01

Бризер малой амплитуды нелинейного уравнения Клейна–Гордона

© Д.В. Завьялов,[1] В.И. Конченков,[1,2] С.В. Крючков[1,2]

[1] Волгоградский государственный технический университет,
400005 Волгоград, Россия
[2] Волгоградский государственный социально-педагогический университет,
400005 Волгоград, Россия
e-mail: kontchenkov@yandex.ru

Поступило в Редакцию 25 мая 2022 г.
В окончательной редакции 10 сентября 2022 г.
Принято к публикации 12 сентября 2022 г.

Представлена методика получения приближенного бризерного решения уравнения Клейна–Гордона. Исследовано бризерное решение уравнения, описывающего распространение нелинейных волн в сверхрешетке на основе графена.

Ключевые слова: уравнение Клейна–Гордона, бегущий бризер, приближенное решение, коэффициент корреляции.

DOI: 10.21883/JTF.2022.12.53741.144-22

Введение

Уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u) = 0, \quad (1)$$

где $F(u)$ — нечетная функция, встречается в различных разделах теоретической и математической физики. Линейная аппроксимация этого уравнения известна в квантовой теории как уравнение Клейна–Гордона, а одним из важнейших (и наиболее распространенных) частных случаев этого уравнения является уравнение синус-Гордона (SG) [1–3]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = 0. \quad (2)$$

Уравнение SG замечательно тем, что имеет решения в виде уединенных волн — солитонов и бризеров. Точное решение уравнения (2) в виде бегущего бризера имеет вид [4–6]:

$$u_\omega(x,t) = 4\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega} \times \frac{\cos\left(\omega\gamma t - \omega x\sqrt{\gamma^2-1}\right)}{\cosh\left(\sqrt{1-\omega^2}\left(\gamma x - t\sqrt{\gamma^2-1}\right)\right)}\right). \quad (3)$$

Здесь $\gamma = (1-V^2)^{-1/2}$, V — групповая скорость распространения импульса.

Работа [2] посвящена численному исследованию кинковых и бризерных решений уравнения синус-Гордона в условиях воздействия „силы“, определяемой функцией Хевисайда $H(\xi)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = F(x,t), \quad (4)$$
$$F(x,t) = AH(t-x).$$

Рассматриваются граничные условия различных типов, в качестве начального условия при решении возмущенного уравнения (4) используются точные решения уравнения (2).

В работе [3] исследуются подобные кинковым решениям одномерного уравнения (2) решения двумерного уравнения синус-Гордона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sigma\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin u = 0, \quad (5)$$

$\sigma = \pm 1$. Здесь рассматривается взаимодействие кинка и антикинка, выводится система уравнений, позволяющая определить ширину и форму как уединенного кинка, так и взаимодействующих друг с другом солитоноподобных импульсов. Обсуждается численная процедура определения центра кинка, вариационная процедура исследования динамики формы одиночного кинка в направлении, перпендикулярном его распространению. Численному исследованию стационарных и бегущих бризерных решений двумерного уравнения синус-Гордона посвящена также работа [7].

Работа [8] посвящена исследованию действительных пространственно-периодических, центрально-симметричных решений уравнения Клейна–Гордона вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m^2 u - \Gamma(x)u^3 = 0. \quad (6)$$

Автор работы [8] называет полученные решения бризерами по аналогии со схожими по свойствам решениями уравнения синус-Гордона. В [8] использована переформулировка уравнения (6) как системы связанных нелинейных уравнений Гельмгольца при определенных условиях на поле в дальней зоне.

Исследованию точных и приближенных бризерных решений различных вариантов уравнения Клейна–Гордона посвящен ряд работ, например, [9,10]. В статье [9] рассматривается численное решение дискретного уравнения Клейна–Гордона, описывающего колебания бесконечной цепочки частиц, связанных с ближайшими соседями, в локальном потенциале V [11]:

$$\frac{d^2x_n}{dt^2} + V'(x_n) = \gamma(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n). \tag{7}$$

В длинноволновом приближении уравнение (7) сводится к уравнению Клейна– Гордона (1).

В работе [11], посвященной исследованию колебаний в одномерной цепочке атомов с учетом ангармонизма, предложен метод приближенного решения уравнения Клейна–Гордона в пределе малых амплитуд ($u \ll 1$). В этом случае уравнение (1) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - \beta u^3 = 0. \tag{8}$$

В работах [11,12] ищется однопараметрическое локализованное периодическое решение в виде

$$u = A(x)\cos(\omega t) + B(x)\cos(3\omega t) + \ldots. \tag{9}$$

Для сходимости решения (9) необходимо положить $|A| \gg |B|\ldots$. В случае малых амплитуд наибольший вклад в решение обеспечивается первым слагаемым, т.е. решение подобно стоячей волне. Подобные решения в литературе иногда называются стоячими (стационарными) бризерами. Например, для уравнения синус-Гордона известно решение [4]:

$$u_\omega(x,t) = 4\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega}\,\frac{\sin(\omega t)}{\cosh(x\sqrt{1-\omega^2})}\right), \tag{10}$$

которое при значениях $\omega \approx 1$ может быть приближенно представлено в виде $y = A(x)\cos\omega t$). Целью настоящей работы является получение решения в виде бегущего бризера нелинейного уравнения Клейна–Гордона (8) с использованием методики, развитой в [11,12].

1. Методика получения приближенного решения нелинейного уравнения Клейна–Гордона в виде бегущего бризера малой амплитуды

Рассмотрим получение приближенного аналитического решения уравнения Клейна–Гордона (1). Как отмечалось, в случае $u \ll 1$ уравнение (1) преобразуется к виду (8). Будем искать решение уравнения (8) в виде ряда (9) с равномерно уменьшающимися коэффициентами перед косинусами. Подставляя (9) в (8) и учитывая, что $|A| \gg |B|$ (для сходимости ряда (9)), получим систему

$$\begin{cases} \frac{d^2A}{dx^2} - (1-\omega^2)A = -\frac{3}{4}\beta A^3, \\ \frac{d^2B}{dx^2} + (9\omega^2-1)B = -\frac{1}{4}\beta A^3. \end{cases} \tag{11}$$

Решая систему в области ограниченных на бесконечности локализованных решений, можно определить функциональный вид бризера малой амплитуды.

Попробуем сконструировать по аналогии с изложенным выше метод нахождения бегущих бризеров малой амплитуды, являющихся решением уравнения (8). По сути, интересующее нас решение — это теперь двухпараметрическое делокализованное периодическое по времени решение. Будем отталкиваться от известного вида такого решения для уравнения sine-Gordon (2), представленного выражением (3). Будем искать решение уравнения (8) в виде

$$\begin{aligned} u = {} & A\Big(\sqrt{1-\omega^2}\big(\gamma x - t\sqrt{\gamma^2-1}\big)\Big) \\ & \times \cos\big(\gamma\omega t - \sqrt{\gamma^2-1}\,\omega x\big) \\ & + B\Big(\sqrt{1-\omega^2}\big(\gamma x - t\sqrt{\gamma^2-1}\big)\Big) \\ & \times \cos\big(3\gamma\omega t - 3\sqrt{\gamma^2-1}\,\omega x\big) + \ldots. \end{aligned} \tag{12}$$

Теперь, следуя предыдущему методу, после подстановки (12) в уравнение (8) и некоторых манипуляций получим систему для определения функций $A(\xi)$, $B(\xi)$, (далее введено обозначение $\xi = \sqrt{1-\omega^2}(\gamma x - t\sqrt{\gamma^2-1})$):

$$\begin{cases} (1-\omega^2)\frac{d^2A}{d\xi^2} - (1-\omega^2)A = -\frac{3}{4}\beta A^3, \\ (1-\omega^2)\frac{d^2B}{d\xi^2} + (9\omega^2-1)B = -\frac{1}{4}\beta A^3. \end{cases} \tag{13}$$

Подходящим нам по свойствам решением первого уравнения в (13) является функция

$$A(\xi) = \left(\frac{8}{3\beta}(1-\omega^2)\right)^{1/2}\frac{1}{\cosh(\xi)}. \tag{14}$$

Для уравнения sine-Gordon $\beta = 1/6$ и в старшем приближении получаем решение

$$u = 4\sqrt{1-\omega^2}\,\frac{\cos(\gamma\omega t - \sqrt{\gamma^2-1}\,\omega x)}{\cosh\big(\sqrt{1-\omega^2}(\gamma x - t\sqrt{\gamma^2-1})\big)}. \tag{15}$$

Из (3) видно, что, по сути, условие $u \ll 1$ означает $\sqrt{1/\omega^2-1} \ll 1 \Longrightarrow \omega \approx 1$. С учетом этого приближенное решение, полученное разложением (3) в ряд, принимает вид

$$u = 4\sqrt{\frac{1}{\omega^2}-1}\,\frac{\cos(\gamma\omega t - \sqrt{\gamma^2-1}\,\omega x)}{\cosh\big(\sqrt{1-\omega^2}(\gamma x - t\sqrt{\gamma^2-1})\big)}. \tag{16}$$

и совпадает с (15).

2. Пример — приближенное бризерное решение уравнения для вектор-потенциала электромагнитного поля в графеновой сверхрешетке

В качестве примера будем рассматривать уравнение, описывающее распространение уединенных электромаг-

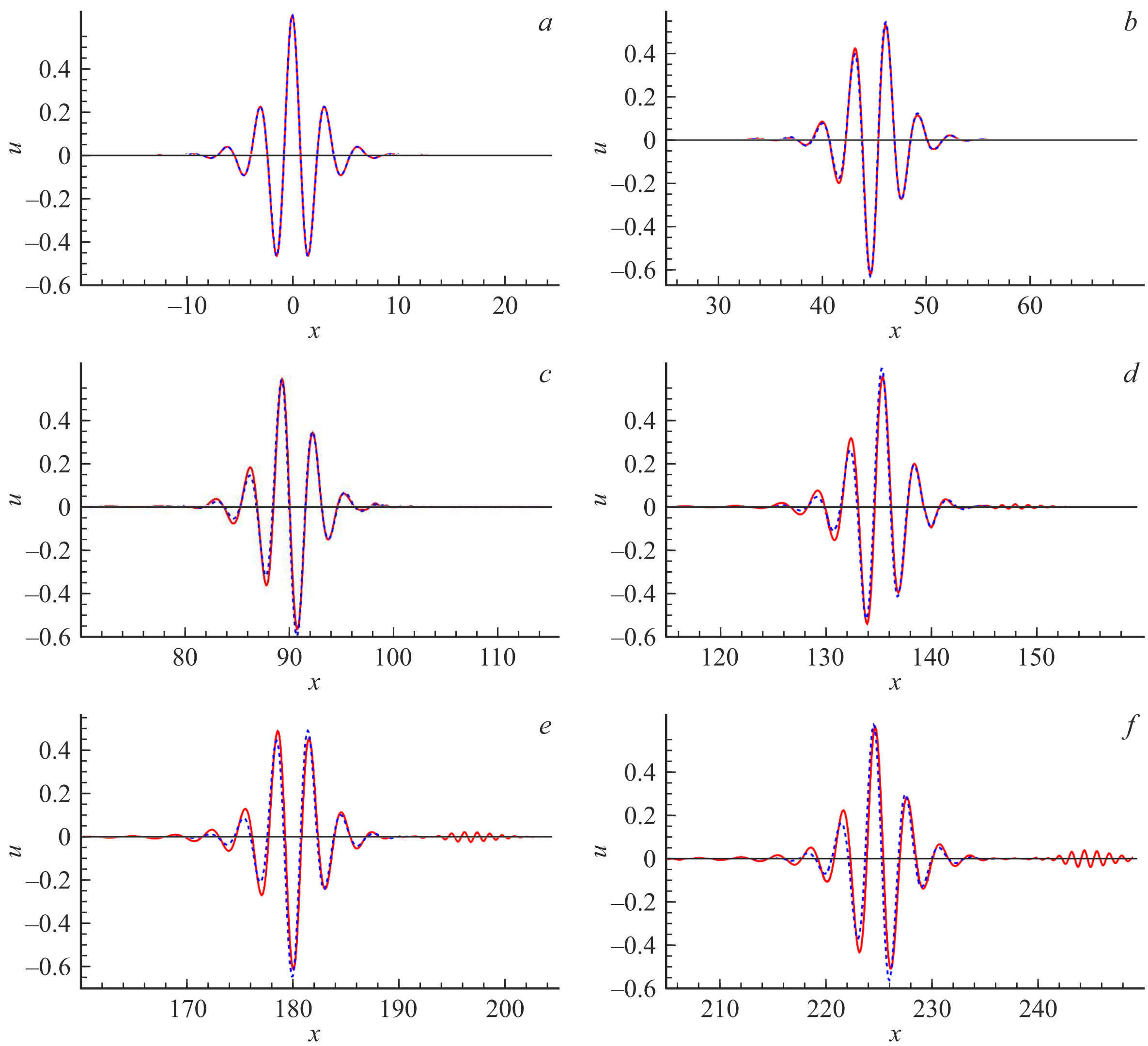

Рис. 1. Сравнение численного (красная линия (в онлайн версии)) и приближенного аналитического (синяя пунктирная линия (в онлайн версии)) в разные моменты времени, t: a — 0; b — 50; c — 100; d — 150; e — 200; f — 250.

нитных волн в графеновой сверхрешетке (ГСР) [13–15]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\omega_0^2 b^2 \sin u}{\sqrt{1+b^2(1-\cos u)}} = 0. \quad (17)$$

Здесь $u = edA_z/\hbar c$ — безразмерная компонента векторного потенциала в направлении чередования слоев СР, c — скорость света, e — элементарный электрический заряд, $\omega_0^2 = 2\pi n_0 e^2 d^2 \Delta/(a_0\hbar^2)$, n_0 — поверхностная концентрация носителей заряда, $a_0 = 0.12\,\text{nm}$ — толщина графенового слоя, $b = \Delta_1/\Delta$, параметры Δ и Δ_1 можно условно назвать полуширинами запрещенной и разрешенной минизоны соответственно, d — период СР. Предполагается, что чередование слоев осуществляется вдоль оси z. Уравнение (17) имеет решение в виде 2π-импульса, выраженное неявно [13]:

$$\int\limits_{\pi}^{u(\xi)} \frac{du}{\sqrt{\sqrt{1+b^2(1-\cos u)}-1}} = 2\xi, \quad (18)$$

$\xi = (x - vt)/L_0$, $L_0 = (c/\omega_0)\sqrt{1 - v^2/c^2}$ v — скорость электромагнитного импульса.

Преобразуем уравнение (17). Введем новые переменные

$$x\omega_0 b/c \to x, \quad t\omega_0 b \to t. \quad (19)$$

Уравнение (17) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sin u}{\sqrt{1+b^2(1-\cos u)}} = 0. \quad (20)$$

Раскладывая $\sin u/\sqrt{1+b^2(1-\cos u)}$ в ряд по u до кубических членов, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - \left(\frac{b^2}{4} + \frac{1}{6}\right) u^3 = 0, \quad (21)$$

тогда

$$\beta = \frac{b^2}{4} + \frac{1}{6}. \quad (22)$$

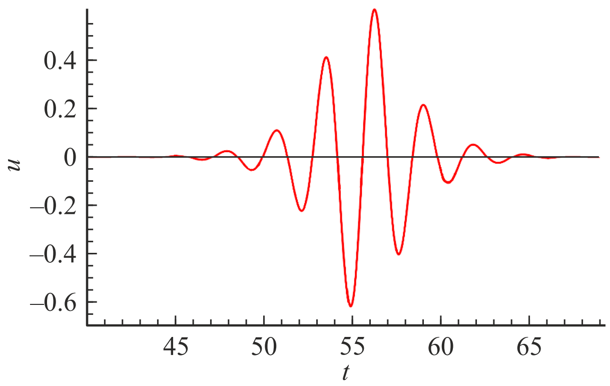

Рис. 2. Зависимость приближенного решения от времени, $x = 50$.

Согласно (12), (14), решение уравнения (20) в виде бризера имеет вид

$$u = \left(\frac{32(1-\omega^2)}{3b^2+2}\right)^{1/2} \frac{\cos(\gamma\omega t - \omega x\sqrt{\gamma^2-1})}{\cosh\left(\sqrt{1-\omega^2}(\gamma x - t\sqrt{\gamma^2-1})\right)}. \tag{23}$$

Переходя к исходным обозначениям, получаем

$$u = \left(\frac{32(1-\omega^2)}{3b^2+2}\right)^{1/2} \times \frac{\cos(t\,\frac{\gamma\omega}{(\omega_0 b)} - x\,\frac{\omega c}{\omega_0 b}\sqrt{\gamma^2-1})}{\cosh\left(\sqrt{1-\omega^2}\left(x\,\frac{\gamma c}{\omega_0 b} - \frac{t}{\omega_0 b}\sqrt{\gamma^2-1}\right)\right)}. \tag{24}$$

Представляет интерес исследование устойчивости приближенного решения (23). Используя пакет Wolfram Mathematica, выполним численное решение уравнения (20), взяв в качестве начального условия функцию (23). На рис. 1 показаны графики приближенного аналитического и численного решений в различные моменты времени. При построении графиков полагалось $b = 0.90$, $\omega = 0.97$. Из графиков, представленных на рис. 1, видно, что хотя при этих значениях условие $|u| \ll 1$ не выполняется численное решение оказывается близким к представленному выше аналитическому и обнаруживает устойчивость, т.е. область применимости приближенного аналитического решения оказывается несколько шире, чем предполагалось изначально.

На рис. 2 показана зависимость решения от времени при фиксированном x. Из этого рисунка видно, что длительность импульса приблизительно составляет 20 единиц по оси времени. На рис. 3 приведен график решения, когда по одной из осей отложено время t, а по другой — пространственная координата x.

Для количественной оценки различий между численным решением и приближенным аналитическим решением воспользуемся следующим приемом. При заданном t в области, где решение принимает отличные от нуля решения (т.е. $|u|$ больше некоторого малого положительного значения ε), вычислим экстремумы численного решения. На основе списка значений $\{x_i, |u(x_i,t)|\}$, где x_i определяют положение экстремумов численного решения, строим интерполяционную функцию. На рис. 4 представлены графики интерполяционной функции — огибающей абсолютной величины численного решения вблизи максимума амплитуды в различные моменты времени. Найдя положение $x_{\max}(t)$ максимума интерполяционной функции, определяем отрезок $[x_{\max}(t) - L, x_{\max}(t) + L]$, где L — половина ширины импульса в пространстве (судя по рис. 1, 4, $L \approx 10$). Далее случайным образом выбираем N значений $\{x_i\}_{i=1\ldots N}$ из этого отрезка и формируем два вектора: $a = \{u_{appr}(x_i)\}_{i=1\ldots N}$ и $b = \{u_{num}(x_i)\}_{i=1\ldots N}$ — значения приближенного аналитического и численного решения соответственно в точках $\{x_i\}_{i=1\ldots N}$. Для сравнения приближенного аналитического и численного решений вычисляем коэффициент корреляции в различные моменты времени:

$$K_{corr} = \sum_{i=1}^{N} \frac{(a_i - \overline{a})(b_i - \overline{b})}{\sigma_a \sigma_b (N-1)}. \tag{25}$$

Здесь $\overline{a} = \sum\limits_{i=1}^{N} a_i/N$ — среднее выборочное значение, $\sigma_a = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N}(a_i - \overline{a})^2/(N-1)}$ — среднеквадратическое отклонение. На рис. 5 показана зависимость от времени коэффициента корреляции между численным решением и приближенным аналитическим решением. Видно, что коэффициент корреляции монотонно убывает, однако даже в момент $t = 250\,K_{corr} \approx 0.94$, что говорит о том, что предложенное приближенное решение в виде бегущего бризера распадается достаточно медленно.

3. Сравнение с работами других авторов. Обсуждение результатов

В работе [16] рассматривается двухкомпонентное бризерное решение нелинейного уравнения Клейна–Гордона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - C\,\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\alpha_0^2 U + \frac{\alpha_0^2}{6}\,U^3, \tag{26}$$

получающееся при разложении в ряд Тейлора правой части уравнения синус-Гордона при $U \ll 1$. В [16] использован обобщенный метод редукции по возмущениям (pertubative reduction method), разработанный в [17–19]. Решение, полученное в [16], имеет вид

$$U(x,t) = A\,\mathrm{sech}\big((t - x/V_0)/T\big)\big\{\cos(k_1 x - \omega_1 t) + B\cos(k_2 x - \omega_2 t)\big\}. \tag{27}$$

Решение (26) сходно по форме с полученными в настоящей работе решениями (15), (23). Суть используемого в [16–19] метода редукции по возмущениям —

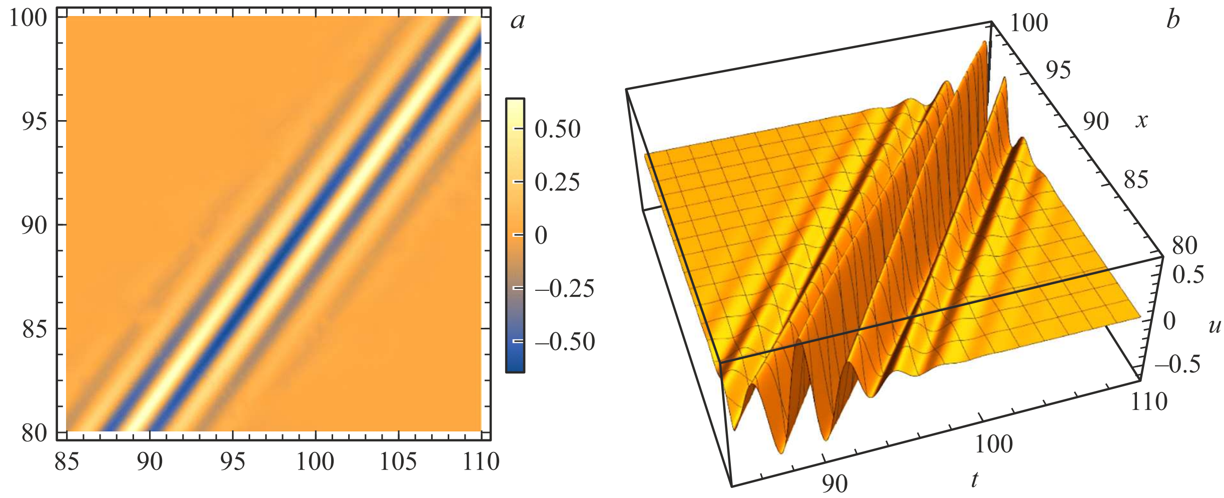

Рис. 3. Общий вид приближенного решения в области $t = 85-100$, $x = 80-100$: *a* — тепловая карта; *b* — трехмерный график.

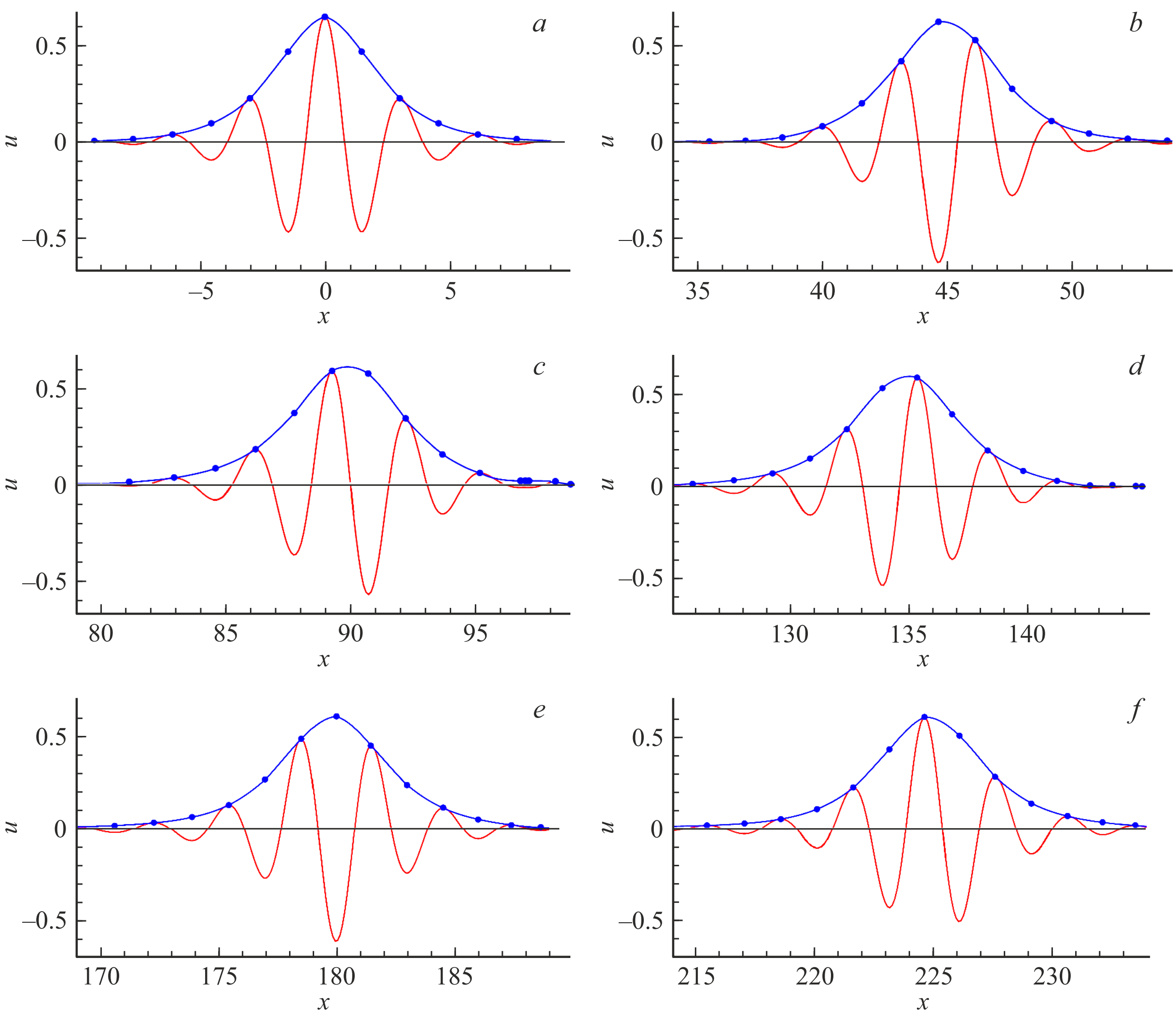

Рис. 4. Графики интерполяционной функции — огибающей абсолютной величины численного решения (синяя линия (в онлайн версии) и точки) вблизи максимума в различные моменты времени, t: *a* — 0; *b* — 50; *c* — 100; *d* — 150; *e* — 200; *f* — 250.

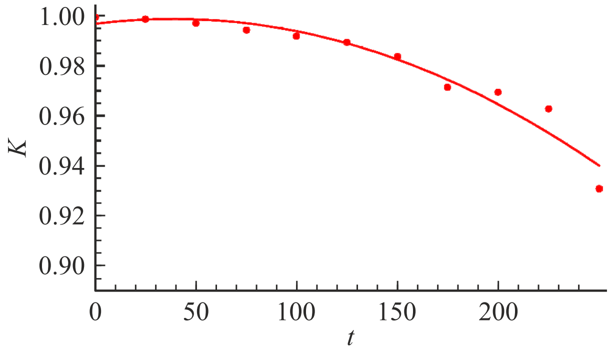

Рис. 5. Зависимость коэффициента корреляции между численным и приближенным аналитическим решением от времени.

поиск решения нелинейного дифференциального уравнения в частных производных в виде модулированной по амплитуде плоской волны:

$$U = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \varepsilon^{\alpha} U^{(\alpha)},$$

$$U^{(\alpha)} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} U_l^{(\alpha)}(\tau, \xi) \exp[il(kx - \omega t)], \tag{28}$$

где ε — некоторый малый параметр, $\tau = \varepsilon^2 t$, $\xi = \varepsilon(x - \lambda t)$, $\lambda = \partial\omega/\partial k$ — групповая скорость, $U_l^{(\alpha)} = U_{-l}^{(\alpha)*}$. Так, авторы [17], решая уравнение вида (26) при произвольных значениях коэффициентов перед линейным и кубическим членами в правой части, для модулирующей функции получают нелинейное уравнение Шредингера. Однако, как показано в [18], решение уравнения (26), взятое в форме плоской волны с модулированной амплитудой, оказывается неустойчивым. С нашей точки зрения, предложенный в настоящей работе метод получения приближенного решения нелинейного уравнения Клейна–Гордона в виде бризера малой амплитуды имеет преимущество перед используемым в [16–19] методом редукции по возмущениям ввиду своей простоты.

Исследованию бризерных решений уравнения (17), описывающего распространение нелинейных волн в графеновой сверхрешетке, посвящена работа [15]. В [15] численно исследовано неупругое столкновение кинка и антикинка, описываемых выражением (18), движущихся с одинаковыми по величине и противоположно направленными скоростями, являющихся решением уравнения (17). Расчет показывает, что после столкновения уединенные волны продолжают двигаться до „бесконечности“, если их скорость больше некоторого критического значения или принадлежит набору резонансных окон. В противном случае после столкновения решения формируют состояние, подобное бризеру, которое медленно распадается, излучая энергию. Фрактальная структура этих резонансных окон характеризуется многоиндексной нотацией, основные особенности этой структуры сравниваются с предсказаниями теории резонансного обмена энергией и показывают хорошее соответствие этой теории.

Заключение

Таким образом, в работе предложен метод получения приближенного решения нелинейного уравнения Клейна–Гордона, представляющего собой бегущий бризер малой амплитуды. Рассмотрен пример получения такого решения для уравнения, описывающего распространение нелинейных волн в графеновой сверхрешетке. Проведен анализ полученного решения на предмет устойчивости. Показано, что форма решения меняется слабо на временном интервале, составляющем десятки длительностей импульса.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] J. Cuevas-Maraver, P.G. Kevrekidis, F. Williams (eds.). *The sine-Gordon Model and its Applications* (Springer, Cham, 2014), DOI: 10.1007/978-3-319-06722-3

[2] A.D. Jagtap, E. Saha, J.D. George, A.S. Vasudeva Murthy. Wave Motion, **73**, 76 (2017). DOI: 10.1016/j.wavemoti.2017.05.003

[3] R. Carretero-Gonz′alez, L.A. Cisneros-Ake, R. Decker, G.N. Koutsokostas, D.J. Frantzeskakis, P.G. Kevrekidis, D.J. Ratliff. Commun Nonlinear Sci., **109**, 106123 (2022). DOI: 10.1016/j.cnsns.2021.106123

[4] O.M.L. Gomide, M. Guardia, T.M. Seara, Ch. Zeng. arXiv:2107.14566. DOI: 10.48550/arXiv.2107.14566

[5] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell, H. Segur. Stud. Appl. Math., **53** (4), 249 (1974). DOI: 10.1002/sapm1974534249

[6] M. Remoissenet. *Waves Called Solitons: Concepts and Experiments* (Springer-Verlag, Berlin, 1999), DOI: 10.1007/978-3-662-03790-4

[7] A.A. Minzoni, N.F. Smyth, A.L. Worthy. Physica D, **189**, 167 (2004). DOI: 10.1016/j.physd.2003.09.047

[8] D. Scheider. Nonlinearity, **33**, 7140 (2020). DOI: 10.1088/1361-6544/abb78b

[9] Y. Sire, G. James. Physica D, **204**, 15 (2005). DOI: 10.1016/j.physd.2005.03.008

[10] D.E. Pelinovsky, T. Penati, S. Paleari. In: *Mathematics of Wave Phenomena. Trends in Mathematics*, ed. by W. Dörfler, M. Hochbruck, D. Hundertmark, W. Reichel, A. Rieder, R. Schnaubelt, B. Schorkhuber (Cham, Birkhäuser, 2020), p. 251–278. DOI: 10.1007/978-3-030-47174-3_16

[11] А.М. Косевич, А.С. Ковалев. ЖЭТФ, **67**, 1793 (1974). [A.M. Kosevich, A.S. Kovalev, JETP, **40** (5), 891 (1975).]

[12] Т.И. Белова, А.Е. Кудрявцев. УФН, **167** (4), 377 (1997). DOI: 10.3367/UFNr.0167.199704b.0377 [T.I. Belova, A.E. Kudryavtsev. Phys. Usp., **40**, 359 (1997). DOI: 10.1070/PU1997v040n04ABEH000227]

[13] S.V. Kryuchkov, E.I. Kukhar'. Physica B, **408**, 188 (2013). DOI: 10.1016/j.physb.2012.09.052

[14] F. Martin-Vergara, F. Rus, F.R. Villatoro. In: *Nonlinear Systems, Vol. 2. Understanding Complex Systems*, ed. by J. Archilla, F. Palmero, M. Lemos, B. Sánchez-Rey, J. Casado-Pascual (Cham, Springer, 2018), p. 85–110. DOI: 10.1007/978-3-319-72218-4

[15] F. Martin-Vergara, F. Rus, F.R.Villatoro. Chaos Soliton Fract., **151**, 111281 (2021). DOI: 10.1016/j.chaos.2021.111281

[16] G.T. Adamashvili. arXiv:2107.12154v1. DOI: 10.48550/arXiv.2107.12154

[17] T. Taniuti, N. Yajima. J. Math. Phys., **10** (8), 1369 (1969). DOI: 10.1063/1.1664975

[18] N. Asano, T. Taniuti, N. Yajima. J. Math. Phys., **10** (11), 2020 (1969). DOI: 10.1063/1.1664797

[19] T. Taniuti, N. Yajima. J. Math. Phys., **14** (10), 1389 (1973). DOI: 10.1063/1.1666193