

10,04

Квазилокальные колебания в аморфных твердых телах с точки зрения теории негауссовых случайных матриц

© Д.А. Коных, Я.М. Бельтюков

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе,
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: conyuh.dmitrij@yandex.ru

Поступила в Редакцию 30 августа 2022 г.

В окончательной редакции 30 августа 2022 г.

Принята к публикации 4 сентября 2022 г.

В рамках модели коррелированных случайных матриц изучены статистические особенности квазилокальных колебаний неупорядоченных систем. Показано, что статистика матричных элементов динамической матрицы сильно влияет на свойства таких колебаний. Наиболее низкочастотная часть плотности состояний квазилокальных колебаний описывается выражением $\rho_{\text{qlv}}(\omega) \propto \omega^n$, где степень n является числом соседних атомов. Однако при большой степени негауссовости распределения матричных элементов проявляется дополнительная зависимость $\rho_{\text{qlv}}(\omega) \propto \omega^\gamma$, где степень γ уменьшается по мере увеличения степени негауссовости.

Ключевые слова: квазилокальные колебания, аморфные тела, случайные матрицы.

DOI: 10.21883/FTT.2022.12.53657.465

1. Введение

Низкочастотные свойства аморфных материалов и нанокomпозитов на их основе существенно отличаются от свойств соответствующих кристаллических аналогов, благодаря чему такие неупорядоченные по всему объему материалы вызывают большой интерес. На сегодняшний день известно, что низкочастотная часть колебательных состояний аморфных диэлектриков обусловлена разными типами колебаний [1,2]. Фононы, как колебания с достаточно большой длиной свободного пробега, отвечают за самые низкочастотные свойства неупорядоченных механических систем. По мере своего увеличения длина волны фононов становится сравнимой с их длиной свободного пробега, что приводит к замещению фононов на другой тип колебательных возбуждений — диффузоры, распространяющимся по среде посредством внутренней диффузионной передачи энергии. Переход между фононами и диффузорами известен как кроссовер Иоффе–Регеля [3].

В аморфных материалах переход Иоффе–Регеля занимает целый диапазон частот. Это связано в первую очередь с тем, что фононы испытывают дополнительное рассеяние на разных типах колебаний. Одними из таких типов являются колебания аномально мягких участков аморфных сред, получившие свое название квазилокальные колебания. Это колебания группы атомов, слабо связанных со своим окружением [2]. Мягкие участки образуются в аморфных материалах в ходе их стеклования. Поэтому на количество и свойства квазилокальных колебаний существенно влияют процессы охлаждения стекла.

Квазилокальные колебания являются предметом интенсивных исследований. В работах [4–6] было показано, что квазилокальные колебания определяют основной вклад в рассеяние акустических фононов на частотах порядка 1 ТГц. Исследования сильно переохлажденных модельных стекол показывают, что свойства квазилокальных колебаний не зависят от параметров пространственного масштаба [7,8], скорости и протоколов охлаждения структуры [9–11]. При этом плотность квазилокальных состояний $\rho_{\text{qlv}}(\omega) \propto \omega^\gamma$, $\gamma \approx 4$ для большинства исследованных систем [7,12,13]. Поэтому в обычных аморфных системах вклад квазилокальных колебаний в плотность состояний сложно отличить от рэлеевского рассеяния фононов на беспорядке [7–14], что осложняет их исследование.

На сегодняшний день остается не изученным вопрос о связи квазилокальных колебаний и коррелированного беспорядка, который является важным атрибутом аморфных сред. В результате охлаждения отдельные участки аморфной структуры приходят к метастабильному положению равновесия, находящемуся вблизи потери устойчивости. Из-за микроскопической неупорядоченности стекла это приводит к сильной корреляции силовых констант и внутренней фрустрации [15,16]. В связи с этим при изучении квазилокальных колебаний необходимо учитывать наличие корреляций между силовыми константами.

Вблизи устойчивого положения равновесия малые колебания атомов описываются динамической матрицей M , которая является неотрицательно определенной и всегда может быть представлена в виде

$$\hat{M} = \hat{A}\hat{A}^T. \quad (1)$$

Такое представление позволяет автоматически учесть требование механической устойчивости, поскольку все собственные числа \hat{M} , соответствующие квадратам собственных частот, неотрицательны, и использовать ансамбль Вишарта для описания колебательных свойств с помощью теории случайных матриц [17,18]. В данном ансамбле матричные элементы A_{ij} — случайные числа с некоторым распределением, коррелированные между собой за счет правила сумм, которое для случая одинаковых масс атомов в скалярной модели имеет вид [19]:

$$\sum_i A_{ij} = 0. \quad (2)$$

Это правило соответствует условию трансляционной симметрии механической системы $\sum_i M_{ij} = 0$, учет которой обеспечивает наличие низкочастотных колебаний в виде плоских волн, подчиняющихся закону Дебая [17]. Данный подход позволил описать переход между фононами и диффузонами и образующийся вблизи него бозонный пик [17–19]. Однако остается открытым вопрос о возникновении в такой модели квазилокальных колебаний, и их связи со статистическими особенностями элементов матрицы \hat{A} . Данная работа посвящена ответам на эти вопросы.

2. Мягкие моды в модели случайных матриц

В рассматриваемой модели случайных матриц (1) матрица \hat{A} описывает связи между различными степенями свободы системы. Каждая строка матрицы \hat{A} нумерует степень свободы, а каждый столбец нумерует связь между несколькими степенями свободы с квадратичной потенциальной энергией [19]. Для простоты в данной работе рассматривается скалярная модель смещений атомов, поэтому число степеней свободы равно числу атомов N . Если число связей $K \geq N$, то система обладает макроскопической жесткостью. Главным параметром рассматриваемой модели является $\kappa = (K - N)/N$, который может меняться в широких пределах $0 \leq \kappa < \infty$. Основной интерес представляет случай $\kappa \ll 1$, который соответствует системе с большой флуктуацией силовых констант.

Матрицу \hat{A} можно построить на регулярной решетке, если расположить атомы в ее узлах, по следующим правилам. В случае квадратной матрицы \hat{A} ее матричный элемент A_{ij} — отличное от нуля случайное число, только если атомы с индексами i и j — ближайшие соседи. Такое рассмотрение соответствует локальной флуктуации констант связи, которое наблюдается в аморфных материалах, обладающих только ближним порядком в расположении атомов. Для простоты будем считать, что каждый атом имеет одинаковое число соседей n . Диагональный элемент $A_{ii} = -\sum_{j \neq i} A_{ji}$, что обеспечивает правило сумм (2). Таким образом, каждая строка квадратной матрицы \hat{A} имеет $n + 1$ отличных от

нуля чисел: n случайных независимых чисел и 1 число, равное сумме других n независимых случайных чисел.

В случае $0 < \kappa \leq 1$ прямоугольная матрица \hat{A} может быть получена из двух разных реализаций квадратной матрицы: $\hat{A}^{(0)}$ и $\hat{A}^{(1)}$. В этом случае результирующая прямоугольная матрица \hat{A} строится путем добавления κN случайно выбранных столбцов матрицы $\hat{A}^{(0)}$ к матрице $\hat{A}^{(1)}$ справа.

При построении матрицы \hat{A} существует вероятность того, что все числа, стоящие в некоторых ее строках, имеют малые значения. Это соответствует тому, что данные атомы слабо связаны со своим окружением. Частоты таких квазилокальных колебаний ω_{qlv} будут лежать в низкочастотной области спектра и описываться некоторой плотностью распределения $\rho_{\text{qlv}}(\omega)$, которая связана со статистикой матричных элементов A_{ij} .

Для нахождения плотности состояний квазилокальных колебаний $\rho_{\text{qlv}}(\omega)$ воспользуемся методами теории возмущения. Будем считать, что строка матрицы \hat{A} с индексом l содержит малые числа. Также будем считать, что матричные элементы A_{lj} при $j > N$ равны нулю. Вероятность такого случая равна $(1 - \kappa)^{n+1}$. Тогда матрица \hat{A} может быть представлена следующим образом:

$$\hat{A} = \hat{A}_0 + \hat{V}. \quad (3)$$

Все элементы строки с индексом l матрицы \hat{A}_0 являются нулевыми. Наоборот, матрица \hat{V} содержит отличные от нуля элементы только в строке с индексом l : n ненулевых независимых чисел v_1, \dots, v_n и одно коррелированное число $v_{n+1} = V_{ll} = -\sum_{i \neq l} (\hat{A}_0)_{il}$.

Во втором порядке теории возмущения частота квазилокального колебания ω_{qlv} определяется следующим выражением:

$$\omega_{\text{qlv}}^2 = \{ \hat{V} \hat{H} \hat{V}^T \}_{ii}, \quad (4)$$

где

$$\hat{H} = \hat{I} - \hat{A}_0^T (\hat{A}_0 \hat{A}_0^T)^{-1} \hat{A}_0, \quad (5)$$

и \hat{I} — единичная матрица размером $K \times K$ [20]. Из выражения (4) следует, что ω_{qlv}^2 является суммой квадратичных форм $n + 1$ чисел $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$, соответствующих ненулевым элементам V_{ij} . Поэтому для дальнейшего удобства можно ввести симметричную матрицу

$$\hat{C} = \hat{P} \hat{H} \hat{P}^T, \quad (6)$$

где матрица \hat{P} размером $(n + 1) \times K$ имеет отличные от нуля матричные элементы $P_{kj} = 1$ только для таких индексов, при которых $V_{ij} = v_k$. Тогда частота квазилокального колебания определяется следующим выражением:

$$\omega_{\text{qlv}} = \sqrt{v \hat{C} v^T}, \quad (7)$$

где вектор-строка $v = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ составлен из ненулевых элементов V_{ij} .

Поскольку каждому индексу l соответствует свой набор величин v , то квазилокальные колебания имеют

разброс по частоте (7). При этом в системах малых размеров низкочастотная часть спектра $\omega \ll 1$ обусловлена именно квазилокальными колебаниями. В таких системах число фононов мало, поскольку их минимальная частота колебаний ограничена размерами самой системы. Это позволяет отличить фононную плотность состояний от плотности распределения квазилокальных колебаний.

3. Влияние статистики матричных элементов

Распределение частоты (7) для набора $n + 1$ случайных величин v при $\omega_{qlv} \ll 1$ найдено в Приложении 1. Плотность распределения квазилокальных колебаний $\rho_{qlv}(\omega)$ имеет следующий вид:

$$\rho_{qlv}(\omega) = (1 - \kappa)^{n+1} p \omega^n, \tag{8}$$

где коэффициент

$$p = \langle \det(\hat{C})^{-1/2} \rangle \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \prod_{k=1}^{n+1} \rho_k(0). \tag{9}$$

Угловые скобки соответствуют усреднению по различным реализациям матрицы \hat{A}_0 , Γ — гамма-функция, $\rho_k(0)$ соответствует плотности распределения случайной величины v_k вблизи нуля.

Коэффициент p зависит от параметра системы κ . При малых $\kappa \ll 1$ значения элементов матрицы \hat{C} пропорциональны κ , поэтому

$$\langle \det(\hat{C})^{-1/2} \rangle \propto \kappa^{-\frac{n+1}{2}}. \tag{10}$$

Таким образом, при $\kappa \ll 1$ коэффициент $p \propto \kappa^{-\frac{n+1}{2}}$.

Также коэффициент p зависит и от статистики матричных элементов A_{ij} . Для простоты будем считать, что матричные элементы A_{ij} , соответствующие взаимодействию с ближайшими соседями, распределены независимо с одинаковой дисперсией σ^2 и средним значением равным нулю.

3.1. Гауссова статистика

В случае гауссовой статистики матричных элементов A_{ij} числа v_k подчиняются многомерному гауссовому распределению

$$\rho(v) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n+1} \det \Xi}} e^{-\frac{1}{2} v \Xi^{-1} v^T}, \tag{11}$$

где $\Xi_{km} = \langle v_k v_m \rangle$ — матрица ковариаций, которая в рассматриваемом случае независимого распределения случайных чисел имеет диагональный вид: $\Xi_{km} = \sigma_k^2 \delta_{km}$. Тогда плотность распределения случайной величины v_k вблизи нуля имеет следующий вид:

$$\rho_k(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k}}. \tag{12}$$

При $k \leq n$ среднеквадратичное отклонение $\sigma_k = \sigma$. Однако при $k = n + 1$ среднеквадратичное отклонение $\sigma_{n+1} = \sqrt{n}\sigma$, поскольку величина v_{n+1} является суммой n независимых гауссовых чисел. С учетом этого, коэффициент (9) принимает следующий вид:

$$p = \langle \det(\hat{C})^{-1/2} \rangle \frac{2^{\frac{1-n}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2}) \sigma^{n+1} \sqrt{n}}. \tag{13}$$

3.2. Негауссовая статистика

В разных областях реальных аморфных материалов значения амплитуд силовых констант могут отличаться на несколько порядков [15]. Для достижения такого разброса будем считать, что независимые ненулевые элементы матрицы \hat{A} имеют негауссовое распределение, которое задается как

$$v_k = c \eta_k \exp \xi_k, \quad k \leq n, \tag{14}$$

где η_k — случайное число, имеющее гауссово распределение с нулевым средним и единичной дисперсией, ξ_k — случайное число, распределенное равномерно от $-b/2$ до $b/2$. Нормировочная константа $c = \sigma \sqrt{b/\sinh(b)}$ определяет дисперсию $\langle v_k^2 \rangle = \sigma^2$.

Плотность распределения величины (14) имеет следующий вид:

$$\rho(v_k) = \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{e^{b/2}}{\sqrt{2c}} v_k\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{e^{-b/2}}{\sqrt{2c}} v_k\right)}{2bv_k}. \tag{15}$$

Параметр b определяет степень негауссовости распределения v_k . При $b \ll 1$ распределение случайной величины v_k близко к гауссовому с нулевым средним и дисперсией σ^2 .

Элемент v_{n+1} определяется правилом сумм (2), поэтому он является суммой из n независимых случайных чисел, построенных по правилу (14). Поэтому из формулы (15) следует, что

$$\rho_k(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{bc} \sinh \frac{b}{2}, \quad k \leq n, \tag{16}$$

$$\rho_{n+1}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} c} \left\langle \left(\sum_{i=1}^n e^{2\xi_i} \right)^{-1/2} \right\rangle_{\xi},$$

где угловые скобки соответствуют усреднению по разным случайным числам ξ_i , распределенным равномерно от $-b/2$ до $b/2$. Величина $\rho_{n+1}(0)$ может быть посчитана численно для любого значения параметра b и числа соседей n . С учетом выражения (16), коэффициент (9) принимает следующий вид:

$$p = \langle \det(\hat{C})^{-1/2} \rangle \frac{2^{\frac{1-n}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2}) c^{n+1}} \times \left(\frac{2}{b} \sinh \frac{b}{2} \right)^n \left\langle \left(\sum_{i=1}^n e^{2\xi_i} \right)^{-1/2} \right\rangle_{\xi}. \tag{17}$$

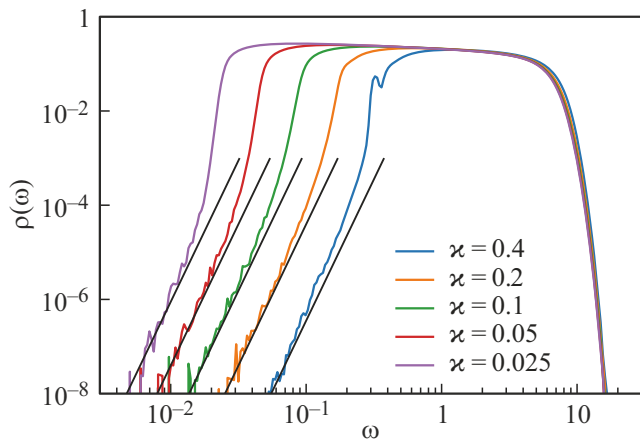


Рис. 1. Плотность колебательных состояний в случае гауссова распределения элементов матрицы \hat{A} с дисперсией $\sigma^2 = 1$ для различных параметров κ . Линии показывают низкочастотный вклад квазилокальных колебаний (8).

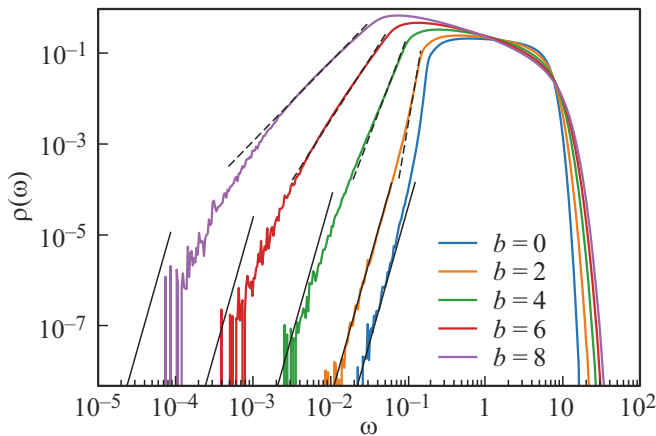


Рис. 2. Плотность колебательных состояний в случае негауссового распределения элементов матрицы \hat{A} с дисперсией $\sigma^2 = 1$ для различных параметров b . Параметр $\kappa = 0.2$. Сплошные линии показывают низкочастотную зависимость (8), пунктирные линии показывают результат для сильно негауссова распределения (23).

На рисунках 1 и 2 полученный аналитический результат для плотности состояний квазилокальных колебаний (8) сравнивается с численным расчетом плотности состояний $\rho(\omega)$ всей системы. Плотность состояний $\rho(\omega)$ найдена путем полной диагонализации динамической матрицы $\hat{M} = \hat{A}\hat{A}^T$ для случая гауссовой статистики элементов матрицы \hat{A} (рис. 1) и для случая их негауссовой статистики (рис. 2). Для этого матрица \hat{A} была построена на простой кубической решетке размером $14 \times 14 \times 14$ с постоянной решетки $a_0 = 1$ и атомными массами $m_i = 1$, и рассмотрена единичная дисперсия матричных элементов $\sigma^2 = 1$. В случае простой кубической решетки число соседних атомов $n = 6$. Для построения гистограмм была проведена численная диагонализация 10^8 случайных матриц.

Сплошные линии на рисунках 1 и 2 показывают хорошее согласие низкочастотной плотности квазилокальных состояний (8) с результатом численного расчета, как в случае гауссовой (рис. 1), так и в случае негауссовой статистики (рис. 2). При этом область частот, в которой выполняется степенная зависимость ω^n зависит как от параметра κ , так и от параметра негауссовости b . При этом для сильно негауссовой статистики ($b > 4$) область выполнения зависимости ω^n выходит за рамки возможностей численного счета. Отметим, что коэффициент перед степенной зависимостью ω^n вычислялся по формуле (8) и не являлся подгоночным параметром. Поэтому сплошные линии на рис. 2 являются низкочастотными асимптотиками для любого значения параметра b .

Таким образом, можно сделать вывод о том, что в данной модели случайных матриц наиболее низкочастотная часть плотности состояний обусловлена квазилокальными колебаниями и имеет степенную зависимость $\rho_{\text{qlv}}(\omega) \propto \omega^n$, где степень n является числом соседних атомов.

4. Сильно негауссовая статистика

В случае $b \gg 1$ статистика матричных элементов является сильно негауссовой и плотность распределения квазилокальных состояний имеет нетривиальную степенную зависимость в центральной области частот (см. штриховые линии на рис. 2). В этом случае величины v_k имеют экспоненциально большой разброс, поэтому частота (7) определяется наибольшим значением v_k :

$$\omega_{\text{qlv}} \approx \max_k |v_k|. \tag{18}$$

Такое приближение хорошо работает в области частот $\omega_0 \ll \omega \ll \omega_1$, где $\omega_0 = ce^{-b/2}$ и $\omega_1 = ce^{b/2}$. При более низких частотах $\omega \ll \omega_0$ применим полученный ранее результат (8).

Для нахождения распределения частоты (18) в случае $b \gg 1$ можно опустить случайные гауссовы величины η_k в выражении (14) и считать, что $|v_k| \approx c \exp \xi_k$. Тогда распределение величины v_k имеет вид

$$\rho(|v_k|) = \frac{1}{b|v_k|}, \quad \omega_0 < |v_k| < \omega_1. \tag{19}$$

Плотность распределения частоты (18) можно определить как

$$\rho_{\text{qlv}}(\omega) = \frac{d}{d\omega} P(|v_k| < \omega)^{2n}, \tag{20}$$

где $P(|v_k| < \omega)$ — вероятность встретить элемент v_k , модуль которого меньше ω . Для распределения (19) такая вероятность имеет вид

$$P(|v_k| < \omega) = \frac{1}{b} \ln \frac{\omega}{\omega_0}. \tag{21}$$

Полученное распределение можно записать как степенное распределение логарифма частоты $\Lambda = \ln(\omega/\omega_0)$:

$$\rho_{\text{qlv}}(\Lambda) = \frac{2n}{b^{2n}} \Lambda^{2n-1}. \tag{22}$$

Соответствующее распределение частоты можно приближенно считать степенным в области $\omega \sim c$, которая представляет наибольший интерес

$$\rho_{\text{qlv}}(\omega) \sim \omega^{\frac{4n-2}{b}-1}. \quad (23)$$

На рис. 2 найденный результат (23) сравнивается с численным расчетом плотности состояний $\rho(\omega)$. Видно, что по мере увеличения параметра негауссовости b количество квазилокальных колебаний увеличивается. При этом в случае сильной негауссовости $b \gg 1$ образуется дополнительная зависимость $\rho_{\text{qlv}}(\omega) \propto \omega^\gamma$ со степенью $\gamma \approx (4n-2)/b - 1$. Этот результат согласуется с результатом численного расчета и отмечен на рис. 2 пунктирной линией. Коэффициент при степенной зависимости (23) выходит за рамки использованного приближения (18), поэтому при построении коэффициента подбирался.

5. Обсуждение результатов

В настоящей работе было проанализировано распределение квазилокальных мод в модели коррелированных случайных матриц. При низких частотах плотность распределения пропорциональна ω^n как для гауссова, так и для негауссова распределения элементов матрицы \hat{A} . При этом, при большом значении параметра негауссовости b проявляется участок частот, при котором плотность распределения пропорциональна ω^γ , где степень γ зависит как от числа соседей, так и от параметра негауссовости b . Можно считать, что параметр b уменьшает эффективное число ближайших соседей до величины γ . Действительно, для сильно негауссового распределения многие элементы v_k имеют относительно малую величину и только наибольшие из них дают вклад в частоту квазилокального колебания. Значение $\gamma \approx 4$, которое наблюдается во многих модельных стеклах, также может быть воспроизведено в данной модели ($b = 4.4$ при $n = 6$). Однако статистика матричных элементов определяется многими факторами, которые происходят при охлаждении модельных систем и получении устойчивой конфигурации атомов. В рамках данной работы, которая учитывает только такие фундаментальные статистические свойства, как устойчивость системы и правило сумм, можно сделать вывод, что $\gamma \approx 4$ является эффективным числом соседних атомов с точки зрения статистических свойств матрицы \hat{A} .

Важным вопросом является пространственное распределение колебаний. В изучаемой системе имеются фононы, минимальная частота которых определяется упругостью и размером системы. Например, на рис. 1 при $\kappa = 0.4$ наименьший по частоте фонон выглядит в виде пика при частоте $\omega \approx 0.35$. Все более низкочастотные колебания являются квазилокальными и сосредоточены вблизи атома с индексом l , которому соответствует мягкая мода.

В данной работе был проведен анализ в скалярной модели колебаний, в которой для простоты считается, что смещения каждого атома из положения равновесия описывается скалярной величиной. Учет векторной природы колебаний усложняет анализ полученных результатов. При этом основной вклад в разброс матричных элементов вносят флуктуации расстояний между атомами, поскольку силовые константы наиболее существенным образом зависят именно от расстояния между атомами, что служит проявлению негауссовой статистике матричных элементов. Поэтому основные выводы данной работы применимы и к векторной модели, в особенности для сильно негауссового распределения матричных элементов.

6. Заключение

В настоящей работе с помощью теории коррелированных случайных матриц исследуются колебательные особенности мягких участков неупорядоченных систем. Было показано, что на количество и свойства таких участков существенно влияет статистика распределения ненулевых элементов коррелированной матрицы \hat{A} . Для этого была найдена и изучена плотность распределения квазилокальных колебаний $\rho_{\text{qlv}}(\omega)$, которая соответствует низкочастотной области спектра в случае малых размеров системы.

Из найденных выражений для $\rho_{\text{qlv}}(\omega)$ получено, что наиболее низкочастотная область колебательных состояний описывается зависимостью $\rho_{\text{qlv}}(\omega) \propto \omega^n$, где степень n является числом соседних атомов. Этот результат согласуется с результатами численного расчета плотности состояний всей системы $\rho(\omega)$, для гауссовой и негауссовой статистики матричных элементов.

При увеличении параметра негауссовости b число квазилокальных колебаний также увеличивается. Анализ плотности колебательных состояний показал, что в этом случае образуется промежуточная зависимость $\rho_{\text{qlv}}(\omega) \propto \omega^\gamma$. Этот результат позволяет описать общепринятую зависимость $\rho_{\text{qlv}}(\omega) \propto \omega^4$, наблюдаемую во многих аморфных системах [7,12,13]. Это свидетельствует о том, что модель случайных коррелированных матриц может применяться для описания колебаний мягких участков аморфных диэлектриков.

Благодарности

Выражаем благодарность за финансовую поддержку Совету по грантам Президента Российской Федерации (грант № МК-1893.2022.1.2).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Приложение 1

При исследовании распределения частоты квазилокальных колебаний возникает задача о нахождении распределения величины

$$\omega = \sqrt{\xi \hat{C} \xi^T}, \quad (24)$$

где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n+1})$ — вектор-строка случайных чисел, а матрица \hat{C} — положительно определенная симметричная матрица. Величина ξ_k имеет распределение ρ_k .

Для решения этой задачи произведем разложение матрицы \hat{C} по собственным числам

$$\hat{C} = \hat{U} \hat{D} \hat{U}^T, \quad (25)$$

где \hat{U} — ортогональная матрица, а диагональная матрица \hat{D} составлена из собственных значений матрицы \hat{C} : $\lambda_c = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}\}$, $\lambda_k > 0$. Тогда

$$\omega = \sqrt{\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k y_k^2}, \quad (26)$$

где величина $y_k = \sum_{m=1}^{n+1} U_{km} \xi_m$.

Вероятность того, что случайная величина (26) меньше некоторого заранее заданного малого числа W определяется объемом $(n+1)$ -мерного шара

$$P(\omega < W) = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}} W^{n+1}}{\Gamma(\frac{n+1}{2} + 1)} \prod_{k=1}^{n+1} \lambda_k^{-1/2} h_k(0), \quad (27)$$

где h_k — плотность распределения y_k .

Воспользуемся тем, что при n -мерном повороте $y = \hat{U} \xi$ не меняется плотность распределения в начале координат $y = \xi = 0$. Кроме этого, произведение всех собственных значений задает определитель матрицы: $\prod_{k=1}^{n+1} \lambda_k = \det \hat{C}$. Поэтому усредненная по различным реализациям матрицы \hat{C} плотность распределения $\rho(\omega)$ при малых $\omega \ll 1$ имеет следующий вид:

$$\rho(\omega) = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}} \omega^n}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \langle \det(\hat{C})^{-1/2} \rangle \prod_{k=1}^{n+1} \rho_k(0). \quad (28)$$

Список литературы

- [1] W.A. Phillips, A.C. Anderson. Amorphous solids: low-temperature properties. Springer (1981). V. 24.
- [2] D.A. Parshin. Sov. Phys. Solid. State **36**, 991 (1994).
- [3] P.B. Allen, J.L. Feldman. Phys. Rev. B **48**, 12581 (1993).
- [4] U. Buchenau, Y.M. Galperin, V.L. Gurevich, H.R. Schober. Phys. Rev. B **43**, 5039 (1991).
- [5] D.A. Parshin. Phys. Rev. B **49**, 9400 (1994).
- [6] W. Ji, M. Popović, T.W.J. de Geus, E. Lerner, M. Wyart. Phys. Rev. E **99**, 023003 (2019).
- [7] G. Kapteijns, E. Bouchbinder, E. Lerner. Phys. Rev. Lett. **121**, 055501 (2018).

- [8] P. Charbonneau, E.I. Corwin, G. Parisi, A. Poncet, F. Zamponi. Phys. Rev. Lett. **117**, 045503 (2016).
- [9] E. Lerner, E. Bouchbinder. Phys. Rev. E **96**, 020104 (2017).
- [10] L. Wang, A. Ninarello, P. Guan, L. Berthier, G. Szamel, E. Flenner. Nature Commun. **10**, 1 (2019).
- [11] C. Rainone, E. Bouchbinder, E. Lerner. Natl. Acad. Sci. **117**, 5228 (2020).
- [12] E. Lerner, G. During, E. Bouchbinder. Phys. Rev. Lett. **117**, 035501 (2016).
- [13] H. Mizuno, H. Shiba, A. Ikeda. Proc. Natl. Acad. Sci. **114**, E9767 (2017).
- [14] M. Shimada, H. Mizuno, A. Ikeda. Soft Matter **16**, 7279 (2020).
- [15] S. Alexander. Phys. Rep. **296**, 65 (1998).
- [16] E. Lerner, E. Bouchbinder. Phys. Rev. E **97**, 032140 (2018).
- [17] Y.M. Beltukov, D.A. Parshin. Phys. Solid State **53**, 151 (2011).
- [18] Y.M. Beltukov, V.I. Kozub, D.A. Parshin. Phys. Rev. B **87**, 134203 (2013).
- [19] D.A. Conyuh, Y.M. Beltukov. Phys. Rev. B **103**, 104204 (2021).
- [20] E. Zurek, O. Jepsen, O.K. Andersen. Chem. Phys. Chem. **6**, 1934 (2005).

Редактор Т.Н. Василевская