

09

Излучение движущегося сгустка частиц с переменной величиной заряда

© А.В. Тюхтин, С. Фань

Санкт-Петербургский государственный университет,
199034 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: a.tyuhitin@spbu.ru

Поступило в Редакцию 17 марта 2022 г.

В окончательной редакции 26 мая 2022 г.

Принято к публикации 28 мая 2022 г.

Исследовано электромагнитное излучение сгустка заряженных частиц малого размера, движущегося с постоянной скоростью и обладающего зарядом переменной величины. Окружающая среда считается изотропной и однородной, причем она может иметь частотную дисперсию, но не обладает пространственной дисперсией. Получено общее решение задачи. Основное внимание уделено случаю, когда величина заряда, начиная с некоторого момента, экспоненциально уменьшается с течением времени. Методом перевала получены приближенные выражения для компонент поля, справедливые в волновой зоне. Исследованы энергетические характеристики возбуждаемой сферической волны и проведено их сравнение со случаем тормозящегося заряда. В случае возбуждения излучения Вавилова–Черенкова получены асимптотики, корректно описывающие компоненты поля во всей волновой зоне, включая область, в которой разбиение поля на сферическую и цилиндрическую волны невозможно.

Ключевые слова: пучок заряженных частиц, сферическая волна, цилиндрическая волна, излучение Вавилова–Черенкова.

DOI: 10.21883/JTF.2022.09.52934.55-22

Введение

Проблемам электромагнитного излучения заряженных частиц и их пучков (сгустков) в материальных средах посвящено огромное количество трудов, среди которых можно назвать монографии [1–5], обзоры [6,7] и учебные пособия [8]. Обычно в таких задачах предполагается, что число частиц в пучке не меняется в процессе его движения. Исключения составляют задачи об излучении в диэлектрических волноведущих структурах, когда пучок движется в вакуумном канале в среде: в такой ситуации зачастую учитывается динамика пучка, связанная с воздействием излучения частиц пучка на них самих [9].

Однако если пучок движется непосредственно сквозь среду, то его частицы взаимодействуют с частицами среды, что ведет к тем или иным изменениям в пучке. В более или менее плотных средах это взаимодействие является основным механизмом, определяющим эволюцию пучка. Различные варианты этой эволюции описывались во множестве монографий и статей (см. [10–14] и приведенную там литературу). В зависимости от массы частиц, их энергии и плотности среды возможно как быстрое отклонение частиц от прямолинейной траектории, приводящее к рассеиванию пучка, так и почти равномерное движение относительно стабильного пучка на большей части траектории с последующим торможением большинства его частиц на относительно коротком ее отрезке. Последний вариант характерен для пучков протонов и ионов, тормозящихся в основном в области известного „пика Брэгга“ [10–12]. Из-

за такой особенности пучки тяжелых частиц нашли широкое применение в медицине (протонная и ионная терапия [10–13]).

В процессе движения пучка в среде число частиц в нем меняется. Как правило, оно уменьшается: частицы пучка тормозятся, фактически превращаясь из движущихся в неподвижные. Представляет существенный интерес исследование излучения такого пучка как целого. Оно будет генерироваться на длинах волн, превышающих размеры самого пучка (для реальных пучков обычно речь идет о длинах волн примерно от миллиметра и более). Разумеется, это излучение можно рассматривать как тормозное излучение отдельных частиц пучка. Однако с точки зрения макроскопической электродинамики, представляется более естественным с самого начала рассматривать пучок как целое, задавая тот или иной закон его эволюции.

Настоящая работа посвящена исследованию излучения такого сгустка заряженных частиц с переменным зарядом. Основное внимание будет уделено случаю, когда до некоторого момента времени заряд сгустка был постоянным, а затем происходит его экспоненциальное уменьшение. При этом для упрощения анализа окружающая среда будет считаться однородной и неограниченной. Такая модель выглядит естественной для пучка тяжелых частиц, так как после влета в среду он довольно долго движется почти без изменений (область пика Брэгга достаточно далека от границы среды). Для пучка электронов, которые быстро теряют энергию после влета в среду, такая модель может быть реализована, если

пучок сначала движется в вакуумном канале в среде, а в его конце влетает в среду. Если диаметр канала мал по сравнению с рассматриваемыми длинами волн, то канал не будет оказывать существенного влияния на излучение [7] (по отношению к таким волнам среду можно считать однородной всюду).

Описанная модельная задача позволяет анализировать эффекты, связанные с изменением заряда пучка, а также эффект Вавилова–Черенкова. При этом мы отвлекаемся от переходного излучения, возникающего на границе раздела сред. Поэтому мы можем анализировать излучение, связанное с изменением заряда пучка, в его „чистом“ виде: это излучение является единственным, если скорость пучка меньше скорости волн в среде (т.е. отсутствует излучение Вавилова–Черенкова). Однако изначально мы не будем исключать возможность генерации черенковского излучения, а затем рассмотрим два режима движения заряда — без этого излучения и с ним.

1. Общее решение задачи

Мы будем анализировать излучение с длинами волн, существенно превышающими размер сгустка частиц. При этом его можно рассматривать как точечный заряд, величина которого q зависит от времени. Скорость движения заряда \mathbf{v} будем считать постоянной. Для того чтобы удовлетворялось уравнение непрерывности $\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, надо ввести еще один „дополнительный“ неподвижный источник с плотностью заряда ρ_1 , который представляет собой „след“ неподвижного заряда. Совмещая ось z с линией движения сгустка, суммарные плотности заряда ρ_Σ и тока \mathbf{j}_Σ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho_\Sigma &= \rho + \rho_1, \\ \rho &= q(t)\delta(x, y, z - vt), \\ \rho_1 &= -\left. \frac{dq(t')}{v dt'} \right|_{t'=z/v} \delta(x, y)\Theta(vt - z) \\ &= -\frac{dq(z/v)}{dz} \delta(x, y)\Theta(vt - z), \\ \mathbf{j}_\Sigma &= \mathbf{j} = v\rho \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (1)$$

Подстановкой данных выражений в уравнение непрерывности можно легко убедиться, что оно превращается в тождество.

Физически образование „следа“ означает, что частицы пучка останавливаются из-за взаимодействия с частицами среды, т.е. из движущихся превращаются в неподвижные (вследствие этого $\mathbf{j}_1 = 0$). При этом с точки зрения макроскопической электродинамики не имеет значения детальное описание данного процесса. Например, это может быть рекомбинация электронов пучка с ионами окружающей плазмы, остановка частиц за счет столкновений с нейтральными молекулами и т.д. Важен лишь сам факт образования в пространстве

нитевидного заряда, „дополнительного“ по отношению к тем зарядам, которые существовали в среде ранее (если они были).

Окружающую среду будем считать линейной, однородной, стационарной, изотропной и не имеющей существенной пространственной дисперсии (однако она может обладать частотной (временной) дисперсией). Напомним некоторые свойства таких сред. Подобная среда характеризуется зависящими от частоты ω диэлектрической (ε) и магнитной (μ) проницаемостями, а ее показатель преломления равен $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$, причем мы будем считать, что $\operatorname{Im}n > 0$. Положим, что в диапазоне распространяющихся волн вещественные части обеих проницаемостей положительны: $\varepsilon' > 0$, $\mu' > 0$ (тем самым мы исключаем из рассмотрения так называемые „левые“ среды, для которых эти величины отрицательны). Также мы будем считать среды „пассивными“, т.е. не способными генерировать электромагнитную энергию. В таких средах знаки мнимых частей проницаемостей ε'' , μ'' совпадают со знаком частоты, и соответственно $\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}n^2) = \operatorname{sgn}(\varepsilon''\mu'' + \varepsilon'\mu') = \operatorname{sgn}\omega$. В случае относительно небольшого поглощения (а нам интересна именно такая ситуация) имеем $\operatorname{Re}n^2 = \varepsilon'\mu' - \varepsilon''\mu'' \approx \varepsilon'\mu' > 0$. Учитывая наложенное условие $\operatorname{Im}n > 0$, мы видим, что величина n находится либо в первом, либо во втором квадрантах комплексной плоскости в зависимости от знака частоты, т.е. $\operatorname{sgn}(\operatorname{Re}n) = \operatorname{sgn}\omega$. В конечном итоге нас будет в основном интересовать случай пренебрежимо малого поглощения, когда ε'' , $\mu'' \rightarrow +0 \cdot \operatorname{sgn}\omega$, $n \rightarrow \operatorname{Re}n$, $\operatorname{sgn}n = \operatorname{sgn}\omega$.

При решении задачи будут применяться временные преобразования Фурье в виде

$$F_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{i\omega t} dt, \quad F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_\omega e^{i\omega t} dt. \quad (2)$$

Так как для вещественных функций на вещественной оси частот справедливо соотношение $F_{-\omega} = F_\omega^*$ (звездочка означает комплексное сопряжение), то далее мы будем рассматривать только положительные частоты $\omega > 0$. Соответствующие пространственные преобразования Фурье имеют вид

$$\begin{aligned} F_{\omega, \mathbf{k}} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} F_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3r, \\ F_\omega(\mathbf{r}) &= \int_{\mathbb{R}^3} F_{\omega, \mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k. \end{aligned} \quad (3)$$

Воспользуемся векторным \mathbf{A} и скалярным Φ потенциалами, через которые компоненты поля выражаются по формулам $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi$, $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ (используется гауссова система единиц). При наложении калибровки Лоренца временные фурье-образы потенциалов подчиняются уравнению Гельмгольца:

$$(\Delta + k^2) \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_\omega \\ \Phi_\omega \end{Bmatrix} = -4\pi \begin{Bmatrix} c^{-1} \mu \mathbf{j}_\omega \\ \varepsilon^{-1} \rho_{\Sigma\omega} \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

где $k = \omega n/c$.

Будем решать уравнение (4) методом Фурье. Для пространственно-временных фурье-образов плотностей заряда и тока имеем

$$\rho_{\Sigma\omega, \mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{v k_z}{\omega + i0} q\Omega, \quad \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^3} v q\Omega \mathbf{e}_z, \quad (5)$$

где $q\Omega = \frac{1}{2\pi} \int q(t) e^{i\Omega t} dt$, $\Omega = \omega - v k_z$. Отметим, что слагаемое „+i0“ в знаменателе обеспечивает нужный обход полюса, что дает выражение (1) для ρ_{Σ} . Записывая потенциалы \mathbf{A}_{ω} , Φ_{ω} в виде обратных интегралов Фурье, подставляя их в уравнения (4) и приравнивая подынтегральные выражения, получим четырехкратные фурье-образы потенциалов. После перехода к цилиндрической системе координат как в физическом пространстве (r, φ, z) , так и в пространстве волновых векторов (k_r, φ_k, k_z) , для временных фурье-образов потенциалов получаем

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{A}_{\omega} \\ \Phi_{\omega} \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_0^{\infty} dk_r \int_0^{2\pi} d\varphi_k \left\{ \begin{matrix} \mu\beta \\ \frac{k_z v}{(\omega + i0)\varepsilon} \end{matrix} \right\} \\ &\times \frac{k_r q\Omega \exp(ik_z z + ik_r r \cos(\varphi_k - \varphi))}{k_r^2 + k_z^2 - k^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Интеграл по φ_k равен [15]:

$$\int_0^{2\pi} \exp(ik_r r \cos(\varphi_k - \varphi)) d\varphi_k = 2\pi J_0(k_r r),$$

где $J_0(\xi)$ — функция Бесселя. Для интегрирования по k_r сначала нужно свести интеграл по полубесконечному контуру к интегралу по бесконечному контуру:

$$\int_0^{\infty} \frac{k_r J_0(k_r r)}{k_r^2 + k_z^2 - k^2} dk_r = \frac{1}{2} \int_{e^{i\pi}}^{\infty} \frac{k_r H_0^{(1)}(k_r r)}{k_r^2 - \kappa^2} dk_r, \quad (7)$$

где $H_0^{(1)}(\xi)$ — функция Ханкеля, а

$$\begin{aligned} \kappa &= \sqrt{k^2 - k_z^2} \\ &= \sqrt{\omega^2 c^{-2} (\varepsilon' \mu' - \varepsilon'' \mu'') - k_z^2 + i\omega^2 c^{-2} (\varepsilon' \mu'' + \varepsilon'' \mu')}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для дальнейшего удобно определить радикал (8) правилом $\text{Im}\kappa > 0$. Учитывая, что в диапазоне распространяющихся волн $\varepsilon' > 0$, $\mu' > 0$, $\varepsilon' \mu' - \varepsilon'' \mu'' > 0$, а $\text{sgn}\varepsilon'' = \text{sgn}\mu'' = \text{sgn}\omega$, мы видим, что величина под радикалом в (8) располагается в первом (при $\omega > 0$) или четвертом (при $\omega < 0$) квадрантах комплексной плоскости. Поэтому требование $\text{Im}\kappa > 0$ приводит к тому, что $\text{sgn Re}\kappa = \text{sgn}\omega$. Данное правило определяет знак κ и в предельном случае непоглощающей среды.

Так как $r > 0$, контур интегрирования в (7) можно дополнить до замкнутого полуокружностью бесконечного

радиуса, расположенной в области $\text{Im}\kappa > 0$. После этого интеграл (7) легко вычисляется путем расчета вычета в единственном полюсе $k_r = \kappa$. В результате получаем следующие выражения для фурье-образов потенциалов:

$$\left\{ \begin{matrix} \mathbf{A}_{\omega} \\ \Phi_{\omega} \end{matrix} \right\} = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} \mu\beta \\ \frac{k_z v}{(\omega + i0)\varepsilon} \end{matrix} \right\} q\Omega H_0^{(1)}(\kappa r) e^{ik_z z} dk_z. \quad (9)$$

Вычисляя фурье-образы компонент поля, находим

$$\begin{aligned} E_{r\omega} &= \frac{iv}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} q\Omega \frac{k_z \kappa}{(\omega + i0)\varepsilon} H_1^{(1)}(\kappa r) e^{ik_z z} dk_z, \\ E_{z\omega} &= \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^{+\infty} q\Omega \frac{v c k_z^2 - \omega^2 n^2 \beta}{(\omega + i0)\varepsilon} H_0^{(1)}(\kappa r) e^{ik_z z} dk_z, \\ H_{\varphi\omega} &= \frac{i\beta}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} q\Omega \kappa H_1^{(1)}(\kappa r) e^{ik_z z} dk_z. \end{aligned} \quad (10)$$

Отметим, что точка ветвления $k_z = k$ функции $\kappa(k_z) = \sqrt{k^2 - k_z^2}$ лежит выше контура интегрирования, а $k_z = -k$ — ниже. Подчеркнем, что полученные выражения представляют собой компоненты полного поля, т.е. поля источника, состоящего из движущегося переменного заряда и его нитевидного „следа“.

2. Асимптотический расчет компонент поля

Будем считать, что при отрицательных временах заряд сгустка был постоянным ($q = q_0$), а начиная с момента $t = 0$ происходит его уменьшение. Процесс „таяния“ заряда может происходить по разным законам. Мы предположим, что за любой малый промежуток времени сгусток теряет одинаковую долю заряда, т.е. $dq/dt = q/\tau$, где $\tau = \text{const}$. Решение этого уравнения дает

$$q(t) = \begin{cases} q_0, & t < 0 \\ q_0 e^{-t/\tau}, & t \geq 0 \end{cases} = q_0 [\Theta(-t) + \Theta(t) e^{-t/\tau}], \quad (11)$$

где $\Theta(\xi)$ — единичная функция Хэвисайда. Экспериментальные данные показывают, что экспоненциальный закон убывания величины заряда близок к тому, который имеет место, в частности, для пучков протонов и ионов [10,11]. Фурье-образ функции (11) равен

$$q\Omega = q_0 \left(\delta(\Omega) - \frac{i}{2\pi(\Omega + i0)} + \frac{1}{2\pi} \frac{\tau}{1 - i\Omega\tau} \right). \quad (12)$$

Проведем расчет интеграла на примере компонент E_r . Подставляя (12) в (10), для фурье-образа $E_{r\omega}$ получаем

$$E_{r\omega} = \frac{i q_0 s}{2v \varepsilon} H_1^{(1)}(sr) e^{i\omega z/v} + \frac{iv q_0}{2(\omega + i0)\varepsilon} I, \quad (13)$$

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k_z \kappa \left(\frac{\tau}{1 - i\Omega\tau} - \frac{i}{\Omega + i0} \right) H_1^{(1)}(\kappa r) e^{ik_z z} dk_z, \tag{14}$$

где $\Omega = \omega - \nu k_z$, $s = \sqrt{\omega^2 \nu^{-2} (n^2 \beta^2 - 1)}$ ($\text{Im}s > 0$). Для анализа интеграла (14) целесообразно ввести новую переменную интегрирования χ : $k_z = k \cos \chi$, $\kappa = k \sin \chi$, а также сферические координаты R, θ ($r = R \sin \theta$, $z = R \cos \theta$). При этом ликвидируются точки ветвления в подынтегральном выражении, а интеграл принимает вид

$$I = \frac{k^3}{2\pi} \int_C \left(\frac{i}{(\Omega + i0)} - \frac{\tau}{1 - i\Omega\tau} \right) \cos \chi \sin^2 \chi \times H_1^{(1)}(kR \sin \theta \sin \chi) \exp(ikR \cos \theta \cos \chi) d\chi, \tag{15}$$

где контур C показан на рис. 1.

Приближенный расчет данного интеграла в волновой зоне ($|k|R \gg 1$) можно провести методом перевала. Методика данного расчета стандартна [16], поэтому мы остановимся лишь на основных моментах. Сначала целесообразно трансформировать исходный контур интегрирования к контуру наискорейшего спуска Γ (рис. 1), после чего, используя асимптотику функции Ханкеля, можно записать интеграл в виде

$$I = \int_{\Gamma} f(\chi) e^{ikR \cos(\chi - \theta)} d\chi, \tag{16}$$

где $f(\chi) = \frac{k^3 \cos \chi \sin^2 \chi}{\sqrt{2\pi^3 kR \sin \theta \sin \chi}} e^{-i3\pi/4} \left(\frac{i}{\Omega + i0} - \frac{\tau}{1 - i\Omega\tau} \right)$. Подынтегральная функция имеет седловую точку $\chi = \theta$. При трансформации исходного контура C к контуру Γ может происходить пересечение полюсов функции $f(\chi)$. Вклад полюса, определяемого уравнением $i\Omega\tau = 1$, экспоненциально убывает с расстоянием, т.е. не является частью поля излучения (далее такие вклады мы не учитываем). Полюс, определяемый уравнением $\Omega = 0$, расположен в точке $\chi = \chi_0 = \arccos(1/(n\beta))$.

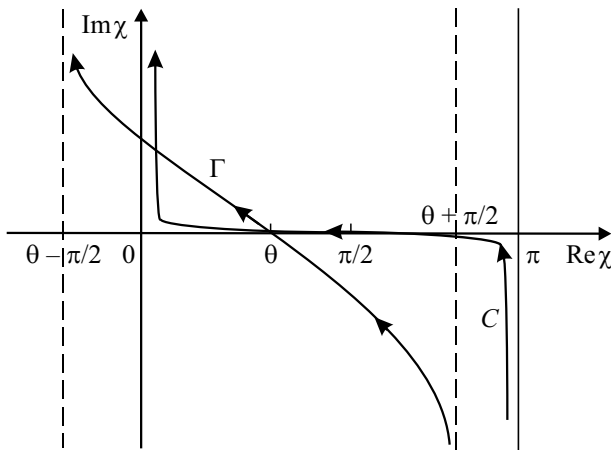


Рис. 1. Исходный контур интегрирования C и контур наискорейшего спуска Γ на плоскости χ при $\omega > 0$.

При $n\beta < 1$ его вклад экспоненциально мал, но при $n\beta > 1$ он существенен. После приближенного расчета интеграла (16) методом перевала [16] с учетом вклада полюса χ_0 получаем

$$I \approx \sqrt{\frac{2\pi}{kR |d^2\Phi(\chi)/d\chi^2|_{\chi=\theta}}} f(\theta) e^{ikR + 3i\pi/4} + \frac{\omega s}{\nu^2} \sqrt{\frac{2}{\pi s r}} \Theta(\chi_0 - \theta) \Theta(n\beta - 1) e^{i\omega z/\nu + isr + i\pi/4}. \tag{17}$$

Этот результат верен в том случае, когда функция $\exp(ikR \cos(\chi - \theta))$ на контуре наискорейшего спуска меняется быстро по сравнению с функцией $f(\chi)$. Данное условие выполнено, если седловая точка расположена достаточно далеко от полюсов подынтегральной функции, т.е. $|kR(\theta - \chi_0)| \gg 1$. Подстановкой (17) в (13) с использованием в (13) асимптотики функции Ханкеля можно легко убедиться, что второй член в (17) компенсирует первое слагаемое в (13) в области $\theta < \chi_0$.

Аналогично рассчитываются фурье-образы компонент E_z и H_ϕ . В итоге получаем поле в виде суммы сферической (I) и цилиндрической (II) волн:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^I + \mathbf{E}^{II}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^I + \mathbf{H}^{II} \tag{18}$$

$$\begin{pmatrix} E_{r\omega}^I \\ E_{z\omega}^I \\ H_{\phi\omega}^I \end{pmatrix} = \frac{q_0 k \beta \sin \theta}{2\pi} \begin{pmatrix} -\sqrt{\mu/\epsilon} \cos \theta \\ \sqrt{\mu/\epsilon} \sin \theta \\ -1 \end{pmatrix} \times \left[\frac{1}{\omega(1 - n\beta \cos \theta)} + \frac{i\tau}{1 - i\omega(1 - n\beta \cos \theta)\tau} \right] \frac{e^{ikR}}{R}, \tag{19}$$

$$\begin{pmatrix} E_{r\omega}^{II} \\ E_{z\omega}^{II} \\ H_{\phi\omega}^{II} \end{pmatrix} = \frac{q_0 s}{c} \begin{pmatrix} (\beta\epsilon)^{-1} \\ -cs(\omega\epsilon)^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{\exp(i\omega z/\nu + isr - i\pi/4)}{\sqrt{2\pi s r}} \Theta(\theta - \chi_0) \Theta(n\beta - 1). \tag{20}$$

Сферическая волна (19) обусловлена процессом уменьшения заряда сгустка и одновременным с ним образованием „следа“. Цилиндрическая волна — это излучение Вавилова–Черенкова. Как и следовало ожидать, оно имеется только при превышении скорости движения заряда над фазовой скоростью волн в среде, т.е. при условии $\nu > c/n$, или $n\beta > 1$. Согласно полученным „неравномерным“ асимптотикам, данная волна существует только в области $\theta > \chi_0$ (рис. 2). Однако следует иметь в виду, что при $|kR(\theta - \chi_0)| \sim 1$ полученные асимптотики неприменимы — в этой области разделение волнового поля на цилиндрическую и сферическую волны невозможно. Более точные („равномерные“) асимптотики позволяют описать поведение поля и в этой переходной области (см. разд. 4).

Скажем кратко о роли двух частей, из которых состоит источник: это сам точечный заряд с плотностями $\rho \mathbf{j}$,

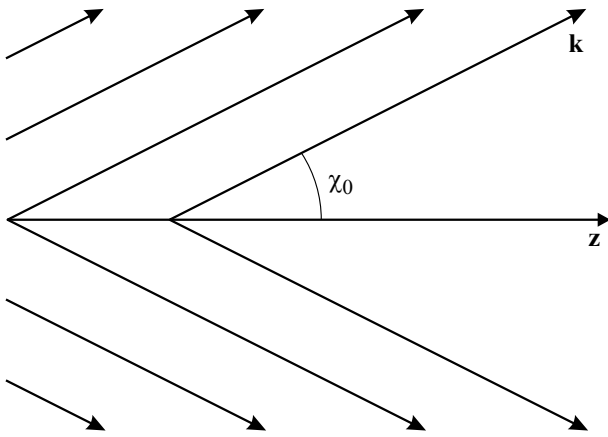


Рис. 2. Область существования излучения Вавилова–Черенкова.

и его „след“ с плотностями $\rho_1, \mathbf{j}_1 = 0$. Прежде всего, отметим, что разделение поля на два вклада от этих частей не имеет большого физического смысла. Причина этого заключается в том, что закон сохранения заряда выполнен только для суммарного источника, но не раздельно для точечного заряда и „следа“. Поэтому, если рассматривать такие источники раздельно, то система уравнений Максвелла становится неразрешимой (число независимых уравнений превышает число неизвестных).

Тем не менее формально можно выделить в строгих выражениях (10) и в асимптотиках (18)–(20) вклады самого заряда и его „следа“. Анализ показывает, что в электрическое поле сферической волны (19) заряд и „след“ вносят сопоставимые по величине вклады (несмотря на то, что „след“ не является точечным объектом). Это объясняется тем, что скорость изменения заряда и его „следа“ определяется одним и тем же параметром τ . В частности, при $\omega\tau \gg 1$ обе составляющие электрического поля пропорциональны $(\omega\tau)^{-1}$ (как и все поле сферической волны (19)). В то же время „след“ не дает никакой добавки к магнитному полю, что естественно в силу отсутствия движения зарядов в нем. Подчеркнем, что „правильная“ асимптотика (19) (поперечная сферическая волна) получается только при учете обеих частей источника. Что касается цилиндрической волны (20), то можно показать, что „след“ не оказывает влияния на нее (физически это также связано с отсутствием движения зарядов „следа“).

3. Сферическая волна

В сферических координатах R, θ, φ сферическая волна (19) имеет только две ненулевые компоненты:

$$E_{\theta\omega}^I = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_{\varphi\omega}^I = -\frac{q_0\mu \exp(ikR)}{2\pi c R} F(\beta, \theta, \omega), \quad (21)$$

$$F(\beta, \theta, \omega) = \frac{\beta \sin \theta}{(1 - n\beta \cos \theta)[1 - i\omega\tau(1 - n\beta \cos \theta)]}. \quad (22)$$

Как и следовало ожидать, мы получили поперечную волну, которая является „квазиплоской“, так как радиус кривизны R поверхности постоянной фазы много больше длины волны. Множитель $F(\beta, \theta, \omega)$ определяет зависимость амплитуды сферической волны от скорости движения сгустка, угла точки наблюдения и рассматриваемой частоты.

Угловое распределение энергии сферической волны можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\Omega} &= R^2 \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\theta}^I H_{\varphi}^I dt \\ &= R^2 \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} E_{\theta\omega}^I e^{-i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} H_{\varphi\omega}^I e^{-i\omega' t} d\omega' \\ &= cR^2 \int_0^{\infty} E_{\theta\omega}^I H_{\varphi\omega}^{I*} d\omega. \end{aligned} \quad (23)$$

Как видим, спектрально-угловая плотность энергии излучения определяется выражением

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\omega} = cR^2 E_{\theta\omega}^I H_{\varphi\omega}^{I*} = cR^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |E_{\theta\omega}^I|^2 = \frac{q_0^2}{4\pi^2 c} \sqrt{\varepsilon\mu^3} |F|^2, \quad (24)$$

$$|F|^2 = \frac{\beta^2 \sin^2 \theta}{(1 - n\beta \cos \theta)^2 [1 + \omega^2 \tau^2 (1 - n\beta \cos \theta)^2]}. \quad (25)$$

Если $\varepsilon = \mu = n = 1$ и $\tau = 0$, т.е. частица движется в вакууме и мгновенно теряет весь заряд, то спектрально-угловая плотность энергии излучения равна

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\omega} = \frac{q_0^2}{4\pi^2 c} \frac{\beta^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^2}. \quad (26)$$

Это выражение совпадает со спектрально-угловой плотностью энергии излучения мгновенно тормозящегося заряда в вакууме (его можно получить из общего выражения для произвольно движущегося заряда, приведенного, например, в [17]). Таким образом, случай мгновенно исчезающего заряда эквивалентен случаю мгновенно тормозящегося заряда, что вполне естественно.

Полная угловая плотность энергии излучения получается путем интегрирования выражения (24) по частоте. Если пренебречь частотной дисперсией среды (т.е. считать ε и μ не зависящими от частоты), то легко получить следующий результат:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\Omega} &= \int_0^{\infty} \frac{d^2W}{d\Omega d\omega} d\omega = \frac{q_0^2}{8\pi c \tau} \sqrt{\varepsilon\mu^3} F_0, \\ F_0 &= \frac{\beta^2 \sin^2 \theta}{|1 - n\beta \cos \theta|^3}. \end{aligned} \quad (27)$$

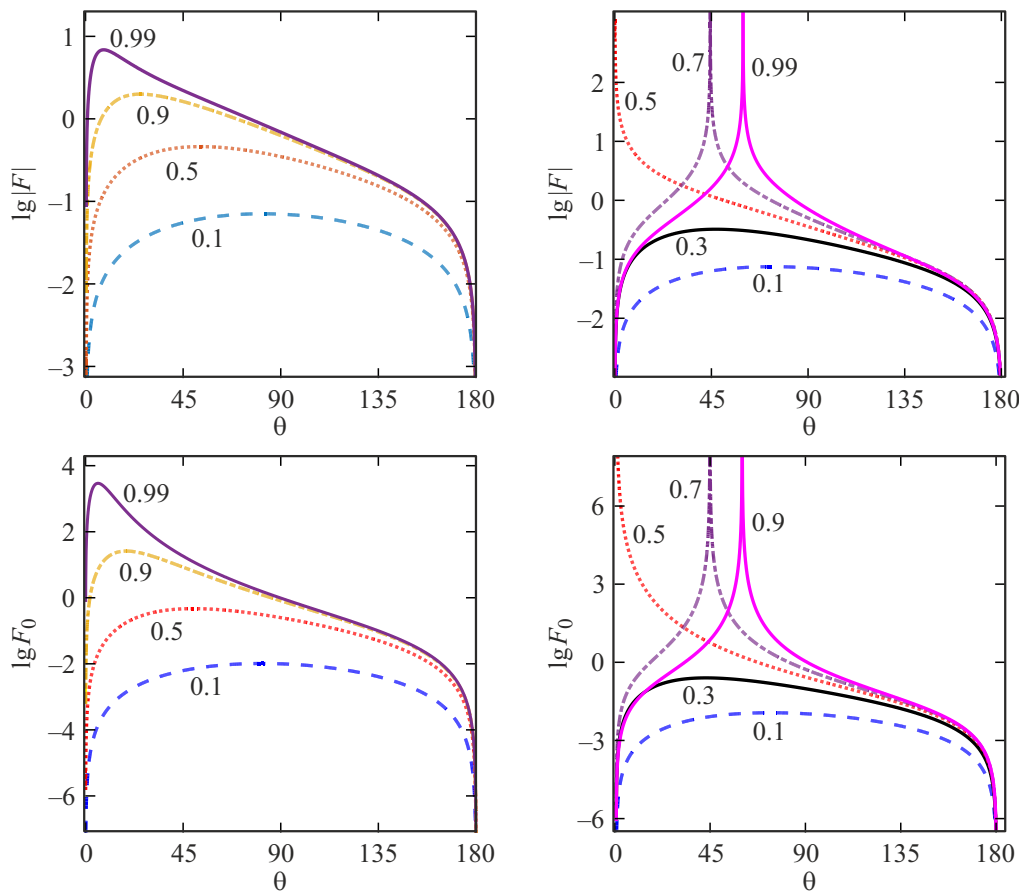


Рис. 3. Зависимость $\lg |F|$ при $\omega\tau = 1$ (вверху) и $\lg F_0$ (внизу) от угла θ (град). Слева — случай вакуума, справа — случай среды с проницаемостями $\epsilon = 4, \mu = 1$. Значения β указаны около кривых.

Примеры зависимостей $|F|$ и F_0 от углов для разных значений n и β приведены на рис. 3 (в логарифмическом масштабе). Левые графики соответствуют случаю вакуума, а правые — случаю среды, для которой $n = 2$. При росте скорости заряда от нуля до c/n максимумы обеих величин возрастают и смещаются в сторону меньших углов, стремясь к $\theta = 0$ при $v \rightarrow c/n$. В случае $v > c/n$ при $\theta \rightarrow \chi_0$ величины $|F|$ и F_0 увеличиваются с ростом угла θ , пока $\theta < \chi_0$, и уменьшаются при $\theta > \chi_0$. При $\theta \rightarrow \chi_0$ обе величины формально стремятся к бесконечности, однако это связано с неприменимостью асимптотики (18)–(20) в окрестности угла $\theta = \chi_0$.

Интересно сравнить излучение в рассматриваемом случае с излучением заряда, величина которого не меняется, но он тормозится по экспоненциальному закону с тем же характерным временем τ . Скорость этого заряда равна

$$\beta_b(t) = \begin{cases} \beta, & t < 0, \\ \beta e^{-t/\tau}, & t \geq 0. \end{cases} \quad (28)$$

Проведем такое сравнение для случая, когда электродинамические характеристики среды практически неотличимы от вакуумных ($\epsilon = \mu = 1$). В случае тормозящегося в вакууме заряда угловая плотность мощности

излучения определяется формулой [17]

$$\frac{dP_b}{d\Omega} = \frac{d^2W_b}{d\Omega dt} = \frac{q^2}{4\pi c} \left(\frac{d\beta_b}{dt} \right)^2 \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta_b \cos \theta)^6}. \quad (29)$$

Интегрируя это выражение по времени с учетом (28), получим полную угловую плотность энергии излучения:

$$\frac{dW_b}{d\Omega} = \frac{q^2}{8\pi c\tau} \tilde{F}_0,$$

$$\tilde{F}_0 = \frac{\beta^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^4} \left(1 + \frac{1}{10} \beta^2 \cos^2 \theta \frac{5 - \beta \cos \theta}{1 - \beta \cos \theta} \right). \quad (30)$$

Примеры зависимостей $\lg \tilde{F}_0$ и $\lg F_0$ от угла θ при разных скоростях приведены на рис. 4. При нерелятивистской скорости ($\beta \ll 1$) вклад в (30) практически дает только первое слагаемое, и в этом случае экспоненциально тормозящийся и экспоненциально убывающий заряды излучают примерно одинаково. При $\beta \sim 1$ за счет второго слагаемого в (30) и иной степени скобки в знаменателе, излучение тормозящегося заряда существенно превосходит излучение убывающего заряда при острых углах θ . При $\beta \approx 1$ максимум для тормозящегося заряда много больше максимума для убывающего заряда.

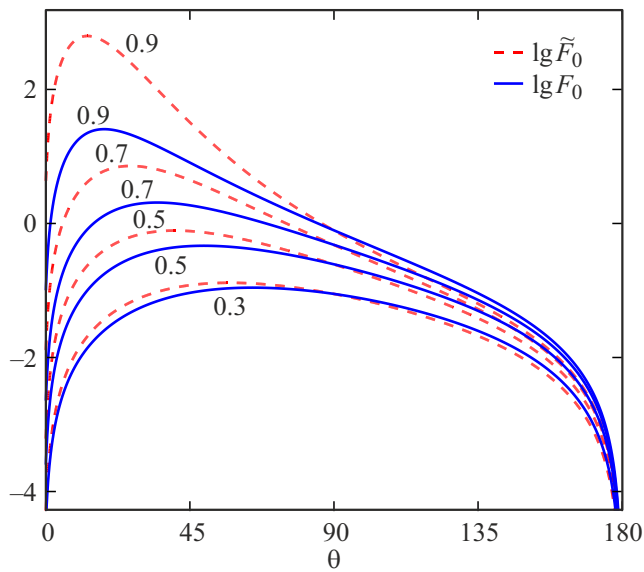


Рис. 4. Зависимость $\lg F_0$ (сплошные кривые) и $\lg \tilde{F}_0$ (штриховые кривые) от угла θ при разных скоростях (указаны на графике) в вакууме.

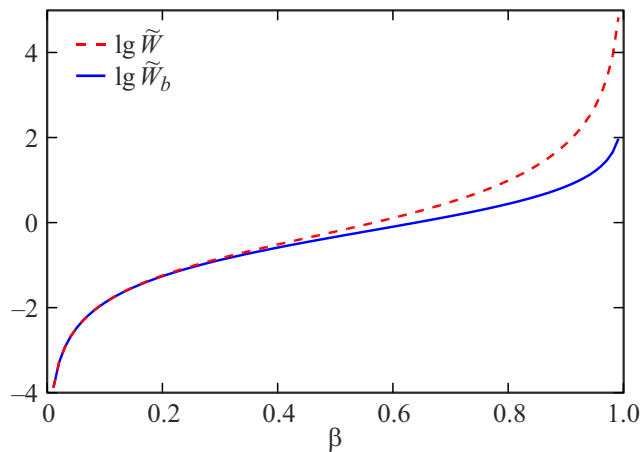


Рис. 5. Зависимость $\lg \tilde{W}$ (сплошная кривая) и $\lg \tilde{W}_b$ (штриховая кривая) от скорости β в вакууме.

Полная энергия излучения получается путем интегрирования угловой плотности энергии:

$$W = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{dW}{d\Omega} \sin \theta d\theta.$$

Для экспоненциально убывающего заряда в вакууме она равна

$$W = \frac{q_0^2}{4c\tau} \tilde{W}, \quad \tilde{W} = \frac{2}{1-\beta^2} + \frac{1}{\beta} \ln \frac{1-\beta}{1+\beta}. \quad (31)$$

Для экспоненциально тормозящегося в вакууме заряда нетрудно получить

$$W_b = \frac{q^2}{4c\tau} \tilde{W}_b, \quad \tilde{W}_b = \frac{4\beta^2}{3(1-\beta^2)} \left(1 + \frac{\beta^2}{10} \frac{1+3\beta^2}{1-\beta^2} \right). \quad (32)$$

Зависимости $\lg \tilde{W}$ и $\lg \tilde{W}_b$ от скорости приведены на рис. 5. Как видим, при нерелятивистской скорости ($\beta \ll 1$) тормозящийся и убывающий заряды излучают примерно одинаково: $W_b \approx W \approx \frac{q^2\beta^2}{3c\tau}$. В ультррелятивистском случае, когда $\gamma \equiv (1-\beta^2)^{-1/2} \gg 1$, с ростом γ полная энергия излучения растет пропорционально γ^2 для убывающего заряда и γ^6 для тормозящегося. Таким образом, в случае большого Лоренц-фактора тормозящийся заряд излучает гораздо эффективнее убывающего.

Завершая настоящий раздел, отметим, что в случае сгустка частиц размера a излучение будет сопоставимо с излучением точечного заряда, если $ka \leq 1$, а при $ka \gg 1$ оно будет значительно слабее. В то же время, согласно (25), диапазон частот излучения можно оценить неравенством $\omega\tau \leq 1$. Таким образом, для реальных сгустков диапазон частот излучения ограничен сверху как за счет конечности времени изменения заряда, так и за счет конечности его размера: $\omega \leq \min(1/\tau, 1/\tau_a)$, где $\tau_a = na/c$ — время, за которое излучение проходит расстояние a . Если $\tau > \tau_a$, то заряд можно приближенно рассматривать как точечный во всем существенном диапазоне частот излучения. В противном случае частотный диапазон оказывается ограниченным за счет конечного размера сгустка.

4. Асимптотика поля, справедливая при всех углах наблюдения

Для описания поведения поля во всей волновой зоне $kR \gg 1$, включая область углов $\theta \approx \chi_0$, нужно использовать равномерную асимптотику интегралов. Такая асимптотика справедлива при любом расположении полюса $\chi = \chi_0$ по отношению к седловой точке $\chi = \theta$, в том числе и при $\theta = \chi_0$. Совпадение полюса с седловой точкой соответствует условной границе области черенковского излучения, на которой неравномерные асимптотики (18)–(20) терпят разрыв. Равномерные асимптотики корректно описывают поле всюду в волновой зоне, включая саму данную границу и ее окрестность.

Не останавливаясь на преобразованиях, которые проводятся согласно известной процедуре [16], выпишем окончательные результаты, справедливые при $kR \gg 1$:

$$E_{r\omega} = \frac{i}{2\epsilon} I_\Gamma + \frac{q_0 s \exp(i\omega z/v + isr - i\pi/4)}{v\epsilon \sqrt{2\pi sr}} \Theta(\theta - \chi_0),$$

$$E_{z\omega} = \frac{I_\Gamma}{2\epsilon} + \frac{q_0 \omega (1 - n^2 \beta^2) \exp(i\omega z/v + isr - i\pi/4)}{c^2 \epsilon \beta^2 \sqrt{2\pi sr}} \Theta(\theta - \chi_0),$$

$$H_{\phi\omega} = \frac{i}{2} I_\Gamma + \frac{q_0 s \exp(i\omega z/v + isr - i\pi/4)}{c \sqrt{2\pi sr}} \Theta(\theta - \chi_0). \quad (33)$$

Здесь I_Γ определяется выражением

$$I_\Gamma \approx 2ia\sqrt{\pi} \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}b) Q \left(-\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}b) ib\sqrt{kR} \right) \times \exp(ikR \cos(\chi_0 - \theta)) + \sqrt{\frac{\pi}{kR}} \left(\sqrt{2}e^{3\pi i/4} f(\chi_s) + \frac{a}{b} \right) \exp(ikR), \quad (34)$$

где $b = e^{i\pi/4} \sqrt{2} \sin\left(\frac{\theta - \chi_0}{2}\right)$, $Q(y) = \int_y^{+\infty} e^{-x^2} dx$, а роль $f(\chi)$ играет одна из следующих функций:

$$\begin{cases} f_r(\chi) \\ f_z(\chi) \\ f_h(\chi) \end{cases} = \frac{q_0\beta k^2}{\pi} \sqrt{\frac{\sin^3 \chi}{2\pi kR \sin \theta}} \times \left[\frac{1}{i\omega(1 - n\beta \cos \chi)} + \frac{\tau}{1 - i\omega\tau(1 - n\beta \cos \chi)} \right] \times \begin{cases} e^{i\pi/4} n \cos \chi \\ e^{-i\pi/4} n \sin \chi \\ e^{i\pi/4} \end{cases}. \quad (35)$$

Соответственно в качестве a нужно подставить в (34) величину вычета $a = a_{r,z,h} = \operatorname{Res} f_{r,z,h}(\chi)_{\chi=\chi_0}$:

$$\begin{cases} a_r \\ a_z \\ a_h \end{cases} = -\frac{iq_0\beta k \sqrt{\sin \chi_0}}{\pi\nu \sqrt{2\pi kR \sin \theta}} \begin{cases} e^{i\pi/4} n \cos \chi_0 \\ e^{-i\pi/4} n \sin \chi_0 \\ e^{i\pi/4} \end{cases}. \quad (36)$$

Нетрудно показать, что при условии $|b|\sqrt{kR} \gg 1$, т.е. $|\chi_0 - \theta|\sqrt{kR} \gg 1$, полученные результаты дают „неравномерную“ асимптотику (18)–(20).

В случае, когда полюс совпадает с седловой точкой ($\theta = \chi_0$), выражения (33) принимают вид

$$E_{r\omega} = -\frac{i\nu\tau q_0 k^2 \sin(2\theta) e^{ikR}}{4\pi \varepsilon\omega R} + \frac{q_0 s}{2\sqrt{2\pi\nu\varepsilon}} \frac{\exp(i\omega z/\nu + isr - i\pi/4)}{\sqrt{sr}},$$

$$E_{z\omega} = \frac{i\nu\tau q_0 k^2 \sin^2 \theta e^{ikR}}{2\pi \varepsilon\omega R} + \frac{q_0\omega(1 - n^2\beta^2)}{2\sqrt{2\pi c^2\varepsilon\beta^2}} \frac{\exp(i\omega z/\nu + isr - i\pi/4)}{\sqrt{sr}},$$

$$H_{\phi\omega} = -\frac{i\beta\tau q_0 k \sin \theta e^{ikR}}{2\pi R} + \frac{q_0 s}{2\sqrt{2\pi}c} \frac{\exp(i\omega z/\nu + isr - i\pi/4)}{\sqrt{sr}}. \quad (37)$$

Как видим, при $\theta = \chi_0$ амплитуды компонент цилиндрической волны равны половине амплитуд компонент

волны черенковского излучения (20). Таким образом, применение равномерных асимптотик обеспечивает корректное описание переходной зоны между областью, освещенной излучением Вавилова–Черенкова, и областью, где оно отсутствует. Данная переходная зона имеет угловую ширину порядка $\Delta\theta \sim 1/(kR)$.

Примеры поведения фурье-образа полного поля H_ϕ приведены на рис. 6. Левый график соответствует случаю $\beta = 0.6$, а правый — случаю $\beta = 0.99$. Показана условная граница области черенковского излучения при $\tau = 0$. При $\tau \neq 0$ эта граница смещается в сторону положительных значений z . Напомним, что начало координат находится в точке, где сгусток частиц начинает терять заряд. Поэтому с учетом уменьшения заряда в e -раз за конечное время τ , границу области черенковского излучения можно более точно определить выражением $\theta = \arctan\left(\frac{1}{1/\tan \chi_0 + \nu\tau/r}\right)$.

Как и следовало ожидать, поле является непрерывной функцией координат всюду. Сравнивая средний и нижний рисунки (для $\beta = 0.6$ и $\beta = 0.99$), мы видим, что если $z < 0$, то амплитуда поля при $r = 100c/\omega$ примерно в 3 раза меньше, чем при $r = 10c/\omega$ (в этой области основную роль играет черенковское излучение, амплитуда которого убывает как $1/\sqrt{r}$). С ростом z , начиная с некоторого значения z , поле убывает. При этом точка наблюдения попадает в переходную зону между областью черенковского излучения и областью, где оно несущественно. При достаточно больших значениях z практически остается только сферическая волна, убывающая как $R^{-1} = (r^2 + z^2)^{-1/2}$.

Заключение

В работе исследовано электромагнитное поле сгустка заряженных частиц малого размера, движущегося с постоянной скоростью и обладающего переменным зарядом. При этом учитывалось, что за сгустком образуется нитевидный „след“, состоящий из неподвижных зарядов. Предполагалось, что окружающая среда является изотропной и однородной, причем она может иметь частотную дисперсию, но не обладает пространственной дисперсией. Получено общее решение задачи. Основное внимание уделено такому случаю, когда величина заряда, начиная с некоторого момента, экспоненциально уменьшается с течением времени. Методом перевала получены асимптотические выражения для компонент поля, справедливые в волновой зоне.

Для возбуждаемой сгустком сферической волны показано, в частности, что в вакууме спектрально-угловая и угловая плотности энергии излучения имеют максимум при остром угле, который уменьшается с ростом скорости. Проведено сравнение со случаем тормозящегося заряда. При нерелятивистской скорости энергии излучения убывающего и тормозящегося зарядов

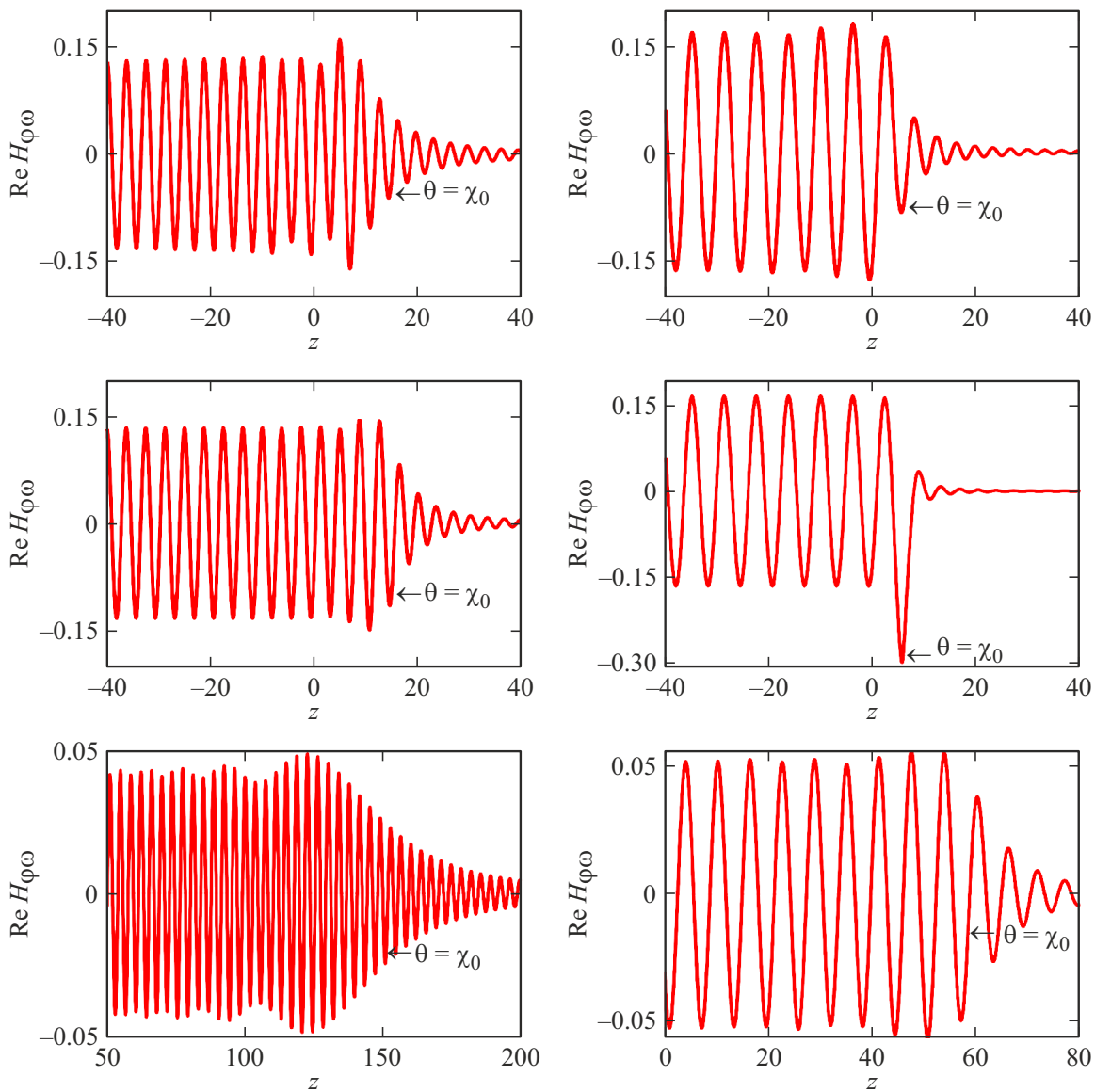


Рис. 6. Зависимость фурье-образа поля $H_{\varphi\omega}$ (в единицах $q_0\omega/c^2$) от z (в единицах c/ω) при $\varepsilon = 4, \mu = 1, n = 2$. Левый столбец: $\beta = 0.6$; правый столбец: $\beta = 0.99$. Верхний ряд: $\tau = 0, r = 10c/\omega$; средний ряд: $\omega\tau = 10, r = 10c/\omega$; нижний ряд: $\omega\tau = 10, r = 100c/\omega$.

приближенно равны, а при ультрарелятивистской скорости энергия излучения тормозящегося заряда значительно превышает энергию излучения убывающего заряда.

В случае движения заряда в среде, кроме сферической волны, в определенном частотном диапазоне может возбуждаться цилиндрическая волна (черенковское излучение), которая существует в ограниченной области пространства. Разбиение поля на сферическую и цилиндрическую волны невозможно в окрестности условной границы черенковского излучения, где корректное описание поля дается равномерными асимптотиками. Приведены графики типичных зависимостей фурье-образа поля от продольной координаты при различных параметрах задачи.

Финансирование работы

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18-72-10137) и Совета стипендиальных программ Китая.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] И.М. Франк. *Излучение Вавилова–Черенкова: вопросы теории* (Наука, М., 1988), 288 с.

- [2] Дж. Джелли. *Черенковское излучение и его применения* (ИЛ, М., 1960), 334 с.
- [3] В.П. Зрелов. *Излучение Вавилова–Черенкова и его применение в физике высоких энергий* (Атомиздат, М., 1968), ч. 1, 2.
- [4] В.Л. Гинзбург, В.Н. Цытович. *Переходное излучение и переходное рассеяние* (Наука, М., 1984), 360 с.
- [5] G.N. Afanasiev. *Vavilov–Cherenkov and Synchrotron Radiation: Foundations and Applications* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004).
- [6] Б.М. Болотовский. УФН, **62** (3), 201 (1957).
- [7] Б.М. Болотовский. УФН, **75** (2), 295 (1961).
- [8] А.В. Тюхтин. *Излучение Вавилова–Черенкова в изотропной среде* (СОЛЮ, СПб, 2019), 78 с.
- [9] А.Д. Канарейкин. *Взаимодействие и динамика электромагнитных волн и релятивистских электронных пучков в волноводных структурах со сложным заполнением* (Дисс. д-ра физ.-мат. наук. СПб., СПбГУ, 2012)
- [10] А.П. Черняев, А.В. Белоусов, Е.Н. Лыкова. *Взаимодействие ионизирующего излучения с веществом* (МГУ, М., 2019), 104 с.
- [11] М.А. Батурицкий. *Взаимодействие ионизирующего излучения с веществом* (МГЭУ, Минск, 2005), 118 с.
- [12] S.H. Park, J.O. Kang. *Radiation Oncology J.*, **29** (3), 135 (2011).
- [13] K.W. Jang, W.J. Yoo, S.H. Shin, D. Shin, B. Lee. *Opt. Express*, **20** (13), 13907 (2012).
- [14] S.G. Stuchebrov, Yu.M. Cherepennikov, A.A. Krasnykh, I.A. Miloichikova, A.V. Vukolov. *J. Instrument.*, **13**, C05020 (2018).
- [15] А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. *Интегралы и ряды. Элементарные функции* (Наука, М., 1981).
- [16] Л. Фелсен, Н. Маркувиц. *Излучение и рассеяние волн* (Мир, М., 1978), т. 1.
- [17] М.М. Бредов, В.В. Румянцев, И.Н. Топтыгин. *Классическая электродинамика* (Наука, М., 1985).