличие от моментов ненулевой кумулянт  $n$ -го порядка показывает наличие корреляций сразу между  $n$  частями, т.е. в него не входят



корреляции младших порядков между меньшим числом частей.

Хорошо известно, что моменты являются коэффициентами разложения в ряд характеристической функции, тогда как кумулянты – коэффициенты разложения её логарифма [18]. Между кумулянтами и моментами существует определенная связь [19]. Так, например, для кумулянтов и моментов с 1-го по 3-й порядок будет выполняться:

$$\begin{aligned} \langle\langle \sigma_1^{\alpha_1} \rangle\rangle &= \langle \sigma_1^{\alpha_1} \rangle, \\ \langle\langle \sigma_1^{\alpha_1} \sigma_2^{\alpha_2} \rangle\rangle &= \langle \sigma_1^{\alpha_1} \sigma_2^{\alpha_2} \rangle - \langle \sigma_1^{\alpha_1} \rangle \langle \sigma_2^{\alpha_2} \rangle, \\ \langle\langle \sigma_1^{\alpha_1} \sigma_2^{\alpha_2} \sigma_3^{\alpha_3} \rangle\rangle &= \langle \sigma_1^{\alpha_1} \sigma_2^{\alpha_2} \sigma_3^{\alpha_3} \rangle - \langle \sigma_1^{\alpha_1} \sigma_2^{\alpha_2} \rangle \langle \sigma_3^{\alpha_3} \rangle \\ &\quad - \langle \sigma_1^{\alpha_1} \sigma_3^{\alpha_3} \rangle \langle \sigma_2^{\alpha_2} \rangle - \langle \sigma_2^{\alpha_2} \sigma_3^{\alpha_3} \rangle \langle \sigma_1^{\alpha_1} \rangle \\ &\quad + 2 \langle \sigma_1^{\alpha_1} \rangle \langle \sigma_2^{\alpha_2} \rangle \langle \sigma_3^{\alpha_3} \rangle. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь  $\sigma_i^{\alpha_i}$  — оператор, действующий на состояние  $i$ -го атома, верхний индекс  $\alpha_i$ , как и раньше, задаёт конкретный вид оператора (например, „z“, „+“, „-“), двойными угловыми скобками обозначены кумулянты, а одинарными — моменты. Общее выражение, связывающее кумулянты и моменты произвольного порядка, может быть записано следующим образом:

$$\langle\langle \bigotimes_{i \in \mathbb{A}} \sigma_i^{\alpha_i} \rangle\rangle = \sum_{\pi \in \pi_{\mathbb{A}}} (|\pi| - 1)! (-1)^{|\pi| - 1} \prod_{\mathbb{B} \in \pi} \langle \bigotimes_{i \in \mathbb{B}} \sigma_i^{\alpha_i} \rangle, \quad (23)$$

где  $\mathbb{A}$  — некоторый набор номеров частиц, являющийся подмножеством полного набора частиц  $\{1, \dots, N\}$ , т.е.  $\mathbb{A} \subseteq \{1, \dots, N\}$ . С помощью  $|\pi|$  обозначено число элементов набора  $\pi$ , а  $\pi_{\mathbb{A}}$  является множеством всех возможных разбиений множества  $\mathbb{A}$ . Например, для  $\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$  набор  $\pi_{\mathbb{A}}$  состоит из следующих разбиений  $\{1, 2, 3\}$ :  $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$ ,  $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$ ,  $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$ ,  $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ .

В квантовой механике моменты могут быть получены не только через характеристическую функцию, но и напрямую, путём взятия следа от произведения соответствующих операторов и матрицы плотности, описывающей состояние системы, т.е.  $\langle \bigotimes_{i \in \mathbb{A}} A_i^{\alpha_i} \rangle = \text{Tr}_{\mathbb{A}} [\rho_{\mathbb{A}} \bigotimes_{i \in \mathbb{A}} A_i^{\alpha_i}]$ . В работе [24] была введена матрица плотности  $\tau_{\mathbb{A}}$  для кумулянтов, которая позволяет получить любой кумулянт  $\langle\langle \bigotimes_{i \in \mathbb{A}} A_i^{\alpha_i} \rangle\rangle$  аналогичным образом:

$$\langle\langle \bigotimes_{i \in \mathbb{A}} A_i^{\alpha_i} \rangle\rangle = \text{Tr}_{\mathbb{A}} \left[ \tau_{\mathbb{A}} \bigotimes_{i \in \mathbb{A}} A_i^{\alpha_i} \right]. \quad (24)$$

Кроме того, в той же работе было показано, что между матрицей плотности для кумулянтов и обычной матрицей плотности существует связь, аналогичная (23):

$$\tau_{\mathbb{A}} := \sum_{\pi \in \pi_{\mathbb{A}}} (|\pi| - 1)! (-1)^{|\pi| - 1} \bigotimes_{\mathbb{B} \in \pi} \rho_{\mathbb{B}}. \quad (25)$$

Так, например, матрицы плотности для кумулянтов и обычные матрицы плотности для подансамбля из частиц  $\{1, 2, 3\}$  будут связаны аналогично (22):

$$\begin{aligned} \tau_{\{1\}} &= \rho_{\{1\}}, \\ \tau_{\{1,2\}} &= \rho_{\{1,2\}} - \rho_{\{1\}} \otimes \rho_{\{2\}}, \\ \tau_{\{1,2,3\}} &= \rho_{\{1,2,3\}} - \rho_{\{1,2\}} \otimes \rho_{\{3\}} \\ &\quad - \rho_{\{1,3\}} \otimes \rho_{\{2\}} - \rho_{\{1\}} \otimes \rho_{\{2,3\}} + 2\rho_{\{1\}} \otimes \rho_{\{2\}} \otimes \rho_{\{3\}}. \end{aligned}$$

Данную связь можно записать и в обратную сторону, выразив матрицы плотности через матрицы плотности для кумулянтов:

$$\rho_{\mathbb{A}} = \sum_{\pi \in \pi_{\mathbb{A}}} \bigotimes_{\mathbb{B} \in \pi} \tau_{\mathbb{B}}, \quad (26)$$

откуда для подансамбля из частиц  $\{1, 2, 3\}$  следует:

$$\begin{aligned} \rho_{\{1\}} &= \tau_{\{1\}}, \\ \rho_{\{1,2\}} &= \tau_{\{1,2\}} + \tau_{\{1\}} \otimes \tau_{\{2\}}, \\ \rho_{\{1,2,3\}} &= \tau_{\{1,2,3\}} + \tau_{\{1,2\}} \otimes \tau_{\{3\}} + \tau_{\{1,3\}} \otimes \tau_{\{2\}} \\ &\quad + \tau_{\{1\}} \otimes \tau_{\{2,3\}} + \tau_{\{1\}} \otimes \tau_{\{2\}} \otimes \tau_{\{3\}}. \end{aligned} \quad (27)$$

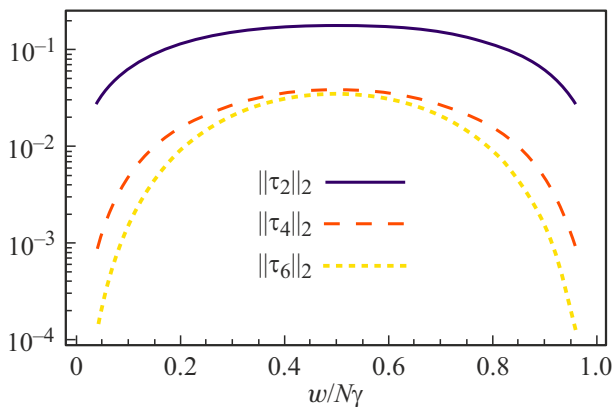
Вернемся к управляющему уравнению для подансамбля из  $n$  частиц (21). Используя связь между обычными матрицами плотности и матрицами плотности для кумулянтов, запишем усеченную матрицу плотности  $\rho_{n+1}^{\text{trunc}}$  для  $(n + 1)$  частицы:  $\rho_{n+1}^{\text{trunc}} = \rho_{n+1} - \tau_{n+1}$ . Мы вычли матрицу плотности для кумулянтов  $\tau_{n+1}$  из  $\rho_{n+1}$ , тем самым убрав информацию о корреляциях  $(n + 1)$ -го порядка между  $(n + 1)$  частицей из  $\rho_{n+1}$ . Это позволяет выразить  $\rho_{n+1}^{\text{trunc}}$  как функцию  $\rho_n$ . Покажем это на примере подансамбля из трёх частиц  $\{1, 2, 3\}$ :

$$\begin{aligned} \rho_{\{1,2,3\}}^{\text{trunc}} &= \tau_{\{1,2\}} \otimes \tau_{\{3\}} + \tau_{\{1,3\}} \otimes \tau_{\{2\}} + \tau_{\{1\}} \otimes \tau_{\{2,3\}} \\ &\quad + \tau_{\{1\}} \otimes \tau_{\{2\}} \otimes \tau_{\{3\}} = \rho_{\{1,2\}} \otimes \rho_{\{3\}} + \rho_{\{1,3\}} \otimes \rho_{\{2\}} \\ &\quad + \rho_{\{1\}} \otimes \rho_{\{2,3\}} - 2\rho_{\{1\}} \otimes \rho_{\{2\}} \otimes \rho_{\{3\}}, \end{aligned} \quad (28)$$

где мы использовали (27). Видно, что в получившемся выражении правая часть зависит теперь от матриц плотности младшего порядка, т.е. меньшего числа частиц. Таким образом, в (21), действуя аналогичным образом, мы можем заменить  $\rho_{(n+1)}$  на  $\rho_{(n+1)}^{\text{trunc}}$ , которая будет являться нелинейной функцией от  $\rho_n$ , т.е.  $\rho_{(n+1)}^{\text{trunc}} = f(\rho_n)$ . Это позволяет замкнуть управляющее уравнение для матрицы плотности подансамбля из  $n$  частиц:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_n &= L_n(\rho_n) \\ &\quad - \frac{1}{2} \gamma (N - n) \sum_{i=1}^n \left\{ \sigma_-^{(i)} \text{Tr}_{\{n+1\}} [\sigma_+^{(n+1)} f(\rho_n)] + h.c. \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Полученное уравнение содержит информацию о корреляциях в системе вплоть до  $n$ -го порядка. Его стационарное решение позволяет определить матрицы плотности



**Рис. 7.** Норма Фробениуса матрицы плотности для кумулянтов  $\tau_n$  в зависимости от безразмерной скорости накачки  $w/N\gamma$ . Количество атомов  $N = 10^6$ .

для кумулянтов  $\tau_n$  также вплоть до  $n$ -го порядка. При этом наличие ненулевой нормы Фробениуса у  $\tau_n$  будет говорить о наличии корреляций  $n$ -го порядка в системе, т.е. коррелированности сразу между  $n$  частицами.

На рис. 7 представлена зависимость нормы Фробениуса матрицы плотности для кумулянтов  $\tau_n$  от безразмерной скорости накачки  $w/N\gamma$  для  $n \in \{2, 4, 6\}$ , построенная в логарифмическом масштабе. Видно, что для двухатомных корреляций  $n = 2$  (сплошная линия) эта зависимость совпадает с зависимостью для  $\langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle$ , приведенной на рис. 2. При этом значения для корреляций между 4 частицами при  $n = 4$  (штриховая линия) и 6 частицами при  $n = 6$  (пунктирная линия) оказываются существенно меньше, чем для  $n = 2$  при любых значениях  $w/N\gamma$ . Отметим, что в  $\tau_2$  входят не только двухатомные корреляции вида  $\langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle$ , однако именно они вносят наибольший вклад в норму Фробениуса. Корреляции нечетных порядков в стационарном режиме при  $N \gg 1$  в системе отсутствуют, что вызвано наличием перестановочной симметрии. Таким образом, наибольший вклад в рассматриваемые нами эффекты при стационарном режиме генерации вносят именно двухатомные корреляции. Это будет выполняться и для обобщенной модели сверхизлучательного лазера, матрица плотности атомной системы которого подчиняется (8).

## 5. Заключение

Мы рассмотрели обобщенную модель сверхизлучательного рамановского лазера, в которой учли конкурирующие кооперативные и индивидуальные процессы, возникающие в атомах со сложной многоуровневой энергетической структурой при их взаимодействии с внешними световыми полями. Используя метод проекторов, нам удалось адиабатически исключить быстро затухающую моду резонатора и записать управляющее уравнение для матрицы плотности, описывающей только состояние атомного ансамбля. С его помощью

мы нашли стационарные решения для средней поляризации (инверсии населенностей)  $\langle \sigma_1^z \rangle$  и двухатомных корреляций  $\langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle$  и, проанализировав их, показали, при каких значениях параметров задачи возможно кооперативное излучение атомов ансамбля. Затем, вернувшись к уравнению для матрицы плотности полной системы, с помощью квантовой теоремы регрессии мы вычислили двухвременную корреляционную функцию  $\langle \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}(0) \rangle$ , взяв преобразование Фурье которой, нашли спектр излучения  $S(\omega)$ . Как мы увидели, в спектре излучения присутствуют две узкие спектральные линии с лоренцовыми контурами, каждая из которых связана со своим кооперативным процессом. При этом ширина этих полос оказалась сравнимой с эффективной скоростью распада одного атома  $\gamma_-$ . Мы также оценили наличие межатомных корреляций старших порядков, рассчитав норму Фробениуса матрицы плотности для кумулянтов, и показали, что наибольший вклад в стационарную генерацию света вносят двухатомные корреляции.

Отметим, что рассмотренная модель может быть использована не только для исследования свойств сверхизлучательного лазера, но также и для изучения спинполяризованных ансамблей щелочных атомов с большой оптической плотностью, которые непрерывно накачиваются и зондируются внешними полями [21,22]. Такие системы интересны для многочисленных приложений в квантовой метрологии и квантовой обработке информации. Как и в случае, когда атомы находятся внутри резонатора, большая оптическая плотность в направлении оптической оси создаст в среде выделенное направление, вдоль которого, благодаря эффекту Парселла, будет происходить кооперативное излучение ансамбля. Это позволяет ввести „виртуальный“ резонатор и рассматривать такой ансамбль атомов так же, как и сверхизлучательный лазер, т.е. пользоваться теми же методами, которые были рассмотрены в настоящей работе. При этом полученные нами результаты будут полезны при описании возникающих кооперативных эффектов.

## Благодарности

Мы благодарны Клемену Хаммереру за плодотворные дискуссии.

## Финансирование работы

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 21-72-00049).

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] F. Haake, M.I. Kolobov, C. Fabre, E. Giacobino, S. Reynaud. Phys. Rev. Lett., **71**, 995 (1993). DOI: 10.1103/PhysRevLett.71.995
- [2] R.H. Dicke. Phys. Rev., **93**, 99 (1954). DOI: 10.1103/PhysRev.93.99
- [3] J.G. Bohnet, Z. Chen, J.M. Weiner, K.C. Cox, D. Meiser, M.J. Holland, J.K. Thompson. EPJ Web of Conferences, **57**, 03003 (2013). DOI: 10.1103/PhysRev.93.99
- [4] D. Meiser, Jun Ye, D.R. Carlson, M.J. Holland. Phys. Rev. Lett., **102**, 163601 (2009). DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.163601
- [5] B.C. Young, F.C. Cruz, W.M. Itano, J.C. Bergquist. Phys. Rev. Lett., **82**, 3799 (1999). DOI: 10.1103/PhysRevLett.82.3799
- [6] S.A. Webster, M. Oxborrow, P. Gill. Phys. Rev. A, **75**, 011801(R) (2007). DOI: 10.1103/PhysRevA.75.011801
- [7] J.A. Muniz, J.R.K. Cline, M.A. Norcia, J.K. Thompson. In: *Proc. SPIE 10934, Optical, Opto-Atomic, and Entanglement-Enhanced Precision Metrology*, v. 109342B (SPIE Digital Library, 2019). DOI 10.1117/12.2515582
- [8] J.G. Bohnet, Z. Chen, J.M. Weiner, D. Meiser, M.J. Holland, J.K. Thompson. Nature **484**, 78781 (2012). DOI 10.1038/nature10920
- [9] J.M. Weiner, K.C. Cox, J.G. Bohnet, J.K. Thompson. Phys. Rev. A, **95**, 033808 (2017). DOI: 10.1103/PhysRevA.95.033808
- [10] J.M. Weiner, K.C. Cox, J.G. Bohnet, Z. Chen, J.K. Thompson. Appl. Phys. Lett., **101**, 261107 (2012). DOI: 10.1063/1.4773241
- [11] G.S. Agarwal. Phys. Rev. A, **83**, 023802 (2011). DOI: 10.1103/PhysRevA.83.023802
- [12] D. Meiser, M.J. Holland. Phys. Rev. A, **81**, 063827 (2010). DOI: 10.1103/PhysRevA.81.063827
- [13] F. Haake, M.I. Kolobov, C. Seeger, C. Fabre, E. Giacobino, S. Reynaud. Phys. Rev. A, **54**, 1625 (1996). DOI: 10.1103/PhysRevA.54.1625
- [14] C.W. Gardiner, P. Zoller. *Quantum noise: a handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics*, 3rd ed. (Springer Berlin, Heidelberg, 2004).
- [15] M. Xu, D.A. Tieri, E.C. Fine, J.K. Thompson, M.J. Holland. Phys. Rev. Lett., **113**, 154101 (2014). DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.154101
- [16] А.П. Казанцев, Г.И. Сурдугевич, В.П. Яковлев. *Механическое действие света на атомы* (Наука, Москва, 1991). [A.P. Kazantsev, G.I. Surdutovich, V.P. Yakovlev. *Mechanical Action of Light on Atoms* (World Scientific Publishing, Singapore, 1990). DOI: 10.1142/0585].
- [17] A.A. Budini, J. Stat. Phys., **131**, 51 (2008). DOI: 10.1007/s10955-007-9476-9
- [18] A.S. Chirkin, O.V. Belyaeva, A.V. Belinsky. J. Exp. Theor. Phys., **116** (1), 39 (2013). DOI 10.1134/S1063776113010202
- [19] А.Н. Малахов. *Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований* (Советское радио, Москва, 1978).
- [20] A. Roth. *Collective effects and superradiance in atomic ensembles*. PhD Thesis (Leibniz University Hannover, Hannover, 2018). DOI: 10.15488/3856
- [21] A.S. Parkins, E. Solano, J.I. Cirac. Phys. Rev. Lett., **96**, 053602 (2006). DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.053602
- [22] C.A. Muschik, E.S. Polzik, J.I. Cirac. Phys. Rev. A, **83**, 052312 (2011). DOI: 10.1103/PhysRevA.83.052312