О коэффициенте Нернста бинарных композитов в слабом магнитном поле

© Б.Я. Балагуров[¶]

Институт биохимической физики им. Н.М. Эмануэля Российской академии наук,
119991 Москва, Россия

(Получена 9 декабря 2002 г. Принята к печати 30 декабря 2002 г.)

Рассмотрены термогальваномагнитные свойства двухкомпонентных изотропных композитов в линейном по магнитному полю $\mathbf{H}$ и термоэдс α приближении. Показано, что эффективный коэффициент Нернста содержит трехпараметрическую функцию Φ, которая может быть выражена через электрическое поле и градиент температуры в среде при $\mathbf{H} = 0$ и $\alpha = 0$. Это позволяет оценить Φ численными методами.

1. Введение

В теории стационарных явлений переноса в неоднородных средах наиболее, по-видимому, общей является задача о термогальваномагнитных свойствах этих систем. Естественно, что она является и наиболее сложной, так что при ее решении возникают еще бо́льшие трудности, чем при рассмотрении термоэлектрических или гальваномагнитных свойств неоднородных сред. Тем не менее в случае двумерных изотропных двухкомпонентных систем для этой задачи может быть дано полное решение с помощью преобразований симметрии (см. [1]). Полученные в [1] соотношения изоморфизма позволяют выразить эффективные термогальваноманитные характеристики таких систем через свойства компонент и через безразмерную эффективную проводимость f, определенную в отсутствие магнитного поля и без учета термоэлектрических эффектов.

Преобразование полей и токов, использованное в [1], справедливо только для двумерных систем и не переносится на трехмерный ($D = 3$) случай. Отсутствие при $D = 3$ достаточно общего преобразования симметрии не позволяет в трехмерном случае применить подход работы [1] и делает сомнительной возможность решить эту задачу какими-либо другими методами без упрощающих предположений. Определенные упрощения могут возникнуть при наложении некоторых ограничений на свойства компонент (см. разд. 3). Задача значительно облегчается и при часто реализуемых в эксперименте условиях — слабом магнитном поле $\mathbf{H}$ и малой термоэлектрической связи (т.е. при малом термоэлектрическом коэффициенте α).

В настоящей работе рассмотрены термогальваномагнитные свойства изотропных двухкомпонентных сред в линейном по магнитному полю $\mathbf{H}$ и по термоэлектрическому коэффициенту α приближении. С помощью феноменологического подхода, использующего следствия из некоторых частных преобразований симметрии, установлена структура холловской составляющей эффективного тензора термоэдс. Показано, что в эффективный коэффициент Нернста входит одна не вычисляемая в теории трехпараметрическая функция Φ. Решение уравнений постоянного тока методом разложения по степеням $\mathbf{H}$ и α дало возможность выразить величину Φ через напряженность электрического поля и градиент температуры в среде при $\mathbf{H} = 0$ и $\alpha = 0$. (Заметим, что некоторые из этих результатов приведены без вывода в кратком сообщении [2]). Отмечено, что табулирование численными методами безразмерной проводимости b и функции Φ позволит дать в линейном по $\mathbf{H}$ и α приближении описание всех основных электрофизических характеристик изотропных бинарных композитов.

2. Предварительные замечания

Обсудим сначала постановку задачи и введем необходимые обозначения. Для вычисления эффективных термогальваномагнитных характеристик неоднородной среды нужно решить систему уравнений постоянного тока [3]

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0. \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0; \quad \operatorname{div}\mathbf{q} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{G} = 0; \quad \mathbf{G} = -\boldsymbol{\nabla}T. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, $\mathbf{j}$ — плотность электрического тока, $T = T(\mathbf{r})$ — температура среды в точке $\mathbf{r}$, $\mathbf{q}$ — плотность потока тепла, деленная на среднюю температуру образца (см. [1]). В линейной по $\mathbf{E}$ и $\mathbf{G}$ задаче материальные уравнения имеют вид

$$\mathbf{j} = \hat{\sigma}(\mathbf{r})\mathbf{E} + \hat{\gamma}(\mathbf{r})\mathbf{G}, \quad \mathbf{q} = \hat{\gamma}(\mathbf{r})\mathbf{E} + \hat{\chi}(\mathbf{r})\mathbf{G};$$

$$\hat{\gamma} = \hat{\sigma}\hat{\alpha}, \quad \hat{\chi} = \bar{T}^{-1}\hat{\varkappa} + \hat{\sigma}\hat{\alpha}^2, \tag{2}$$

где $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$, $\hat{\varkappa}(\mathbf{r})$ и $\hat{\alpha}(\mathbf{r})$ — тензоры проводимости, теплопроводности и термоэдс среды, $\bar{T}$ — средняя температура образца.

Эффективные характеристики среды определяются обычным образом:

$$\langle\mathbf{j}\rangle = \hat{\sigma}_e\langle\mathbf{E}\rangle + \hat{\gamma}_e\langle\mathbf{G}\rangle, \quad \langle\mathbf{q}\rangle = \hat{\gamma}_e\langle\mathbf{E}\rangle + \hat{\chi}_e\langle\mathbf{G}\rangle;$$

$$\hat{\gamma}_e = \hat{\sigma}_e\hat{\alpha}_e, \quad \hat{\chi}_e = \bar{T}^{-1}\hat{\varkappa}_e + \hat{\sigma}_e\hat{\alpha}_e^2, \tag{3}$$

[¶] E-mail: balagurov@deom.chph.ras.ru

где $\langle \ldots \rangle$ означает усреднение по объему образца V:

$$\langle (\ldots) \rangle = \frac{1}{V} \int_V (\ldots)\, d\mathbf{r}, \tag{4}$$

при $V \to \infty$.

Для изотропной системы, помещенной в магнитное поле $\mathbf{H}$, тензор проводимости $\hat{\sigma}$ имеет вид

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_a & 0 \\ -\sigma_a & \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где принято, что $\mathbf{H}$ направлено по оси z. В целях упрощения последующих формул в (5) введены обозначения $\sigma_x = \sigma_{xx} = \sigma_{yy}$, $\sigma_z = \sigma_{zz}$ и $\sigma_a = \sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$ соответственно для поперечной, продольной и холловской составляющих тензора проводимости. Аналогичный выражению (5) вид имеют тензоры $\hat{\varkappa}, \hat{\alpha}$ и, следовательно, тензоры $\hat{\gamma}, \hat{\chi}$. Для двухкомпонентной среды тензоры $\hat{\sigma}(\mathbf{r})$, $\varkappa(\mathbf{r})$, $\alpha(\mathbf{r})$ принимают постоянные значения $\hat{\sigma}_1$, $\hat{\varkappa}_1$, $\hat{\alpha}_1$ и $\hat{\sigma}_2$, $\hat{\varkappa}_2$, $\hat{\alpha}_2$ в первой и второй компонентах соответственно.

Таким образом, в теории термогальваномагнитных свойств трехмерных изотропных двухкомпонентных сред требуется определить девять эффективных характеристик σ_{xe}, σ_{ze}, σ_{ae}, $\varkappa_{xe}$, $\varkappa_{ze}$, $\varkappa_{ae}$, α_{xe}, α_{ze}, α_{ae}. Каждая из них является многопараметрической функцией, зависящей от концентрации p и величин $\hat{\sigma}_1$, $\hat{\sigma}_2$, $\hat{\varkappa}_1$, $\hat{\varkappa}_2$, $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$, т.е., как минимум, от девятнадцати аргументов. В такой общей постановке задача чрезвычайно сложна и без упрощающих предположений ее решение вряд ли возможно. В настоящей работе рассматривается случай $\mathbf{H} \to 0$, когда малы́ холловские составляющие σ_{ai}, $\varkappa_{ai}$, α_{ai}. Предполагается, кроме того, что малы́ термоэлектрические эффекты, чему формально отвечает $\hat{\alpha} \to 0$ (или $\hat{\gamma} \to 0$).

В слабом магнитном поле ($\mathbf{H} \to 0$) величина σ_a линейна по $\mathbf{H}$, а поправки к σ_x и σ_z — квадратичны. Поэтому в линейном по $\mathbf{H}$ приближении, которым мы в дальнейшем и ограничимся, следует положить $\sigma_x = \sigma_z = \sigma$, где σ — скалярная проводимость среды при $\mathbf{H} = 0$. Аналогичным образом, при $\mathbf{H} \to 0$ линейны по $\mathbf{H}$ величины $\varkappa_a, \alpha_a$ (и, следовательно, χ_a, γ_a) и в том же приближении $\varkappa_x = \varkappa_z = \varkappa$, $\alpha_x = \alpha_z = \alpha$. В отсутствие термоэлектрических эффектов ($\hat{\alpha} = 0$, $\hat{\gamma} = 0$) проводимость системы при $\mathbf{H} = 0$ можно записать в виде

$$\sigma_e = \sigma_1 f(p, \sigma_2/\sigma_1). \tag{6}$$

Здесь f — безразмерная эффективная проводимость среды, p — концентрация (доля занимаемого объема) первой компоненты. Для эффективной холловской составляющей σ_{ae} при $\mathbf{H} \to 0$ имеем [4,5]

$$\sigma_{ae} = \sigma_{a2} + (\sigma_{a1} - \sigma_{a2})\varphi_\sigma; \quad \varphi_\sigma = \varphi(p, \sigma_2/\sigma_1), \tag{7}$$

где φ — двухпараметрическая функция, зависящая от свойств среды при $\mathbf{H} = 0$ (см. [4,5]). Задача о теплопроводности (при $\hat{\alpha} = 0$) отличается от задачи о проводимости только обозначениями, так что

$$\varkappa_e = \varkappa_1 f(p, \varkappa_2/\varkappa_1); \tag{8}$$

$$\varkappa_{ae} = \varkappa_{a2} + (\varkappa_{a1} - \varkappa_{a2})\varphi_\varkappa; \quad \varphi_\varkappa = \varphi(p, \varkappa_2/\varkappa_1), \tag{9}$$

где функции f и φ — те же, что и в (6), (7).

Прежде чем перейти к определению тензора $\hat{\alpha}_e$ (или $\hat{\gamma}_e$), рассмотрим следствия из инвариантности уравнений (1), (2) относительно некоторых частных преобразований полей и токов.

3. Преобразования симметрии

1. Нетрудно видеть, что уравнения (1) сохраняют свой вид при преобразовании симметрии, обобщающем рассмотренное в [5,6]

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}', \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}' + \hat{A}_a \mathbf{E}' + \hat{B}_a \mathbf{G}';$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}', \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}' + \hat{C}_a \mathbf{E}' + \hat{D}_a \mathbf{G}'. \tag{10}$$

Здесь $\hat{A}_a, \hat{B}_a, \hat{C}_a, \hat{D}_a$ — независящие от координат антисимметричные тензоры: $A_a^{\alpha\beta} = -A_a^{\beta\alpha}$ и т.д. Для „штрихованной" системы материальные уравнения сохраняют (при $\hat{B}_a = \hat{C}_a$) вид (2), причем

$$\hat{\sigma}'(\mathbf{r}) = \hat{\sigma}(\mathbf{r}) - \hat{A}_a, \ \hat{\gamma}'(\mathbf{r}) = \hat{\gamma}(\mathbf{r}) - \hat{B}_a, \ \hat{\chi}'(\mathbf{r}) = \hat{\chi}(\mathbf{r}) - \hat{D}_a. \tag{11}$$

Аналогичными соотношениями связаны и эффективные характеристики исходной ($\hat{\sigma}_e, \hat{\gamma}_e, \hat{\chi}_e$) и штрихованной ($\hat{\sigma}'_e, \hat{\gamma}'_e, \hat{\chi}'_e$) систем

$$\hat{\sigma}_e = \hat{\sigma}'_e + \hat{A}_a, \quad \hat{\gamma}_e = \hat{\gamma}'_e + \hat{B}_a, \quad \hat{\chi}_e = \hat{\chi}'_e + \hat{D}_a. \tag{12}$$

Рассмотрим двухкомпонентную среду и положим $\hat{A}_a = \hat{\sigma}_{a2}$, $\hat{B}_a = \hat{\gamma}_{a2}$ и $\hat{D}_a = \hat{\chi}_{a2}$, где $\hat{\sigma}_{a2}$, $\hat{\gamma}_{a2}$, $\hat{\chi}_{a2}$ — антисимметричные части тензоров $\hat{\sigma}_2$, $\hat{\gamma}_2$, $\hat{\chi}_2$. Тогда в штрихованной системе холловские составляющие второй компоненты равны нулю ($\sigma'_{a2} = 0$, $\gamma'_{a2} = 0$, $\chi'_{a2} = 0$), а для первой имеем $\sigma'_{a1} = \sigma_{a1} - \sigma_{a2}$, $\gamma'_{a1} = \gamma_{a1} - \gamma_{a2}$, $\chi'_{a1} = \chi_{a1} - \chi_{a2}$. Таким образом, величины $\hat{\sigma}'_e$, $\hat{\gamma}'_e$ и $\hat{\chi}'_e$ зависят от холловских составляющих только в виде разностей $\sigma_{a1} - \sigma_{a2}$, $\gamma_{a1} - \gamma_{a2}$ и $\chi_{a1} - \chi_{a2}$. Это означает, согласно (12), что в исходной системе величины σ_{xe}, σ_{ze}, $\sigma_{ae} - \sigma_{a2}$, γ_{xe}, γ_{ze}, $\gamma_{ae} - \gamma_{a2}$, χ_{xe}, χ_{ze}, $\chi_{ae} - \chi_{a2}$ также зависят только от $\sigma_{a1} - \sigma_{a2}$, $\gamma_{a1} - \gamma_{a2}$ и $\chi_{a1} - \chi_{a2}$. Заметим, что выражения (7) и (9) удовлетворяют этим требованиям.

2. Покажем теперь, что в двух частных случаях задача о термогальваномагнитных свойствах может быть решена путем сведе́ния к задачам об электропроводности и теплопроводности, вычисленных без учета термоэлектрических эффектов.

Пусть тензор $\hat{\gamma}$ имеет вид

$$\hat{\gamma}(\mathbf{r}) = \alpha \hat{\sigma}(\mathbf{r}), \tag{13}$$

где α не зависит от координат. С помощью преобразований (ср. с [6,7])

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}'', \quad \mathbf{E} + \alpha\mathbf{G} = \mathbf{E}''; \quad \mathbf{q} = \alpha\mathbf{j}'' + \bar{T}^{-1}\mathbf{q}'', \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}'' \quad (14)$$

приведем исходную задачу к двум независимым задачам

$$\operatorname{div}\mathbf{j}'' = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E}'' = 0, \quad \mathbf{j}'' = \hat{\sigma}(\mathbf{r})\mathbf{E}'', \quad \langle\mathbf{j}''\rangle = \hat{\sigma}_e\langle\mathbf{E}''\rangle;$$

$$\operatorname{div}\mathbf{q}'' = 0, \ \operatorname{rot}\mathbf{G}'' = 0, \ \mathbf{q}'' = \hat{\varkappa}(\mathbf{r})\mathbf{G}'', \ \langle\mathbf{q}''\rangle = \hat{\varkappa}_e\langle\mathbf{G}''\rangle, \quad (15)$$

откуда следует, что эффективные тензоры проводимости $\hat{\sigma}_e$ и теплопроводности $\hat{\varkappa}_e$ имеют тот же вид, что и при $\hat{\alpha} = 0$. Подставляя в $\langle\mathbf{j}''\rangle = \hat{\sigma}_e\langle\mathbf{E}''\rangle$ выражения для $\mathbf{j}''$ и $\mathbf{E}''$ из (14), получим $\langle\mathbf{j}\rangle = \hat{\sigma}_e\langle\mathbf{E}\rangle + \alpha\hat{\sigma}_e\langle\mathbf{G}\rangle$, откуда

$$\hat{\gamma}_e = \alpha\hat{\sigma}_e. \quad (16)$$

К этому же результату приводит и усреднение плотности потока тепла $\mathbf{q} = \alpha\mathbf{j}'' + \bar{T}^{-1}\mathbf{q}''$. Отметим, что из (16) следует

$$\hat{\alpha}_e = \alpha \cdot \hat{1}, \quad \hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда тензор $\hat{\gamma}$ пропорционален тензору $\hat{\chi}$:

$$\hat{\gamma}(\mathbf{r}) = \beta\,\hat{\chi}(\mathbf{r}), \quad (17)$$

где β не зависит от координат. С помощью преобразований

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}''' + \beta\mathbf{q}''', \ \mathbf{E} = \mathbf{E}'''; \ \mathbf{q} = \mathbf{q}''', \ \mathbf{G} + \beta\mathbf{E} = \mathbf{G}''' \quad (18)$$

вновь приводит задачу к двум независимым

$$\operatorname{div}\mathbf{j}''' = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E}''' = 0, \quad \mathbf{j}''' = \hat{\sigma}'''(\mathbf{r})\mathbf{E}''',$$

$$\hat{\sigma}'''(\mathbf{r}) = \hat{\sigma}(\mathbf{r}) - \beta^2\hat{\chi}(\mathbf{r}), \quad \langle\mathbf{j}'''\rangle = \hat{\sigma}_e'''\langle\mathbf{E}'''\rangle;$$

$$\operatorname{div}\mathbf{q}''' = 0, \ \operatorname{rot}\mathbf{G}''' = 0, \ \mathbf{q}''' = \hat{\chi}(\mathbf{r})\mathbf{G}''', \ \langle\mathbf{q}'''\rangle = \hat{\chi}_e\langle\mathbf{G}'''\rangle. \quad (19)$$

Подстановка в $\langle\mathbf{q}'''\rangle = \hat{\chi}_e\langle\mathbf{G}'''\rangle$ выражений для $\mathbf{q}'''$ и $\mathbf{G}'''$ из (18) дает $\langle\mathbf{q}\rangle = \beta\hat{\chi}_e\langle\mathbf{E}\rangle + \hat{\chi}_e\langle\mathbf{G}\rangle$, откуда

$$\hat{\gamma}_e = \beta\hat{\chi}_e. \quad (20)$$

Согласно (19), величина $\hat{\chi}_e$ может быть получена из тензора теплопроводности $\hat{\varkappa}_e$, вычисленного без учета термоэлектрических эффектов, заменами $\varkappa_1 \to \chi_1$, $\varkappa_2 \to \chi_2$. Тензор электропроводности $\hat{\sigma}_e$ определяется с помощью соотношения $\hat{\sigma}_e = \hat{\sigma}_e''' + \beta^2\hat{\chi}_e$.

Несмотря на свою сравнительную простоту, результаты (16) и (20) играют важную конструктивную роль при феноменологическом анализе (см. разд. 4).

4. Феноменологическое рассмотрение

Как показано в работе [5], в случае задачи о гальваномагнитных свойствах двухкомпонентных сред структура эффективного тензора проводимости (при $\mathbf{H} \to 0$) может быть установлена с помощью симметрийных соображений. Подобный феноменологический подход оказывается полезен и при изучении термогальваномагнитных свойств неоднородных сред. Рассмотрим сначала термоэдс α_e при $\mathbf{H} = 0$.

1. Для изотропных двухкомпонентных систем величина α_e в линейном по α приближении должна иметь вид

$$\alpha_e = \alpha_1\Psi_1 + \alpha_2\Psi_2. \quad (21)$$

Здесь коэффициенты Ψ_1 и Ψ_2 зависят только от свойств среды при $\alpha = 0$, т. е. являются трехпараметрическими функциями: $\Psi_i = \Psi_i(p; \sigma_2/\sigma_1, \varkappa_2/\varkappa_1)$.

Выражение (21) справедливо при любых α_1, α_2 и поэтому должно удовлетворять условиям, накладываемым на α_e соотношениями (16) и (20) (при соответствующем выборе величин α_1 и α_2). Положив $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, заключаем, что (21) переходит в $\alpha_e = \alpha$, если $\Psi_1 + \Psi_2 = 1$. Поэтому, обозначив Ψ_2 через Ψ, из (21) получаем

$$\alpha_e = \alpha_1 - (\alpha_1 - \alpha_2)\Psi. \quad (22)$$

В линейном по α приближении из (17) и (20) следует, что при $\alpha_i = (\varkappa_i/\sigma_i)\beta\bar{T}^{-1}$ (где $i = 1, 2$) выражение (22) должно переходить в $\alpha_e = (\varkappa_e/\sigma_e)\beta\bar{T}^{-1}$. Из этого требования определяем функцию Ψ:

$$\Psi = \left(\frac{\varkappa_1}{\sigma_1} - \frac{\varkappa_e}{\sigma_e}\right) \Big/ \left(\frac{\varkappa_1}{\sigma_1} - \frac{\varkappa_2}{\sigma_2}\right). \quad (23)$$

Подстановка (23) в (22) дает окончательно

$$\alpha_e = \alpha_1 + \frac{\sigma_1\sigma_2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sigma_1\varkappa_2 - \sigma_2\varkappa_1}\left(\frac{\varkappa_1}{\sigma_1} - \frac{\varkappa_e}{\sigma_e}\right). \quad (24)$$

Выражение (24) совпадает с точным результатом, полученным другим методом в [6] (см. также [8]). В (23), (24) σ_e и $\varkappa_e$ — эффективные электропроводность и теплопроводность, вычисленные без учета термоэлектрических эффектов, так что они даются формулами (6) и (8). Отметим одну существенную деталь: соотношением (23) трехпараметрическая функция $\Psi(p; \sigma_2/\sigma_1, \varkappa_2/\varkappa_1)$ редуцируется до уровня двухпараметрических функций $f(p, \sigma_2/\sigma_1)$ и $f(p, \varkappa_2/\varkappa_1)$. Именно это обстоятельство позволяет дать последовательную теорию критического поведения термоэдс (см. [6,9]).

2. Рассмотрим теперь холловскую составляющую тензора $\hat{\gamma}_e$. В линейном по $\mathbf{H}$ и $\hat{\gamma}$ (т. е. $\hat{\alpha}$) приближении величина γ_{ae} должна иметь вид

$$\gamma_{ae} = \gamma_{a2} + (\gamma_{a1} - \gamma_{a2})\Psi + (\sigma_{a1} - \sigma_{a2})(\gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2)$$
$$+ (\varkappa_{a1} - \varkappa_{a2})(\gamma_1\Phi_3 + \gamma_2\Phi_4). \quad (25)$$

Здесь зависимость γ_{ae} от γ_{ai}, σ_{ai}, $\varkappa_{ai}$ записана в соответствии с требованиями, вытекающими из преобразования симметрии (10). В (25) коэффициенты Φ,

Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 зависят только от свойств среды при $\mathbf{H}=0$ и $\alpha=0$, т.е. являются трехпараметрическими функциями: $\Phi=\Phi(p;\sigma_2/\sigma_1,\varkappa_2/\varkappa_1)$ и т.д.

Согласно (13), (16), при $\gamma_i=\alpha\sigma_i$, $\gamma_{ai}=\alpha\sigma_{ai}$ выражение (25) должно переходить в $\gamma_{ae}=\alpha\sigma_{ae}$. Из этого требования с учетом (7) получаем

$$\Phi+\sigma_1\Phi_1+\sigma_2\Phi_2=\varphi_\sigma,\quad \sigma_1\Phi_3+\sigma_2\Phi_4=0. \tag{26}$$

Далее, из (17) и (20) следует, что при $\gamma_i=\beta\varkappa_i/\overline{T}$, $\gamma_{ai}=\beta\varkappa_{ai}/\overline{T}$ величина γ_{ae} должна иметь вид $\gamma_{ae}=\beta\varkappa_{ae}/\overline{T}$. В этом случае из (25) и (9) имеем

$$\varkappa_1\Phi_1+\varkappa_2\Phi_2=0,\quad \Phi+\varkappa_1\Phi_3+\varkappa_2\Phi_4=\varphi_\varkappa. \tag{27}$$

Находя из (26), (27) функции Φ_1, Φ_2, Φ_3 и Φ_4, получаем окончательно

$$\gamma_{ae}=\gamma_{a2}+(\gamma_{a1}-\gamma_{a2})\Phi-(\sigma_{a1}-\sigma_{a2})\frac{\gamma_1\varkappa_2-\gamma_2\varkappa_1}{\sigma_1\varkappa_2-\sigma_2\varkappa_1}(\Phi-\varphi_\sigma)$$
$$+(\varkappa_{a1}-\varkappa_{a2})\frac{\gamma_1\sigma_2-\gamma_2\sigma_1}{\sigma_1\varkappa_2-\sigma_2\varkappa_1}(\Phi-\varphi_\varkappa), \tag{28}$$

где величины φ_σ, $\varphi_\varkappa$ определены согласно (7), (9) и считаются известными (основные свойства функции $\varphi(p,h)$ рассмотрены в [5]). Эффективный коэффициент Нернста N_e выражается через γ_{ae} из (28) следующим образом:

$$N_e=-\frac{1}{H}\frac{\gamma_{ae}}{\sigma_e}. \tag{29}$$

Отметим, что в работе [2] результат (28) приведен без вывода.

Таким образом, феноменологический подход позволяет найти общий вид величины γ_{ae} (в линейном по $\mathbf{H}$ и α приближении) с точностью до одной новой неизвестной функции Φ. В выражении (28) в явном виде выделена зависимость γ_{ae} от всех термогальваномагнитных характеристик компонент. Зависимость же γ_{ae} от основных параметров p, σ_2/σ_1, $\varkappa_2/\varkappa_1$ содержится в функциях Φ и φ_σ, $\varphi_\varkappa$. К сожалению, в общем случае не удается произвести редукцию трехпараметрической функции Φ до уровня двухпараметрических. Это обстоятельство не позволяет в настоящее время дать последовательное описание критического поведения величины γ_{ae} при произвольных значениях входящих в задачу параметров. Предварительно нужно численными методами исследовать функцию $\Phi(p;\sigma_2/\sigma_1,\varkappa_2/\varkappa_1)$ и выяснить ее критическое поведение, которое может быть достаточно сложным (ср. с термоэдс [6,9]). Впрочем, упомянутая редукция функции Φ и, соответственно, последовательное описание критического поведения величины γ_{ae} могут быть произведены в двух предельных случаях (см. разд. 5).

5. Основные свойства функции Φ

Величина γ_{ae} может быть найдена также из „первых принципов", т.е. непосредственным решением уравнений (1), (2). При этом считаются известными решения стандартных задач о проводимости и теплопроводности среды при $\mathbf{H}=0$ и $\alpha=0$. Эффективные термогальваномагнитные характеристики системы ищутся с помощью теории возмущений — разложением по степеням $\mathbf{H}$ и α. Подобным методом ранее были рассмотрены гальваномагнитные [5] и термоэлектрические [10] свойства неоднородных сред.

Обозначим через $\mathbf{E}^{(\nu)}(\mathbf{r})$, $\mathbf{G}^{(\nu)}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{j}^{(\nu)}(\mathbf{r})$, $\mathbf{q}^{(\nu)}(\mathbf{r})$ напряженности полей и плотности токов в среде (в точке $\mathbf{r}$), определенные при заданных значениях $\langle\mathbf{E}^{(\nu)}\rangle$, $\langle\mathbf{G}^{(\nu)}\rangle$, где индекс ν означает, что среднее поле направлено вдоль оси ν. Для этих величин может быть доказан ряд тождеств (ср. с [5,10])

$$\langle\mathbf{E}^{(\mu)}\mathbf{j}^{(\nu)}\rangle=\langle\mathbf{E}^{(\mu)}\rangle\langle\mathbf{j}^{(\nu)}\rangle,\quad \langle\mathbf{G}^{(\mu)}\mathbf{q}^{(\nu)}\rangle=\langle\mathbf{G}^{(\mu)}\rangle\langle\mathbf{q}^{(\nu)}\rangle;$$
$$\langle[\mathbf{E}^{(\mu)},\mathbf{G}^{(\nu)}]\rangle=\left[\langle\mathbf{E}^{(\mu)}\rangle,\langle\mathbf{G}^{(\nu)}\rangle\right], \tag{30}$$

справедливых при $V\to\infty$. В (30) квадратная скобка означает векторное произведение.

Согласно (28), для определения неизвестной функции Φ достаточно рассмотреть случай $\sigma_{ai}=0$, $\varkappa_{ai}=0$. Воспользуемся этим обстоятельством для упрощения задачи. В линейном по $\mathbf{H}$ и α приближении из тождеств (30) методом работ [5,10] для γ_{ae} получаем выражение (28) (с $\sigma_{ai}=0$ и $\varkappa_{ai}=0$), причем

$$\Phi=\langle[\mathbf{E}_0^{(\mu)},\mathbf{G}_0^{(\nu)}]_z-[\mathbf{E}_0^{(\nu)},\mathbf{G}_0^{(\mu)}]_z\rangle^{(1)}$$
$$\times\left\{[\langle\mathbf{E}_0^{(\mu)}\rangle,\langle\mathbf{G}_0^{(\nu)}\rangle]_z-[\langle\mathbf{E}_0^{(\nu)}\rangle,\langle\mathbf{G}_0^{(\mu)}\rangle]_z\right\}^{-1}\quad(\nu\neq\mu). \tag{31}$$

Значок z у квадратных скобок означает, что берется z-составляющая векторного произведения. В (31) в величинах $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ и $\mathbf{G}_0(\mathbf{r})$ следует положить $\mathbf{H}=0$ и $\alpha=0$. Интегрирование в

$$\langle(\ldots)\rangle^{(1)}=\frac{1}{V}\int\limits_{V_1}(\ldots)\,d\mathbf{r}$$

ведется по объему первой компоненты.

Таким образом, формула (31) дает выражение для функции Φ через напряженности полей $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ и $\mathbf{G}_0(\mathbf{r})$, определенных при $\mathbf{H}=0$ и $\alpha=0$, т.е. через решения стандартных задач о проводимости и теплопроводности. При численном исследовании функции Φ оси μ и ν удобно направить вдоль x и y соответственно. В этом случае формула (31) совпадает с выражением для Φ, приведенным в работе [2]. Отметим, что замена $\sigma_i\rightleftarrows\varkappa_i$ эквивалентна перестановке $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})\rightleftarrows\mathbf{G}_0(\mathbf{r})$, так что из (31) следует

$$\Phi(p;\sigma_2/\sigma_1,\varkappa_2/\varkappa_1)=\Phi(p;\varkappa_2/\varkappa_1,\sigma_2/\sigma_1). \tag{32}$$

Согласно [5], для функций φ_σ и $\varphi_\varkappa$ имеем

$$\varphi_\sigma=\frac{\langle[\mathbf{E}_0^{(\mu)},\mathbf{E}_0^{(\nu)}]_z\rangle^{(1)}}{[\langle\mathbf{E}_0^{(\mu)}\rangle,\langle\mathbf{E}_0^{(\nu)}\rangle]_z},\quad \varphi_\varkappa=\frac{\langle[\mathbf{G}_0^{(\mu)},\mathbf{G}_0^{(\nu)}]_z\rangle^{(1)}}{[\langle\mathbf{G}_0^{(\mu)}\rangle,\langle\mathbf{G}_0^{(\nu)}\rangle]_z}, \tag{33}$$

где $\langle(\ldots)\rangle^{(1)}$ — то же, что и в (31). Сравнение (33) с (31) показывает, что

$$\varphi_\sigma = \Phi(p;\sigma_2/\sigma_1,\sigma_2/\sigma_1),\ \ \varphi_\varkappa = \Phi(p;\varkappa_2/\varkappa_1,\varkappa_2/\varkappa_1), \quad (34)$$

т.е. φ_σ и $\varphi_\varkappa$ являются двумя предельными значениями функции $\Phi(p;\sigma_2/\sigma_1,\varkappa_2/\varkappa_1)$.

При $\varkappa_1=\varkappa_2$ величина $\mathbf{G}_0^{(\nu)}(\mathbf{r})$ не зависит от координат и равна $\langle\mathbf{G}_0^{(\nu)}\rangle$. Так как (см., например, [5])

$$\langle\mathbf{E}_0^{(\nu)}\rangle^{(1)} = \frac{\sigma_e-\sigma_2}{\sigma_1-\sigma_2}\langle\mathbf{E}_0^{(\nu)}\rangle,$$

при $\varkappa_1=\varkappa_2$ из (31) получаем

$$\Phi(p;h,1)=\frac{f-h}{1-h},\quad h=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \quad (35)$$

В этом случае, аналогично [5], может быть дана последовательная теория критического поведения величины γ_{ae} и, следовательно, эффективного коэффициента Нернста N_e.

При выполнении закона Видемана–Франца

$$\frac{\varkappa_1}{\sigma_1}=\frac{\varkappa_2}{\sigma_2}$$

в выражении (28), в силу соотношений (34), имеются математические неопределенности типа „нуль делить на нуль“. Для раскрытия этих неопределенностей заметим, что из определений (31) и (33) при $\delta h\to 0$ следует

$$\Phi(p;h,h+\delta h)-\varphi(p,h)=\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial h}\delta h. \quad (36)$$

Поэтому, положив $\varkappa_2/\varkappa_1=h+\delta h$ (где $h=\sigma_2/\sigma_1$), из (28) в пределе $\delta h\to 0$ находим

$$\gamma_{ae}=\gamma_{a2}+(\gamma_{a1}-\gamma_{a2})\,\varphi(p,h) - \frac{1}{2}\sigma_2(\alpha_1-\alpha_2)\left(\frac{\sigma_{a1}-\sigma_{a2}}{\sigma_1}+\frac{\varkappa_{a1}-\varkappa_{a2}}{\varkappa_1}\right)\frac{\partial\varphi(p,h)}{\partial h}. \quad (37)$$

В соответствии с (37) критическое поведение величины γ_{ae} в данном случае определяется функцией $\varphi(p,h)$, свойства которой вблизи порога протекания рассмотрены в [5]. Отметим, что для решеточной модели функция $\varphi(p,h)$ и ее производная $\partial\varphi(p,h)/\partial h$ вычислены и затабулированы в графическом виде в широкой области изменения аргументов p и h (см. [11,12]).

Согласно [3], в линейном по $\mathbf{H}$ приближении термогальваномагнитные явления в изотропных средах характеризуются тремя коэффициентами

$$R=\frac{1}{H}\frac{\sigma_a}{\sigma^2},\quad L=\frac{\varkappa_a}{H},\quad N=-\frac{1}{H}\frac{\gamma_a}{\sigma}, \quad (38)$$

к которым следует добавить термоэдс α, а также проводимость σ и теплопроводность $\varkappa$. В соответствии с результатами, полученными в [5,6,10] и в настоящей работе, эффективные величины σ_e, $\varkappa_e$, α_e, R_e, L_e и N_e могут быть выражены через две не определяемые в теории функции f и Φ. Поэтому табулирование этих функций численными методами позволит дать в линейном по $\mathbf{H}$ и α приближении описание всей совокупности электрофизических свойств изотропных двухкомпонентных сред (композитов). Заметим также, что между различными эффективными характеристиками этих сред может быть установлен ряд связей (корреляций) (см., например, [1,5,9]).

6. Двумерный случай

Как уже отмечалось, для двумерных двухкомпонентных изотропных систем задача о термогальваномагнитных свойствах имеет точное решение при произвольных $\mathbf{H}$ и α (см. [1]). Поэтому представляет значительный интерес проверка методов настоящей работы на этом точно решаемом примере в линейном по $\mathbf{H}$ и α приближении.

Методами работы [5] можно доказать тождество

$$\langle[\mathbf{j}^{(\mu)},\mathbf{q}^{(\nu)}]_z\rangle=[\langle\mathbf{j}^{(\mu)}\rangle,\langle\mathbf{q}^{(\nu)}\rangle]_z, \quad (39)$$

справедливое для двумерных систем. Распишем (39) и последнее равенство из (30) при $\mathbf{H}=0$ и $\alpha=0$ в виде сумм по отдельным компонентам

$$\sigma_1\varkappa_1\langle[\mathbf{E}_0^{(\mu)},\mathbf{G}_0^{(\nu)}]_z\rangle^{(1)}+\sigma_2\varkappa_2\langle[\mathbf{E}_0^{(\mu)},\mathbf{G}_0^{(\nu)}]_z\rangle^{(2)} = \sigma_e\varkappa_e[\langle\mathbf{E}_0^{(\mu)}\rangle,\langle\mathbf{G}_0^{(\nu)}\rangle]_z,$$

$$\langle[\mathbf{E}_0^{(\mu)},\mathbf{G}_0^{(\nu)}]_z\rangle^{(1)}+\langle[\mathbf{E}_0^{(\mu)},\mathbf{G}_0^{(\nu)}]_z\rangle^{(2)}=[\langle\mathbf{E}_0^{(\mu)}\rangle,\langle\mathbf{G}_0^{(\nu)}\rangle]_z, \quad (40)$$

где $\langle(\ldots)\rangle^{(i)}$ — интеграл по объему i-й компоненты, деленный на объем образца V. Определив из (40) величину $\langle[\mathbf{E}_0^{(\mu)},\mathbf{G}_0^{(\nu)}]_z\rangle^{(1)}$, из (31) находим функцию Φ:

$$\Phi(p;\sigma_2/\sigma_1,\varkappa_2/\varkappa_1)=\frac{\sigma_e\varkappa_e-\sigma_2\varkappa_2}{\sigma_1\varkappa_1-\sigma_2\varkappa_2}. \quad (41)$$

Из (41) с учетом (34) получаем

$$\varphi_\sigma=\frac{\sigma_e^2-\sigma_2^2}{\sigma_1^2-\sigma_2^2},\quad \varphi_\varkappa=\frac{\varkappa_e^2-\varkappa_2^2}{\varkappa_1^2-\varkappa_2^2}, \quad (42)$$

что согласуется с [5]. Записывая функции φ_σ, $\varphi_\varkappa$ и Φ в виде

$$\varphi_\sigma=1+\frac{\sigma_e^2-\sigma_1^2}{\sigma_1^2-\sigma_2^2},\quad \varphi_\varkappa=1+\frac{\varkappa_e^2-\varkappa_1^2}{\varkappa_1^2-\varkappa_2^2},$$

$$\Phi=1+\frac{\sigma_e\varkappa_e-\sigma_1\varkappa_1}{\sigma_1\varkappa_1-\sigma_2\varkappa_2}$$

и подставляя их в (28), для величины γ_{ae} получаем выражение, совпадающее с формулой (29) из [1].

Список литературы

[1] Б.Я. Балагуров. ФТТ, **28**, 2068 (1986).
[2] Б.Я. Балагуров. ФТТ, **30**, 3501 (1988).
[3] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Электродинамика сплошных сред* (М., Наука, 1992).
[4] D.J. Bergman, D. Stroud. Phys. Rev. B **32**, 6097 (1985).
[5] Б.Я. Балагуров. ЖЭТФ, **93**, 1888 (1987).
[6] Б.Я. Балагуров. ЖЭТФ, **85**, 568 (1983).
[7] Б.Я. Балагуров. ФТП, **16**, 259 (1982).
[8] V. Halpern. J. Phys., **C16**, L217 (1983).
[9] Б.Я. Балагуров. ФТП, **20**, 1276 (1986).
[10] Б.Я. Балагуров. ФТП, **21**, 1978 (1987).
[11] Б.Я. Балагуров, В.А. Кашин. ЖЭТФ, **110**, 1001 (1996).
[12] Б.Я. Балагуров, В.А. Кашин. ЖЭТФ, **121**, 770 (2002).

Редактор Л.В. Беляков

On the Nernst coefficient of binary composites in a weak magnetic field

B.Ya. Balagurov

Emanuel' Institute of Biochemical Physics,
Russian Academy of Sciences,
119991 Moscow, Russia

Abstract Thermogalvanomagnetic properties of two-component isotropic composites are considered in a linear (on magnetic field **H** and thermoelectric power α) approximation. It is shown that the effective Nernst coefficient contains three-parametric function Φ, which can be expressed through the electrical field and temperature gradient in the medium at $\mathbf{H} = 0$ and $\alpha = 0$. It allows us to estimate Φ by numerical methods.