03

Поперечные составляющие электромагнитного поля в волноводе с модулированным в пространстве и во времени магнитодиэлектрическим заполнением

 Э.А. Геворкян

Московский университет им. С.Ю. Витте,
115432 Москва, Россия

e-mail: gevor_mesi@mail.ru

Поступила в редакцию 12.06.2022 г.
В окончательной редакции 15.07.2022 г.
Принята к публикации 15.07.2022 г.

Рассмотрено распространение поперечно-магнитных (ТМ) и поперечно-электрических (ТЕ) электромагнитных волн в регулярном идеальном волноводе произвольного поперечного сечения. Предположено, что диэлектрическая и магнитная проницаемости магнитодиэлектрического заполнения волновода являются функциями, зависящими от координаты и от времени. Из системы уравнений Максвелла получены аналитические выражения для поперечных составляющих магнитного и электрического векторов ТМ- и ТЕ-полей в волноводе. Они выражаются через продольные составляющие электрического и магнитного векторов, с помощью которых описываются поперечно-магнитное и поперечно-электрическое поля в волноводе. Для указанных выше продольных составляющих электрического и магнитного векторов приведены волновые уравнения, которые также получаются из системы уравнений Максвелла.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, распространение электромагнитных волн, волновод с модулированным заполнением, поперечные компоненты, уравнения Гельмгольца, задачи Дирихле и Неймана.

DOI: 10.21883/OS.2022.10.53624.3813-22

Введение

Изучение особенностей распространения электромагнитных волн в неограниченных и ограниченных средах (в частности, в волноводах произвольного поперечного сечения), диэлектрическая и магнитная проницаемости которых зависят от координаты и от времени (особенно когда эта зависимость имеет периодический характер), является одной из основных задач электромагнитной теории. Такие исследования в волноводах имеют важное значение и для развития теории электродинамики модулированных сред, и для возможностей практического применения вышеуказанных волноводов в СВЧ электронике [1–7]. В настоящей работе показано, что продольные компоненты электрического и магнитного векторов $(E_z(x,y,z,t), H_z(x,y,z,t))$, которые удовлетворяют соответствующим волновым уравнениям, могут определить ТМ- и ТЕ-поля в волноводе с модулированным заполнением. Из системы уравнений Максвелла получены аналитические выражения для поперечных составляющих электрического и магнитного векторов, выраженные через продольные составляющие для ТМ- и ТЕ-полей в волноводе с модулированным магнитодиэлектрическим заполнением. С помощью этих аналитических выражений по теореме Пойнтинга можно вычислить энергии переходного излучения заряженной частицы при ее равномерном движении в волноводе (вдоль оси или перпендикулярно оси), магнитодиэлектрическое заполнение которого модулировано в пространстве и во времени, в частности, по периодическому закону.

Постановка задачи и ее решение

Пусть вдоль оси идеального регулярного волновода произвольного поперечного сечения распространяется электромагнитная волна с частотой ω_0. Предполагается, что волна распространяется в положительном направлении оси OZ некоторой декартовой системы координат (ось OZ совпадает с осью волновода), а диэлектрическая и магнитная проницаемости заполнения волновода волной накачки модулированы в пространстве и во времени $(\varepsilon(z,t), \mu(z,t))$, например, по гармоническому закону при условии малых глубин модуляции (на практике они порядка 10^{-4}, см., например, формулы (1) и (2) работы [7]). Отметим, что поперечно-магнитное поле в волноводе $(H_z = 0,\ E_z \neq 0)$ в рассматриваемой задаче полностью описывается с помощью продольной составляющей электрического вектора $E_z(x,y,z,t)$ [2]. Из системы уравнений Максвелла

$$\text{I. rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{II. rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\text{III. div}\mathbf{D} = 0, \quad \text{IV. div}\mathbf{B} = 0, \tag{2}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon(z,t)\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0\mu(z,t)\mathbf{H},$$

где $\varepsilon_0 = (36\pi \cdot 10^9)^{-1}$ F/m — электрическая постоянная, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m — магнитная постоянная, для продольной составляющей электрического вектора $(E_z(x, y, z, t))$ можно получить волновое уравнение вида

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial(\varepsilon E_z)}{\partial z}\right)-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\,\frac{\partial(\varepsilon E_z)}{\partial t}\right)=0. \qquad (3)$$

В частном случае периодической зависимости ε и μ от z и от t и в предположении малых глубин модуляции уравнение (3) можно решить методом, разработанным автором в [2], и найти аналитическое выражение для $E_z(x, y, z, t)$.

Система уравнений Максвелла позволяет выразить поперечные составляющие электрического и магнитного векторов ТМ-поля через $E_z(x, y, z, t)$. На самом деле из второго уравнения Максвелла следует, что

$$(\mathrm{rot}\mathbf{E})_z=-\mu_0\,\frac{\partial(\mu H_z)}{\partial t}. \qquad (4)$$

И так как для ТМ-поля $H_z=0$, то $(\mathrm{rot}\mathbf{E})_z=0$ или

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=0. \qquad (5)$$

Заметим, что из третьего уравнения Максвелла имеем

$$\mathrm{div}\mathbf{D}=\mathrm{div}(\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E})=\varepsilon_0\,\frac{\partial(\varepsilon E_x)}{\partial x}+\varepsilon_0\,\frac{\partial(\varepsilon E_y)}{\partial y}+\varepsilon_0\,\frac{\partial(\varepsilon E_z)}{\partial z}=0$$

или

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}=-\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial(\varepsilon E_z)}{\partial z}. \qquad (6)$$

Продифференцировав (5) по y и (6) по x, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}=0,\\ \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial y\partial x}=-\dfrac{1}{\varepsilon}\,\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial(\varepsilon E_z)}{\partial z}\right).\end{cases} \qquad (7)$$

Из системы (7) с учетом того, что

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 E_y}{\partial x\partial y},$$

(смешанные частные производные второго порядка равны, так как они являются непрерывными функциями по x и по y), следует

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}=-\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(\varepsilon E_z)}{\partial z}\right). \qquad (8)$$

Отметим, что аналогично из (5) и (6) имеем

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}=-\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(\varepsilon E_z)}{\partial z}\right). \qquad (9)$$

Далее, с помощью первого и четвертого уравнений Максвелла и с учетом того, что смешанные частные производные второго порядка от H_x и H_y по переменным x и y равны, можно получить

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2}=-\varepsilon_0\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(\varepsilon E_z)}{\partial t}\right), \qquad (10)$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2}=\varepsilon_0\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(\varepsilon E_z)}{\partial t}\right). \qquad (11)$$

При решении задач электродинамики в волноводах, заполненных магнитодиэлектрической средой, диэлектрическая и магнитная проницаемости которой зависят от z и от t, в случае ТМ-поля векторы электрического и магнитного полей представляются в виде разложения по собственным функциям $\psi_n(x, y)$ первой краевой задачи (задача Дирихле) для поперечного сечения волновода, т. е.

$$\mathbf{E}(x, y, z, t)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}_n(z, t)\psi_n(x, y),$$
$$\mathbf{H}(x, y, z, t)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{H}_n(z, t)\psi_n(x, y). \qquad (12)$$

В (12) ортонормированные функции $\psi_n(x, y)$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца с соответствующим граничным условием [6]

$$\frac{\partial^2\psi_n(x, y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_n(x, y)}{\partial y^2}+\lambda_n^2\psi(x, y)=0,$$
$$\psi_n(x, y)\Big|_{\Sigma}=0, \qquad (13)$$

где λ_n — собственные значения задачи Дирихле, Σ — контур поперечного сечения волновода.

Согласно (12), компоненты электрического и магнитного векторов ТМ-поля имеют вид

$$E_z(x, y, z, t)=\sum_{n=0}^{\infty}E_n^z(z, t)\psi_n(x, y)=\sum_{n=0}^{\infty}E_n(z, t)\psi_n(x, y), \qquad (14)$$

$$E_x(x, y, z, t)=\sum_{n=0}^{\infty}E_n^x(z, t)\psi_n(x, y), \qquad (15)$$

$$E_y(x, y, z, t)=\sum_{n=0}^{\infty}E_n^y(z, t)\psi_n(x, y), \qquad (16)$$

$$H_x(x, y, z, t)=\sum_{n=0}^{\infty}H_n^x(z, t)\psi_n(x, y), \qquad (17)$$

$$H_y(x, y, z, t)=\sum_{n=0}^{\infty}H_n^y(z, t)\psi_n(x, y). \qquad (18)$$

Теперь с помощью (8)−(11), (13) и (14)−(18) для поперечных составляющих электрического и магнитного векторов получим следующие выражения:

$$E_x(x,y,z,t) = \\ = \frac{1}{\varepsilon(z,t)} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-2} \frac{\partial(\varepsilon(z,t)E_n(z,t))}{\partial z} \frac{\partial \psi_n(x,y)}{\partial x},$$

$$E_y(x,y,z,t) = \\ = \frac{1}{\varepsilon(z,t)} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-2} \frac{\partial(\varepsilon(z,t)E_n(z,t))}{\partial z} \frac{\partial \psi_n(x,y)}{\partial y},$$

$$H_x(x,y,z,t) = \\ = \varepsilon_0 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-2} \frac{\partial(\varepsilon(z,t)E_n(z,t))}{\partial t} \frac{\partial \psi_n(x,y)}{\partial y},$$

$$H_y(x,y,z,t) = \\ = -\varepsilon_0 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-2} \frac{\partial(\varepsilon(z,t)E_n(z,t))}{\partial t} \frac{\partial \psi_n(x,y)}{\partial x}$$

или

$$\mathbf{E}_\tau^{(TM)}(x,y,z,t) = \\ = \frac{1}{\varepsilon(z,t)} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-2} \frac{\partial(\varepsilon(z,t)E_n(z,t))}{\partial z} \nabla \psi_n(x,y), \quad (19)$$

$$\mathbf{H}_\tau^{(TM)}(x,y,z,t) = \\ = -\varepsilon_0 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-2} \frac{\partial(\varepsilon(z,t)E_n(z,t))}{\partial t} [\mathbf{z}_0 \nabla \psi_n(x,y)], \quad (20)$$

где $\nabla = \mathbf{i}(\partial/\partial x) + \mathbf{j}(\partial/\partial y)$, $\mathbf{z}_0 = \{0, 0, 1\}$, индекс τ указывает на поперечные составляющие.

Отметим также, что если задачи электродинамики в волноводах относятся к поперечно-электрическому полю ($E_z = 0, H \neq 0$), то пользуемся разложением векторов $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ и $\mathbf{H}(x,y,z,t)$ по собственным функциям $\widehat{\psi}_n(x,y)$ второй краевой задачи для поперечного сечения волновода (задача Неймана), т.е.

$$\mathbf{E}(x,y,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_n(z,t) \widehat{\psi}_n(x,y),$$

$$\mathbf{H}(x,y,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{H}_n(z,t) \widehat{\psi}_n(x,y), \quad (21)$$

где функции $\widehat{\psi}_n(x,y)$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца с соответствующим граничным условием [6]:

$$\frac{\partial^2 \widehat{\psi}_n(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \widehat{\psi}_n(x,y)}{\partial y^2} + \widehat{\lambda}_n^2 \widehat{\psi}_n(x,y) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial^2 \widehat{\psi}_n(x,y)}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Sigma} = 0. \quad (22)$$

В (22) $\widehat{\lambda}_n^2$ — собственные значения задачи Неймана, а $\mathbf{n}$ — нормальный вектор к Σ. В случае TE-поля аналогично удается из системы уравнений Максвелла поперечные составляющие электрического и магнитного векторов выразить через продольную составляющую магнитного вектора, а также получить волновое уравнение для $H_z(x,y,z,t)$. Вычисления приводят к следующим выражениям:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial(\mu H_z)}{\partial z}\right) - \\ - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon \frac{\partial(\mu H_z)}{\partial t}\right) = 0, \quad (23)$$

$$\mathbf{E}_\tau^{(TE)}(x,y,z,t) = \\ = \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\lambda}_n^{-2} \frac{\partial(\mu(z,t)H_n(z,t))}{\partial t} [\mathbf{z}_0 \nabla \widehat{\psi}_n(x,y)], \quad (24)$$

$$\mathbf{H}_\tau^{(TE)}(x,y,z,t) = \\ = \frac{1}{\mu(z,t)} \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\lambda}_n^{-2} \frac{\partial(\mu(z,t)H_n(z,t))}{\partial z} \nabla \widehat{\psi}_n(x,y).$$

Заключение

Результаты настоящей работы показывают, что метод разложения электрического и магнитного векторов TM- и TE-полей в волноводе по собственным функциям первой и второй краевых задач для поперечного сечения волновода (задачи Дирихле и Неймана) при решении задач распространения электромагнитных TM- и TE-волн в волноводе с нестационарным и неоднородным магнитодиэлектрическим заполнением позволяет поперечные компоненты TM- и TE-полей выразить через продольные компоненты электрического и магнитного векторов. Полученные аналитические выражения для поперечных компонент TM- и TE-полей имеют важное значение при решении задач переходного и черенковского излучения равномерно движущихся источников в волноводе с модулированным в пространстве и во времени заполнением. С их помощью по теореме Пойнтинга можно вычислить энергию излучения.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] К.А. Барсуков. Радиотехника и электроника, **9** (7), 1173 (1964).
[2] Charles Elachi. Proceedings of the IEEE, **64** (12), 1666 (1976). DOI: 10.1109/PROC.1976.10409 [Ш. Элаши. ТИИЭР, **64** (12), 22 (1976)].
[3] E.A. Gevorkyan. *Wave Propagation*, ed. by A. Petrin. Chapter 13 (InTech, Croatia, 2011). DOI: 10.5772/584. [Электронный ресурс]. URL: www.intechopen.com
[4] A. Yariv, P. Yeh. *Optical Electronics in Modern Communications, 6-th edition* (Oxford University Press, New York, 2007).
[5] A. Yariv, P. Yeh. *Optical Waves in Crystals* (Wiley-Interscience Publication, New York, 1984).
[6] А.С. Ильинский. Радиотехника и электроника, **64** (8), 735 (2019). DOI: 10.1134/S0033849419080060 [A.S. Ilinskii. J. Communications Technology and Electronics, **64** (8), 723 (2019). DOI: 10.1134/S1064226919080060].
[7] Э.А. Геворкян. Опт. и спектр., **129** (7), 899 (2021). DOI: 10.21883/OS.2021.07.51081.1865-21 [E.A. Gevorkyan. Opt. Spectrosc., **129** (7), 899 (2021). DOI: 10.1134/S0030400X21070079].