

Фурье-анализ мод микроструктурных оптических волокон

© А.Б. Сотский,¹ Д.В. Понкратов,¹ Л.И. Сотская²

¹ Могилевский государственный университет им. А.А. Кулешова,
212022 Могилев, Беларусь

² Белорусско-Российский университет,
212000 Могилев, Беларусь
e-mail: ab_sotsky@mail.ru

Поступило в Редакцию 14 июня 2022 г.

В окончательной редакции 1 августа 2022 г.

Принято к публикации 12 августа 2022 г.

В неупрощенной векторной форме сформулирован метод расчета мод микроструктурных оптических волокон, основанный на представлении продольных компонент полей мод на границах раздела сред в поперечном сечении волокна полиномами Фурье по угловым координатам. Амплитуды гармоник Фурье находятся из однородной алгебраической системы. Ее матричные элементы определяются на основании теоремы Грина и представляются интегралами от регулярных функций. Применимость метода ограничивается только требованием, чтобы контуры включений и внешней границы волокна описывались однозначными функциями угловых координат. В частном случае круглого диэлектрического волновода метод дает точное аналитическое решение волноводной задачи. Представлены оценки внутренней сходимости метода относительно порядка полиномов Фурье при расчете мод диэлектрического эллиптического волновода и микроструктурных волокон с эллиптическими включениями. Установлено, что на коэффициенты затухания мод существенно влияют как внутренняя микроструктура, так и внешняя граница волокна.

Ключевые слова: микроструктурное волокно, теорема Грина, ряд Фурье, внутренняя сходимость, вытекающие моды.

DOI: 10.21883/JTF.2022.12.53757.156-22

Введение

Микроструктурные оптические волокна (МОВ), поперечное сечение которых содержит систему диэлектрических включений, широко используются в оптических системах связи и обработки информации. Для оптимизации таких волокон необходимы эффективные методы анализа их модовых характеристик. Моды МОВ не допускают строгий аналитический расчет. Поэтому важное практическое значение имеют численные методы, позволяющие получить последовательно уточненное решение векторной волноводной задачи [1]. В настоящее время в теории открытых диэлектрических волноводов, к которым относятся и МОВ, получили распространение вариационные и конечно-разностные методы [1]. Их общей особенностью является использование ограниченного в пространстве расчетного окна. Это затрудняет исследование мод открытых волноводов, находящихся в окрестности критических и в закритических условиях. Последние условия имеют место при наличии вытекания излучения из волноводного канала и характерны для МОВ. Устранить данные ограничения позволяют метод контурных интегральных уравнений [1–4] и метод функций Грина [5]. К последнему методу можно отнести метод мультиполей [6,7] и метод, использующий ряды Рэлея для компонент электромагнитного поля внутри и вне волноводного канала [8]. В данных подходах искомыми являются компоненты электромагнитного поля моды на границах раздела сред, либо в замкнутых

областях пространства, а корректная асимптотика поля при удалении от волновода обеспечивается двумерной функцией Грина. Но при численном решении контурных интегральных уравнений возникают трудности, связанные с сингулярностью функции Грина. Различные способы преодоления этих трудностей рассмотрены в [1–4]. Применительно к МОВ соответствующие результаты получены без учета взаимодействия их мод с внешней границей волокна, которое может существенно влиять на затухание мод [5,9,10]. Преодолеть данное ограничение позволяет метод функций Грина [5]. Этот метод основан на решении систем уравнений связанных волн относительно амплитуд фурье-разложений компонент электромагнитного поля моды по угловым координатам в областях включений. Но он эффективен лишь для МОВ, содержащих включения с циркулярной симметрией [5]. При нарушении такой симметрии названные разложения не являются абсолютно сходящимися. Это порождает асимптотический характер получаемого решения, что проявляется в неустойчивости результатов для модовых характеристик относительно порядка редукции рядов Фурье. Кроме того, метод функций Грина применим к ограниченному классу МОВ, поперечное сечение которых содержит только элементы, допускающие заключение в непересекающиеся окружности [5].

В настоящей работе предлагается более эффективный аналог метода функций Грина. В нем используются полиномы Фурье по угловым координатам для продоль-

ных компонент поля моды МОВ, заданные на границах включений и внешней границе волокна. Амплитуды гармоник Фурье находятся из однородной алгебраической системы. Ее матричные элементы определяются на основании теоремы Грина, рассматриваемой поочередно во всех однородных областях структуры. Вычисление матричных элементов сводится к численному расчету интегралов от регулярных функций, при этом трудностей, вызванных сингулярностями функций Грина, не возникает. Получена формулировка дисперсионного уравнения для мод МОВ, не требующая прямого вычисления определителя системы, что позволяет избежать переполнений разрядной сетки компьютера. Применимость метода ограничивается только требованием, чтобы контуры образующих каналов и внешней границы МОВ описывались однозначными функциями угловых координат. В частном случае однородного волокна кругового сечения метод приводит к известному строгому решению волноводной задачи. Внутренняя сходимость метода относительно порядка полиномов Фурье оценена на примерах расчета мод диэлектрического волновода эллиптического сечения и мод МОВ, образованных эллиптическими воздушными каналами в кварцевом стекле. Дисперсионные зависимости для мод эллиптического волновода сопоставлены с литературными данными. Для МОВ исследованы эффекты модового двулучепреломления и дихроизма, вызванного вытеканием излучения из волноводного канала, и влияние на эти эффекты внешней границы волокна.

1. Фурье-анализ мод

Поперечное сечение рассматриваемых волокон схематически изображено на рис. 1.

Внешняя граница МОВ является замкнутой и описывается однозначной функцией $r = \rho_0(\varphi)$, где r и φ — глобальные полярные координаты ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$) с началом отсчета 0 (рис. 1). Среда считается не магнитными с относительной магнитной проницаемостью $\mu = 1$. Окружающая МОВ среда является однородной и имеет относительную диэлектрическую проницаемость ϵ_c . Внутри МОВ (область $r < \rho_0(\varphi)$) имеются включения с номерами $k = \overline{1, N}$, окруженные однородной средой с диэлектрической проницаемостью ϵ_s . Среда внутри включений также однородна. Диэлектрическая проницаемость k -го включения равна ϵ_k ($k = \overline{1, N}$). Граница включения является замкнутой и описывается однозначной функцией $r_k = \rho_k(\varphi)$, где r_k и φ_k — полярные координаты точки в локальной системе координат включения. Предполагается, что начало координат k -го включения, имеющее глобальные декартовы координаты x_{0k} , y_{0k} , может быть заключено в некоторую окружность радиуса $a_k < \rho_k(\varphi_k)$, целиком расположенную внутри включения (рис. 1). Диэлектрические проницаемости ϵ_c , ϵ_s , ϵ_k ($k = \overline{1, N}$) являются в общем случае комплексными.

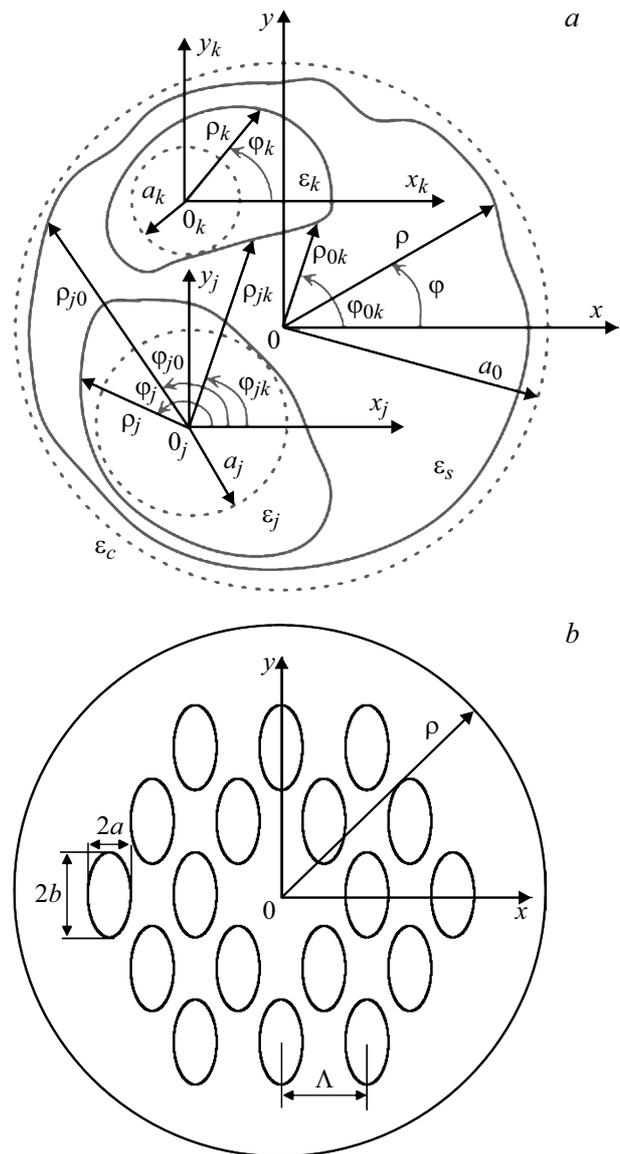


Рис. 1. a — общий вид поперечного сечения исследуемых волокон, b — МОВ с воздушными каналами эллиптического сечения.

Все компоненты поля моды с зависимостью от времени t и координаты z вида $\exp(i\omega t - ik_0\beta z)$ ($k_0 = 2\pi/\lambda$ — волновое число вакуума, β — безразмерная постоянная распространения моды), распространяющейся вдоль оси волновода Oz , могут быть выражены через продольные компоненты этого поля E_z и H_z [11], которые во всем пространстве подчиняются уравнениям

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_0^2 \chi_s^2 E_z = f_1, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_0^2 \chi_s^2 H_z = f_2, \tag{2}$$

где

$$f_1 = -\frac{\chi^2}{\varepsilon\varepsilon_0} \left\{ \frac{k_0\beta}{\omega} \left[\frac{\partial\chi^{-2}}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial\chi^{-2}}{\partial y} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right] + \frac{\partial(\varepsilon\varepsilon_0\chi^{-2})}{\partial x} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon\varepsilon_0\chi^{-2})}{\partial y} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right\} - k_0^2(\varepsilon - \varepsilon_s)E_z,$$

$$f_2 = -\frac{k_0\beta}{\omega\mu_0} \left[\frac{\partial\chi^{-2}}{\partial y} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial\chi^{-2}}{\partial x} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right] - \frac{\partial\chi^{-2}}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial\chi^{-2}}{\partial y} \frac{\partial H_z}{\partial y} - k_0^2(\varepsilon - \varepsilon_s)H_z,$$

$\chi_s^2 = \varepsilon_s - \beta^2$, $\chi^2 = k_0^2(\varepsilon - \beta^2)$, ε_0 и μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума, относительная диэлектрическая проницаемость пространства $\varepsilon(x, y)$ является ступенчатой функцией координат.

Применение к уравнениям (1), (2) в области $r < \rho_0(\varphi)$ теоремы Грина [12] по схеме, описанной в [5], приводит к функциональным уравнениям

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \sqrt{\rho_0'^2 + \rho_0^2} \left[\Phi_l(\mathbf{r}') \frac{\partial G_s}{\partial n'} - G_s \frac{\partial \Phi_l(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right]_{r'=\rho_0(\varphi')-0} - \sum_{k=1}^N \int_0^{2\pi} d\varphi'_k \sqrt{\rho_k'^2 + \rho_k^2} \times \left[\Phi_l(\mathbf{r}') \frac{\partial G_s}{\partial n'} - G_s \frac{\partial \Phi_l(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right]_{r'_k=\rho_k(\varphi'_k)+0} = 0 \quad (3)$$

и квадратурным формулам

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \sqrt{\rho_0'^2 + \rho_0^2} \left[\Phi_l(\mathbf{r}') \frac{\partial G_s}{\partial n'} - G_s \frac{\partial \Phi_l(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right]_{r'=\rho_0(\varphi')-0} - \sum_{k=1}^N \int_0^{2\pi} d\varphi'_k \sqrt{\rho_k'^2 + \rho_k^2} \times \left[\Phi_l(\mathbf{r}') \frac{\partial G_s}{\partial n'} - G_s \frac{\partial \Phi_l(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right]_{r'_k=\rho_k(\varphi'_k)+0} = \Phi_l(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Здесь

$$l = 1, 2, \quad \Phi_1 = H_z, \quad \Phi_2 = \bar{E}_z = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} E_z,$$

$$\rho_0' = (d\rho_0/d\varphi)_{\varphi=\varphi'}, \quad \rho_0 = \rho_0(\varphi'),$$

$$\rho_k' = (d\rho_k/d\varphi_k)_{\varphi_k=\varphi'_k}, \quad \rho_k = \rho_k(\varphi'_k),$$

$$G_s = 0.25iH_0^{(2)}(k_0\chi_s|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|),$$

— двумерная функция Грина для однородной среды с диэлектрической проницаемостью ε_s ($H_0^{(2)}(\dots)$ — функция Ханкеля), \mathbf{r} и \mathbf{r}' — радиус-векторы точек

наблюдения и контуров интегрирования соответственно; r', φ' — полярные координаты радиус-вектора \mathbf{r}' в глобальной системе координат, r'_k, φ'_k — полярные координаты этого же вектора в локальных системах координат включений ($k = \overline{1, N}$); через $\partial/\partial n'$ обозначены производные по направлениям внешних нормалей к контурам интегрирования. Уравнения (3) справедливы, если точка наблюдения \mathbf{r} находится либо в областях включений, либо вне МОВ ($r > \rho_0(\varphi)$), а (4) — если эта точка располагается внутри МОВ ($r < \rho_0(\varphi)$), но вне включений.

Аналогично применяя теорему Грина к уравнениям (1), (2) в окружающей МОВ среде и во внутренних областях включений, получаем

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \sqrt{\rho_0'^2 + \rho_0^2} \left[\Phi_l(\mathbf{r}') \frac{\partial G_c}{\partial n'} - G_c \frac{\partial \Phi_l(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right]_{r'=\rho_0(\varphi')+0} = 0 \quad (r < \rho_0(\varphi)), \quad (5)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \sqrt{\rho_0'^2 + \rho_0^2} \left[\Phi_l(\mathbf{r}') \frac{\partial G_c}{\partial n'} - G_c \frac{\partial \Phi_l(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right]_{r'=\rho_0(\varphi')+0} = -\Phi_l(\mathbf{r}) \quad (r > \rho_0(\varphi)), \quad (6)$$

где $G_c = 0.25iH_0^{(2)}(k_0\chi_c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$, $\chi_c = \sqrt{\varepsilon_c - \beta^2}$, $\text{Re } \chi_c > 0$ и $\text{Im } \chi_c < 0$ для вытекающих и волноводных мод МОВ соответственно;

$$\int_0^{2\pi} d\varphi'_k \sqrt{\rho_k'^2 + \rho_k^2} \left[\Phi_l(\mathbf{r}') \frac{\partial G_k}{\partial n'} - G_k \frac{\partial \Phi_l(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right]_{r'_k=\rho_k(\varphi'_k)-0} = 0 \quad (r_k < \rho_k(\varphi_k)), \quad (7)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi'_k \sqrt{\rho_k'^2 + \rho_k^2} \left[\Phi_l(\mathbf{r}') \frac{\partial G_k}{\partial n'} - G_k \frac{\partial \Phi_l(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right]_{r'_k=\rho_k(\varphi'_k)-0} = \Phi_l(\mathbf{r}) \quad (r_k > \rho_k(\varphi_k)), \quad (8)$$

где $G_k = 0.25iH_0^{(2)}(k_0\chi_k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$, $\chi_k = \sqrt{\varepsilon_k - \beta^2}$, $k = \overline{1, N}$.

С целью алгебраизации уравнений (3), (5), (7) представим функции $\Phi_l(\mathbf{r}')$ и $\partial\Phi_l(\mathbf{r}')/\partial n'$ на контурах интегрирования в виде полиномов Фурье:

$$H_z|_{r'_k=\rho_k} = \sum_{v=-m}^m h_v^{(k)} \exp(iv\varphi'_k),$$

$$\bar{E}_z|_{r'_k=\rho_k} = \sum_{v=-m}^m e_v^{(k)} \exp(iv\varphi'_k), \quad (9)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial n'} \Big|_{r'=\rho_k-0} = \sum_{v=-m}^m h_v^{(k)} \exp(iv\varphi'_k),$$

$$\frac{\partial \bar{E}_z}{\partial n'} \Big|_{r'=\rho_k-0} = \sum_{v=-m}^m e_v^{(k)} \exp(iv\varphi'_k), \quad (10)$$

$$H_z|_{r'=\rho_0} = \sum_{v=-m}^m h_v^{(0)} \exp(iv\varphi'),$$

$$\bar{E}_z|_{r'=\rho_0} = \sum_{v=-m}^m e_v^{(0)} \exp(iv\varphi'), \quad (11)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial n'} \Big|_{r'=\rho_0+0} = \sum_{v=-m}^m h_v'^{(0)} \exp(iv\varphi'),$$

$$\frac{\partial \bar{E}_z}{\partial n'} \Big|_{r'=\rho_0+0} = \sum_{v=-m}^m e_v'^{(0)} \exp(iv\varphi'), \quad (12)$$

где m — порядок полиномов, $h_v^{(k)}, h_v'^{(k)}, e_v^{(k)}, e_v'^{(k)}$ — известные коэффициенты ($k = \bar{0}, N$).

Заметим, что в согласии с теоремой сложения Графа для цилиндрических функций [13]:

$$H_0^{(2)}(\kappa|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \exp[i\mu(\varphi - \varphi')] \times \begin{cases} J_\mu(\kappa r) H_\mu^{(2)}(\kappa r') & \text{при } r < r', \\ J_\mu(\kappa r') H_\mu^{(2)}(\kappa r) & \text{при } r > r', \end{cases} \quad (13)$$

где κ — некоторая константа, $J_\mu(\dots)$ — функция Бесселя; r, φ и r', φ' — полярные координаты радиус-векторов \mathbf{r} и \mathbf{r}' в некоторой координатной системе, и что проектирование векторов градиентов функций Ханкеля на направления нормалей к контурам интегрирования в (3)–(8) приводит к соотношениям

$$\frac{\partial G_{s,c}}{\partial n'} = \left(\rho_0 \frac{\partial G_{s,c}}{\partial r'} - \frac{\rho_0'}{\rho_0} \frac{\partial G_{s,c}}{\partial \varphi'} \right)_{r'=\rho_0} (\rho_0'^2 - \rho_0^2)^{-0.5}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial G_{s,k}}{\partial n'} = \left(\rho_k \frac{\partial G_{s,k}}{\partial r'_k} - \frac{\rho_k'}{\rho_k} \frac{\partial G_{s,k}}{\partial \varphi'_k} \right)_{r'_k=\rho_k} (\rho_k'^2 - \rho_k^2)^{-0.5}. \quad (15)$$

Формулы (5), (7), (13)–(15) позволяют установить связь между коэффициентами разложений (9)–(12). Действительно, опишем вокруг начала глобальной системы координат 0 некоторую окружность радиуса $a < \rho_0(\varphi)$. Как следует из (5), (11), (12), (14), в пределах этой окружности

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} J_\mu(k_0\chi_c r) \exp(i\mu\varphi) \sum_{v=-m}^m (K_{\mu v}^{(0)} h_v^{(0)} + L_{\mu v}^{(0)} h_v'^{(0)}) = 0, \quad (16)$$

где

$$K_{\mu v}^{(0)} = \int_0^{2\pi} d\varphi' \left\{ k_0\chi_c \rho_0 H_\mu^{(2)}(k_0\chi_c \rho_0) + i\mu \frac{\rho_0'}{\rho_0} H_\mu^{(2)}(k_0\chi_c \rho_0) \exp[i(v - \mu)\varphi'] \right\}, \quad (17)$$

$$L_{\mu v}^{(0)} = \int_0^{2\pi} d\varphi' \sqrt{\rho_0'^2 + \rho_0^2} H_\mu^{(2)}(k_0\chi_c \rho_0) \exp[i(v - \mu)\varphi'], \quad (18)$$

через $H_\mu^{(2)}(\dots)$ обозначена производная от функции Ханкеля $H_\mu^{(2)}(\dots)$ по всему ее аргументу. Учитывая, что функции $J_\mu(k_0\chi_c r) \exp(i\mu\varphi)$ в (16), относящиеся к различным μ , линейно независимы и ограничиваясь во внешней сумме в (16) слагаемыми с $\mu = \overline{-m, m}$ заключаем, что

$$h_v'^{(0)} = \sum_{\mu=-m}^m Z_{v\mu}^{(0)} h_\mu^{(0)}, \quad (19)$$

где

$$Z_{v\mu}^{(0)} = \sum_{\sigma=-m}^m L_{v\sigma}^{(0)-1} K_{\sigma\mu}^{(0)},$$

$L^{(0)-1}$ — матрица, обратная матрице $L^{(0)}$ вида (18). Точно так же

$$e_v'^{(0)} = \sum_{\mu=-m}^m Z_{v\mu}^{(0)} e_\mu^{(0)}. \quad (20)$$

Аналогичные преобразования уравнений (7) с учетом (9), (10), (13), (15) приводят к соотношениям

$$h_v'^{(k)} = \sum_{\mu=-m}^m Z_{v\mu}^{(k)} h_\mu^{(k)}, \quad (21)$$

$$e_v'^{(k)} = \sum_{\mu=-m}^m Z_{v\mu}^{(k)} e_\mu^{(k)}, \quad (22)$$

$$Z_{v\mu}^{(k)} = \sum_{\sigma=-m}^m L_{v\sigma}^{(k)-1} K_{\sigma\mu}^{(k)}, \quad (23)$$

$$K_{\mu v}^{(k)} = \int_0^{2\pi} d\varphi'_k \left\{ k_0\chi_k \rho_k J'_\mu(k_0\chi_k \rho_k) + i\mu \frac{\rho_k'}{\rho_k} J_\mu(k_0\chi_k \rho_k) \exp[i(v - \mu)\varphi'_k] \right\}, \quad (24)$$

$$L_{\mu v}^{(k)} = \int_0^{2\pi} d\varphi'_k \sqrt{\rho_k'^2 + \rho_k^2} \{ J_\mu(k_0\chi_k \rho_k) \exp[i(v - \mu)\varphi'_k] \}, \quad (25)$$

где через $J'_\mu(\dots)$ обозначена производная от функции $J_\mu(\dots)$ по всему ее аргументу, $k = \overline{1, N}$.

Обратимся теперь к уравнениям (3). Входящие в них производные $\partial H_z / \partial n'$ и $\partial \bar{E}_z / \partial n'$ отличаются от аналогичных производных в (10) и (12) тем, что они вычисляются при стремлении к границам раздела сред с противоположных сторон. Из условий непрерывности

тангенциальных составляющих электрического и магнитного поля на данных границах следует, что

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial n'}\right)_{r'=\rho-0} = \frac{\chi_s^2}{\chi_c^2} \left(\frac{\partial H_z}{\partial n'}\right)_{r'=\rho+0} + \frac{\beta}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}} \times \left(1 - \frac{\chi_s^2}{\chi_c^2}\right) \left(\frac{\partial \bar{E}_z}{\partial \varphi'}\right)_{r'=\rho}, \quad (26)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{E}_z}{\partial n'}\right)_{r'=\rho-0} = \frac{\chi_s^2 \varepsilon_c}{\chi_c^2 \varepsilon_s} \left(\frac{\partial \bar{E}_z}{\partial n'}\right)_{r'=\rho+0} - \frac{\beta}{\varepsilon_s \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}} \times \left(1 - \frac{\chi_s^2}{\chi_c^2}\right) \left(\frac{\partial H_z}{\partial \varphi'}\right)_{r'=\rho}, \quad (27)$$

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial n'}\right)_{r'=\rho_k+0} = \frac{\chi_s^2}{\chi_k^2} \left(\frac{\partial H_z}{\partial n'}\right)_{r'=\rho_k-0} + \frac{\beta}{\sqrt{\rho_k'^2 + \rho_k^2}} \times \left(1 - \frac{\chi_s^2}{\chi_k^2}\right) \left(\frac{\partial \bar{E}_z}{\partial \varphi'_k}\right)_{r'=\rho_k}, \quad (28)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{E}_z}{\partial n'}\right)_{r'=\rho_k+0} = \frac{\chi_s^2 \varepsilon_k}{\chi_k^2 \varepsilon_s} \left(\frac{\partial \bar{E}_z}{\partial n'}\right)_{r'=\rho_k-0} - \frac{\beta}{\varepsilon_s \sqrt{\rho_k'^2 + \rho_k^2}} \times \left(1 - \frac{\chi_s^2}{\chi_k^2}\right) \left(\frac{\partial H_z}{\partial \varphi'_k}\right)_{r'=\rho_k}. \quad (29)$$

Формулы (26)–(29) позволяют воспользоваться в уравнениях (3) разложениями (9)–(12).

Детализируем уравнения (3) для случая, когда точка наблюдения с радиус-вектором \mathbf{r} находится в j -ом включении. Ее полярные координаты в локальной системе координат включения обозначим через r_j, φ_j . Пусть $r_j < a_j$ (рис. 1). Для вычисления функций $G_s, \partial G_s / \partial n'$ на контурах интегрирования в (3) воспользуемся локальной системой координат j -го включения. Обозначим полярные координаты точек границы k -го включения через ρ_{jk}, φ_{jk} (если $j = k$, то $\rho_{jk} = \rho_k, \varphi_{jk} = \varphi'_k$), а внешней границе МОВ сопоставим номер $k = 0$, так что полярные координаты ее точек равны ρ_{j0}, φ_{j0} . Из рис. 1 очевидно, что выполняются неравенства $r_j < \rho_{jk}$ ($k = \bar{0}, \bar{N}$). Тогда в соответствии с (13), во всех интегралах в (3):

$$G_s = 0.25i \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \exp[i\mu(\varphi_j - \varphi_{jk})] J_\mu(k_0 \chi_s r_j) H_\mu^{(2)}(k_0 \chi_s \rho_{jk}). \quad (30)$$

Чтобы рассчитать производные $\partial G_s / \partial n'$ заметим, что

$$\begin{aligned} x_{0k} + \rho_k \cos \varphi'_k &= x_{0j} + \rho_{jk} \cos \varphi_{jk}, \\ y_{0k} + \rho_k \sin \varphi'_k &= y_{0j} + \rho_{jk} \sin \varphi_{jk}, \end{aligned} \quad (31)$$

где $x_{00} = y_{00} = 0, \varphi'_0 = \varphi'$. Согласно (31):

$$\rho_{jk} = \sqrt{(x_{0k} - x_{0j} + \rho_k \cos \varphi'_k)^2 + (y_{0k} - y_{0j} + \rho_k \sin \varphi'_k)^2}, \quad (32)$$

$$\frac{\partial \varphi_{jk}}{\partial \rho_k} = \frac{(x_{0k} - x_{0j}) \sin \varphi'_k - (y_{0k} - y_{0j}) \cos \varphi'_k}{\rho_{jk}^2}, \quad (33)$$

$$\frac{\partial \rho_{jk}}{\partial \rho_k} = \frac{(x_{0k} - x_{0j}) \cos \varphi'_k + (y_{0k} - y_{0j}) \sin \varphi'_k + \rho_k}{\rho_{jk}}, \quad (34)$$

$$\frac{\partial \rho_{jk}}{\partial \varphi'_k} = -\rho_k \rho_{jk} \frac{\partial \varphi_{jk}}{\partial \rho_k}, \quad (35)$$

$$\frac{\partial \varphi_{jk}}{\partial \varphi'_k} = \frac{\rho_k}{\rho_{jk}} \frac{\partial \rho_{jk}}{\partial \rho_k}. \quad (36)$$

Как следует из (15), (30)–(36):

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_s}{\partial n'} &= \frac{i}{4\sqrt{\rho_k'^2 + \rho_k^2}} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} J_\mu(k_0 \chi_s r_j) \exp[i\mu(\varphi_j - \varphi_{jk})] \\ &\times \left[k_0 \chi_s \rho_k H_\mu^{(2)}(k_0 \chi_s \rho_{jk}) \left(\frac{\partial \rho_{jk}}{\partial \rho_k} + \frac{\rho'_k \rho_{jk}}{\rho_k} \frac{\partial \varphi_{jk}}{\partial \rho_k} \right) \right. \\ &\left. - i\mu H_\mu^{(2)}(k_0 \chi_s \rho_{jk}) \left(\rho_k \frac{\partial \varphi_{jk}}{\partial \rho_k} - \frac{\rho'_k}{\rho_{jk}} \frac{\partial \rho_{jk}}{\partial \rho_k} \right) \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

При учете соотношений (14), (15), (19), (22), (26)–(30), (37) уравнения (3) при $l = 1, 2$ приводятся к виду

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} J_\mu(k_0 \chi_s r_j) \exp(i\mu \varphi_j) \sum_{k=0}^N \sum_{v=-m}^m (HH_{\mu v}^{(jk)} h_v^{(k)} \\ + HE_{\mu v}^{(jk)} e_v^{(k)}) = 0, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} J_\mu(k_0 \chi_s r_j) \exp(i\mu \varphi_j) \sum_{k=0}^N \sum_{v=-m}^m (EH_{\mu v}^{(jk)} h_v^{(k)} \\ + EE_{\mu v}^{(jk)} e_v^{(k)}) = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$HH_{\mu v}^{(jk)} = T1_{\mu v}^{(jk)} - \frac{\chi_s^2}{\chi_k^2} \sum_{\sigma=-m}^m T2_{\mu \sigma}^{(jk)} Z_{\sigma v}^{(k)}, \quad (40)$$

$$EE_{\mu v}^{(jk)} = T1_{\mu v}^{(jk)} - \frac{\chi_s^2 \varepsilon_k}{\chi_k^2 \varepsilon_s} \sum_{\sigma=-m}^m T2_{\mu \sigma}^{(jk)} Z_{\sigma v}^{(k)}, \quad (41)$$

$$HE_{\mu v}^{(jk)} = -i\nu\beta \left(1 - \frac{\chi_s^2}{\chi_k^2}\right) T3_{\mu v}^{(jk)}, \quad (42)$$

$$EH_{\mu v}^{(jk)} = \frac{i\nu\beta}{\varepsilon_s} \left(1 - \frac{\chi_s^2}{\chi_k^2}\right) T3_{\mu v}^{(jk)}, \quad (43)$$

$$\begin{aligned} T1_{\mu v}^{(jk)} &= \frac{is_k}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi'_k \left[k_0 \chi_s \rho_k H_\mu^{(2)}(k_0 \chi_s \rho_{jk}) \right. \\ &\times \left(\frac{\partial \rho_{jk}}{\partial \rho_k} + \frac{\rho'_k \rho_{jk}}{\rho_k} \frac{\partial \varphi_{jk}}{\partial \rho_k} \right) - i\mu H_\mu^{(2)}(k_0 \chi_s \rho_{jk}) \\ &\times \left. \left(\rho_k \frac{\partial \varphi_{jk}}{\partial \rho_k} - \frac{\rho'_k}{\rho_{jk}} \frac{\partial \rho_{jk}}{\partial \rho_k} \right) \right] \exp(i\nu \varphi'_k - i\mu \varphi_{jk}), \end{aligned} \quad (44)$$

$$T2_{\mu\nu}^{(jk)} = \frac{is_k}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi'_k \sqrt{\rho_k'^2 + \rho_k^2} H_\mu^{(2)}(k_0\chi_s\rho_{jk}) \times \exp(iv\varphi'_k - i\mu\varphi_{jk}), \quad (45)$$

$$T3_{\mu\nu}^{(jk)} = \frac{is_k}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi'_k H_\mu^{(2)}(k_0\chi_s\rho_{jk}) \exp(iv\varphi'_k - i\mu\varphi_{jk}), \quad (46)$$

$s_k = -1$ при $k > 0$, а при $k = 0$, $s_k = 1$, $\chi_k = \chi_c$, $\varepsilon_k = \varepsilon_c$.

Учитывая, что в рассматриваемой области изменения r_j функции $J_\mu(k_0\chi_s r_j) \exp(i\mu\varphi_j)$, относящиеся к различным μ_s , линейно независимы и ограничиваясь во внешних суммах в (38), (39) слагаемыми с номерами $\mu = \overline{-m, m}$, приходим к алгебраическим уравнениям

$$\sum_{k=0}^N \sum_{v=-m}^m (HH_{\mu\nu}^{(jk)} h_v^{(k)} + HE_{\mu\nu}^{(jk)} e_v^{(k)}) = 0, \quad (47)$$

$$\sum_{k=0}^N \sum_{v=-m}^m (EH_{\mu\nu}^{(jk)} h_v^{(k)} + EE_{\mu\nu}^{(jk)} e_v^{(k)}) = 0, \quad (48)$$

где $\mu = \overline{-m, m}$, $j = \overline{1, N}$.

Пусть теперь точка наблюдения в (3) находится вне круга некоторого радиуса a_0 , охватывающего МОВ (рис. 1, а). В этом случае для задания функций G_s , $\partial G_s / \partial n'$ на контурах интегрирования в (3) воспользуемся глобальной системой координат рис. 1, а. Согласно (13):

$$G_s = 0.25i \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \exp[i\mu(\varphi - \varphi_{0k})] J_\mu(k_0\chi_s\rho_{0k}) H_\mu^{(2)}(k_0\chi_s r), \quad (49)$$

$$\frac{\partial G_s}{\partial n'} = \frac{i}{4\sqrt{\rho_k'^2 + \rho_k^2}} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} H_\mu^{(2)}(k_0\chi_s r) \exp[i\mu(\varphi - \varphi_{0k})] \times \left[k_0\chi_s\rho_k J'_\mu(k_0\chi_s\rho_{0k}) \left(\frac{\partial\rho_{0k}}{\partial\rho_k} + \frac{\rho_k'\rho_{0k}}{\rho_k} \frac{\partial\varphi_{0k}}{\partial\rho_k} \right) - i\mu J_\mu(k_0\chi_s\rho_{0k}) \left(\rho_k \frac{\partial\varphi_{0k}}{\partial\rho_k} - \frac{\rho_k'}{\rho_{0k}} \frac{\partial\rho_{0k}}{\partial\rho_k} \right) \right]. \quad (50)$$

В соответствии с (31)–(36) на внешней границе МОВ при вычислении матричных элементов системы (47), (48) следует положить $k = 0$, $\rho_0 = \rho_{00}$, $\varphi_{00} = \varphi'_0 = \varphi'$, $\partial\rho_{00}/\partial\rho_0 = 1$, $\partial\varphi_{00}/\partial\rho_0 = 0$.

Подстановка (49), (50) в (3) приводит к уравнениям

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} H_\mu^{(2)}(k_0\chi_s r) \exp(i\mu\varphi) \sum_{k=0}^N \sum_{v=-m}^m (HH_{\mu\nu}^{(0k)} h_v^{(k)} + HE_{\mu\nu}^{(0k)} e_v^{(k)}) = 0, \quad (51)$$

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} H_\mu^{(2)}(k_0\chi_s r) \exp(i\mu\varphi) \sum_{k=0}^N \sum_{v=-m}^m (EH_{\mu\nu}^{(0k)} h_v^{(k)} + EE_{\mu\nu}^{(0k)} e_v^{(k)}) = 0. \quad (52)$$

Как и при рассмотрении уравнений (38), (39), из (51), (52) получаем

$$\sum_{k=0}^N \sum_{v=-m}^m (HH_{\mu\nu}^{(0k)} h_v^{(k)} + HE_{\mu\nu}^{(0k)} e_v^{(k)}) = 0, \quad (53)$$

$$\sum_{k=0}^N \sum_{v=-m}^m (EH_{\mu\nu}^{(0k)} h_v^{(k)} + EE_{\mu\nu}^{(0k)} e_v^{(k)}) = 0, \quad (54)$$

где $\mu = \overline{-m, m}$. Коэффициенты алгебраических уравнений (53), (54) имеют общий вид (40)–(43), но теперь

$$T1_{\mu\nu}^{(0k)} = \frac{is_k}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi'_k \left[k_0\chi_s\rho_k J'_\mu(k_0\chi_s\rho_{0k}) \times \left(\frac{\partial\rho_{0k}}{\partial\rho_k} + \frac{\rho_k'\rho_{0k}}{\rho_k} \frac{\partial\varphi_{0k}}{\partial\rho_k} \right) - i\mu J_\mu(k_0\chi_s\rho_{0k}) \times \left(\rho_k \frac{\partial\varphi_{0k}}{\partial\rho_k} - \frac{\rho_k'}{\rho_{0k}} \frac{\partial\rho_{0k}}{\partial\rho_k} \right) \right] \exp(iv\varphi'_k - i\mu\varphi_{0k}), \quad (55)$$

$$T2_{\mu\nu}^{(0k)} = \frac{is_k}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi'_k \sqrt{\rho_k'^2 + \rho_k^2} J_\mu(k_0\chi_s\rho_{0k}) \times \exp(iv\varphi'_k - i\mu\varphi_{0k}), \quad (56)$$

$$T3_{\mu\nu}^{(0k)} = \frac{is_k}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi'_k J_\mu(k_0\chi_s\rho_{0k}) \exp(iv\varphi'_k - i\mu\varphi_{0k}). \quad (57)$$

Уравнения (47), (48), (53), (54) представляют собой однородную алгебраическую систему

$$MX = 0 \quad (58)$$

размерности $n \times n$, где $n = (4m + 2)(N + 1)$, X — вектор-столбец размерности n , составленный из коэффициентов разложений (9), (11). Как следует из (44)–(46), (55)–(57), вычисление матричных элементов системы $HH_{\mu\nu}^{(jk)}$, $HE_{\mu\nu}^{(jk)}$, $EH_{\mu\nu}^{(jk)}$, $EE_{\mu\nu}^{(jk)}$ сводится к численному расчету интегралов от регулярных функций и не вызывает принципиальных затруднений.

Условие существования нетривиальных решений системы (58)

$$\det M = 0 \quad (59)$$

является дисперсионным уравнением относительно возможных комплексных постоянных распространения мод МОВ β . После решения дисперсионного уравнения может быть выполнен расчет поля моды. Если ранг матрицы M равен $n-1$, как это имеет место для всех исследованных ниже МОВ, то все компоненты вектора X могут быть выражены из (58) через одну его компоненту. В итоге с точностью до произвольного множителя, имеющего смысл амплитуды моды, будут найдены все коэффициенты разложений (9), (11). Последующий

расчет продольных компонент поля моды внутри МОВ и в окружающей МОВ среде может быть выполнен по квадратурным формулам (4), (6), (8). Поперечные компоненты поля моды могут быть рассчитаны дифференцированием найденных продольных компонент [11].

2. Численные примеры

Частным случаем МОВ являются однородные диэлектрические волноводы, окруженные однородными средами. В такой ситуации $N = 0$, и расчет мод волноводов сводится к решению системы уравнений (53), (54), где $k = N = 0$.

Простейшим примером однородного волновода является круглый диэлектрический волновод. В данном случае ρ_0 есть радиус волновода, а $\rho'_0 = 0$. Благодаря последнему равенству интегралы (17), (18), (55)–(57) берутся аналитически, что приводит к диагональным матрицам

$$Z_{\mu\nu}^{(0)} = \frac{k_0\chi_c H_\mu^{(2)}(k_0\chi_c\rho_0)}{H_\mu^{(2)}(k_0\chi_c\rho_0)} \delta_{\mu\nu}, \quad (60)$$

$$T1_{\mu\nu}^{(00)} = 0.5\pi i k_0\chi_s\rho_0 J'_\mu(k_0\chi_s\rho_0)\delta_{\mu\nu}, \quad (61)$$

$$T2_{\mu\nu}^{(00)} = 0.5\pi i \rho_0 J_\mu(k_0\chi_s\rho_0)\delta_{\mu\nu}, \quad (62)$$

$$T3_{\mu\nu}^{(00)} = 0.5\pi i J_\mu(k_0\chi_s\rho_0)\delta_{\mu\nu}, \quad (63)$$

где $\delta_{\mu\nu}$ — символ Кронекера. В результате система (53), (54) распадается на несвязанные между собой подсистемы двух уравнений относительно $e_\mu^{(0)}$, $h_\mu^{(0)}$, где $\mu = 0, \pm 1, \dots$. Условия равенства нулю определителей этих подсистем приводят к известному точному дисперсионному уравнению для мод круглого диэлектрического волновода [11]. Таким образом, в данном примере разработанный метод дает строгое аналитическое решение волноводной задачи.

Другим классическим примером однородного волновода является диэлектрический волновод эллиптического сечения. В принципе, для такого волновода система уравнений (1), (2) допускает разделение переменных в эллиптических координатах [14]. Но при этом возникает непростая проблема вычисления функций Матье [13,14]. Детальный расчет эллиптического волновода выполнен в [4] методом контурных интегральных уравнений.

В предлагаемом подходе контур поперечного сечения эллиптического волновода описывается функциями

$$\rho_0(\varphi) = ab(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2}, \quad (64)$$

$$\rho'_0(\varphi) = 0.5ab \sin(2\varphi)(b^2 - a^2)(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2}, \quad (65)$$

где a и b — длины полуосей эллипса (рис. 2). Как следует из (55)–(57), (64), (65), при условии $a \neq b$ матрица M является плотной, и решение уравнения (59) может быть найдено только численно.

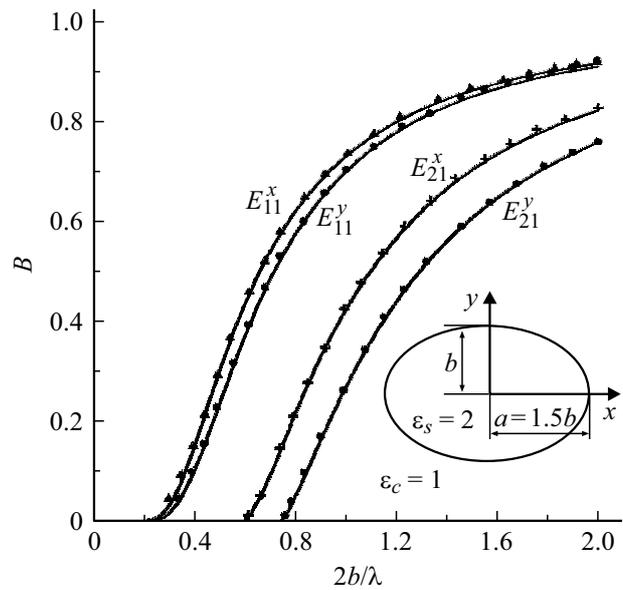


Рис. 2. Дисперсионные зависимости для четырех мод низшего порядка эллиптического волновода формата $F = a/b = 1.5$ (вставка), рассчитанные развитым методом (сплошные кривые) и полученные в [4] (дискретные значки).

Таблица 1. Внутренняя сходимость разработанного метода для мод эллиптического волновода

Мода	E_{11}^x	E_{11}^y	E_{21}^x	E_{21}^y
m	B	B	B	B
4	0.730388	0.699907	0.422658	0.267338
8	0.730520	0.700002	0.423185	0.267904
12	0.730510	0.700012	0.423179	0.267894
16	0.730510	0.700012	0.423178	0.267894
20	0.730510	0.700012	0.423178	0.267894

На рис. 2 дисперсионные зависимости для четырех мод низшего порядка эллиптического волновода формата $F = a/b = 1.5$, рассчитанные изложенным методом, сопоставлены с результатами работы [4]. Здесь $B = \text{Re}[(\beta^2 - \epsilon_c)/(\epsilon_s - \epsilon_c)]$ и использованы обозначения мод, указывающие на главную поперечную компоненту их электрического поля [15].

Как видно из рис. 2, результаты обоих подходов совпадают в пределах графических погрешностей.

О внутренней сходимости предлагаемого метода при расчете кривых на рис. 2 позволяет судить табл. 1, которая относится к $2b/\lambda = 1$.

Согласно табл. 1, приемлемая для оценочных расчетов точность вычисления постоянных распространения мод достигается уже при $m = 4$.

Мы использовали разработанный метод для описания модового двулучепреломления в МОВ, образован-

ных воздушными каналами в диэлектрической среде. Рассмотрены одномодовые волокна со сплошной сердцевиной, в которых центры включений находятся в узлах двумерной гексагональной решетки периода Λ (рис. 1, *b*). Если включения имеют круговое сечение, то поперечное сечение МОВ обладает вращательной симметрией порядка $s = 6$. В этом случае две ортогонально поляризованные основные моды МОВ вырождены [16], т.е. модовое двулучепреломление отсутствует. Это означает неустойчивость поляризации света при его распространении по волокну и возникновение поляризационных шумов при детектировании оптического сигнала на выходе МОВ. Устранение данных дефектов предполагает использование волокон, обладающих модовым двулучепреломлением, в которых комплексные постоянные распространения основных ортогонально поляризованных мод различны [17]. Такая ситуация имеет место для МОВ с эллиптическими воздушными каналами, когда $s = 2$ [5,18,19].

Мы исследовали МОВ, сердцевина которых окружена двумя гексагональными кольцами одинаковых воздушных каналов эллиптического сечения формата $F = a/b$ (рис. 1, *b*). Контур внешней границы МОВ предполагался круговым ($\rho_0 = \text{const}$). Использованы значения $N = 18$, $\epsilon_s = 1.45^2$, $\epsilon_j = 1$ ($j = \overline{1, N}$) и пропорции $\rho_0/\Lambda = 30.85$, $ab/\Lambda^2 = 0.06$, характерные для кварцевых одномодовых МОВ [10,20]. Рассмотрены две ситуации, когда $\epsilon_c = \epsilon_c^{(1)} = \epsilon_s$, т.е. каналы находятся в безграничной среде и $\epsilon_c = \epsilon_c^{(2)} = (1.54 - i0.00002)^2$, что означает наличие на волокне поглощающего полимерного покрытия из бутилакрилата [10].

Как показали расчеты, в случае МОВ прямое численное решение уравнения (59) сталкивается с проблемой выхода вычисляемых значений $\det M$ за разрядную сетку компьютера. Подобный дефект, вызванный перемножением множества функций Ханкеля, уже отмечался в [5] при исследовании МОВ с круговыми включениями. Он устранен за счет представления дисперсионного уравнения в форме, не требующей вычисления $\det M$ [5]. С этой целью система (58) записывается в виде

$$\sum_{j \neq k} M_{vj} X_j X_k^{-1} = -M_{vk} \quad (v \neq k), \quad (66)$$

$$\sum_{j=1}^n M_{kj} X_j X_k^{-1} = 0, \quad (67)$$

где k — номер одного из уравнений системы (58). Если определитель $n-1$ -го порядка системы (66) отличен от нуля, то данная система имеет единственное решение относительно неизвестных $X_j X_k^{-1}$. Тогда после вычисления указанных величин из (66) выражение (67) приобретает смысл дисперсионного уравнения относительно β . Его решение не вызывает принципиальных затруднений. Одновременно из (9), (11), (66) определяется поле моды.

Таблица 2. Внутренняя сходимость вычислительной схемы при расчете постоянных распространения мод МОВ с воздушными каналами кругового сечения ($F = 1$), окруженных однородной средой ($\epsilon_c = \epsilon_c^{(1)}$) и при наличии на МОВ полимерного покрытия

Моды	H_x			H_y		
	m	$\text{Re } \beta$	$-\text{Im } \beta \cdot 10^7$	m	$\text{Re } \beta$	$-\text{Im } \beta \cdot 10^7$
ϵ_c	4	1.442991	0.742	4	1.442991	0.742
$\epsilon_c^{(1)}$	8	1.442991	0.743	8	1.442991	0.743
	12	1.442991	0.743	12	1.442991	0.743
	12	1.442991	0.386	4	1.442991	0.386
$\epsilon_c^{(2)}$	8	1.442991	0.354	8	1.442991	0.354
	12	1.442991	0.354	12	1.442991	0.354

Таблица 3. Внутренняя сходимость вычислительной схемы при расчете постоянных распространения мод МОВ с воздушными каналами эллиптического сечения формата $F = 1/2$, окруженных однородной средой ($\epsilon_c = \epsilon_c^{(1)}$) и при наличии на МОВ полимерного покрытия ($\epsilon_c = \epsilon_c^{(2)}$)

Моды	H_x			H_y		
	m	$\text{Re } \beta$	$-\text{Im } \beta \cdot 10^7$	m	$\text{Re } \beta$	$-\text{Im } \beta \cdot 10^7$
$\epsilon_c^{(1)}$	4	1.442901	1.469	4	1.442782	0.817
	8	1.442789	0.871	8	1.442659	0.463
	12	1.442770	0.800	12	1.442640	0.424
	16	1.442767	0.786	16	1.442636	0.416
	20	1.442766	0.783	20	1.442635	0.414
	24	1.442766	0.783	24	1.442635	0.414
$\epsilon_c^{(2)}$	4	1.442901	1.408	4	1.442781	1.943
	8	1.442789	1.731	8	1.442659	0.289
	12	1.442770	1.514	12	1.442640	0.214
	16	1.442767	1.484	16	1.442636	0.203
	20	1.442766	1.478	20	1.442635	0.200
	24	1.442766	1.477	24	1.442635	0.200

Если в сечении МОВ отсутствуют элементы симметрии, то конкретный выбор номера k в (66), (67) не имеет существенного значения. Однако при наличии в сечении МОВ осей симметрии некоторые компоненты вектора X могут обратиться в нуль [5]. Если взять в качестве X_k такую компоненту, то матрица системы (66) становится вырожденной, и описанная схема теряет смысл. В частности, для рассматриваемых МОВ $e_0^{(1)} = 0$, $h_0^{(1)} \neq 0$ при расчете основной моды с главной поперечной компонентой магнитного поля H_x (H_x -мода) и $h_0^{(1)} = 0$, $e_0^{(1)} \neq 0$

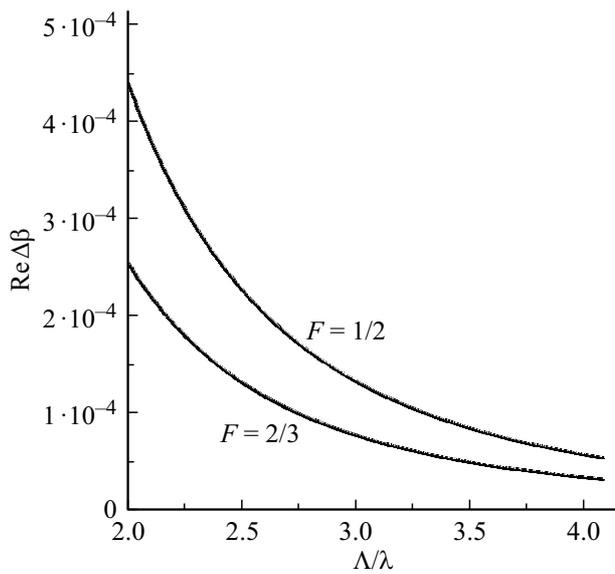


Рис. 3. Спектральные зависимости модового двулучепреломления для МОВ с эллиптическими воздушными каналами форматов 2/3 и 1/2.

при расчете моды с главной компонентой H_y (H_y -мода) [5]. Здесь номер 1 соответствует ближайшему от начала координат включению, расположенному в области $x > 0$, центр которого находится на оси $0x$ (рис. 1, *b*). Поэтому при расчете H_y -моды в качестве X_k выбиралась компонента $e_0^{(1)}$, а при расчете H_x -моды — компонента $h_0^{(1)}$.

Модовое двулучепреломление $\text{Re } \Delta\beta$, где $\Delta\beta$ — разность постоянных распространения H_x - и H_y -мод и дихроизм, т.е. различное затухание H_x - и H_y -мод МОВ с эллиптическими воздушными каналами, иллюстрируют рис. 3, 4 и табл. 2, 3.

Кривые на рис. 3, относящиеся к $\epsilon_c = \epsilon_c^{(1)}$ и $\epsilon_c = \epsilon_c^{(1)}$, в масштабах рисунка неотличимы. Согласно рис. 3, модовое двулучепреломление увеличивается с уменьшением отношений F и Λ/λ . Подобные закономерности уже отмечались в литературе [18,19,21]. В частности, при $\Lambda/\lambda < 2.2$ $\text{Re } \Delta\beta$ превосходит значение $2 \cdot 10^{-4}$, характерное для традиционных волокон с сильным двулучепреломлением, обусловленным механическими напряжениями [22]. Но в МОВ имеет место также анизотропия затухания H_x - и H_y -мод, вызванная вытеканием их излучения из сердцевины волокна, которая в традиционных типах двулучепреломляющих волокон отсутствует. Результаты расчета предлагаемым методом дихроизма в рассматриваемых МОВ представлены на рис. 4.

Табл. 2 и 3 позволяют судить о внутренней сходимости развитого метода при расчете зависимостей на рис. 3, 4. Представленные в них данные относятся к $\Lambda/\lambda = 3$.

Из сравнения табл. 2 и 3 можно заключить, что увеличение формата воздушных каналов негативно сказыва-

ется на скорости сходимости вычислительной схемы, что объясняется усложнением конфигурации полей, описываемых полиномами Фурье (9), (11). Еще из табл. 2 и 3 следует, что постоянные распространения мод МОВ в виде воздушных каналов в безграничном кварцевом стекле и мод МОВ той же поляризации и с теми же воздушными каналами, но с полимерным покрытием, имеют практически совпадающие вещественные части, однако их мнимые части существенно различаются.

В табл. 3 и на рис. 3 близость указанных значений $\text{Re } \beta$ объясняется тем, что поля основных мод МОВ хорошо локализованы в сердцевине волокна и слабо взаимодействуют с внешней границей волокна [5]. В то же вре-

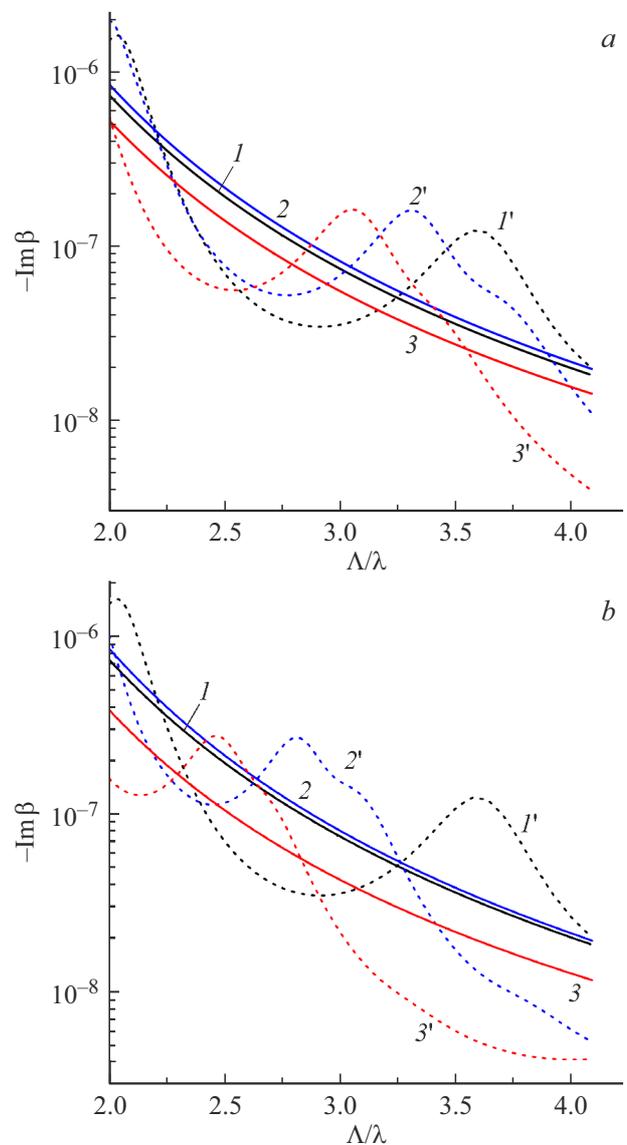


Рис. 4. Спектральные зависимости коэффициентов затухания мод МОВ с эллиптическими воздушными каналами форматов $F = 1$ (кривые 1, 1'), 2/3 (*a*; 2, 2' — H_x -моды; 3, 3' — H_y -моды) и 1/2 (*b*; 2, 2' — H_x -моды; 3, 3' — H_y -моды). Кривые 1–3 — каналы в безграничной среде, 1'–3' — МОВ с полимерным покрытием.

мя названное взаимодействие приводит к образованию стоячих волн между воздушными каналами и границей $r = \rho_0$, которое существенно влияет на затухание мод, вызванное вытекания излучения из сердцевины волокна [10]. Согласно табл. 3, этот эффект ведет к увеличению модового дихроизма, что открывает возможности создания одномодовых однополяризационных волокон для телекоммуникационных и сенсорных приложений. Резонансный характер данного эффекта [10] приводит к немонотонным зависимостям $\text{Im} \beta(\lambda)$, представленным на рис. 4 штриховыми линиями. Как следует из рис. 4, эти зависимости существенно зависят от внутренней структуры МОВ.

Заключение

Предложен новый метод решения векторной волновой задачи на собственные значения для мод МОВ с произвольным конечным числом внутренних каналов и любой геометрией их расположения в поперечном сечении МОВ. Предполагается, что внешняя граница МОВ и границы каналов являются замкнутыми и описываются произвольными однозначными функциями угловых переменных $\rho_0(\varphi)$ и $\rho_k(\varphi_k)$ в глобальной и локальных системах координат. Продольные компоненты электромагнитного поля моды на указанных границах представляются полиномами Фурье по угловым переменным. С использованием двумерных функций Грина для каждой из формирующих МОВ однородных сред и представления этих функций рядами по цилиндрическим функциям на основании теоремы сложения Графа сформулирована однородная алгебраическая система (58) относительно коэффициентов названных полиномов. Если функции $\rho_0(\varphi)$ и $\rho_k(\varphi_k)$ имеют непрерывные производные, то вычисление матричных элементов системы предполагает интегрирование непрерывных функций и не вызывает затруднений. В работе представлены примеры расчета МОВ с функциями $\rho_0(\varphi)$ и $\rho_k(\varphi_k)$, обладающими указанным свойством. Показано, что в частном случае круглого диэлектрического волновода метод дает точное аналитическое решение волновой задачи. Для более сложных волноводных структур, таких как диэлектрический эллиптический волновод и МОВ с эллиптическими воздушными каналами получены оценки внутренней сходимости метода относительно порядка полиномов Фурье. Исследовано модовое двулучепреломление в названных МОВ. Установлено, что на модовый дихроизм, состоящий в различии коэффициентов затухания основных ортогонально поляризованных мод данных волокон, существенно влияет внешняя граница волокна.

При использовании волноводных моделей с разрывными функциями $\rho_0(\varphi)$ и (или) $\rho_k(\varphi_k)$ вычисление матричных элементов системы (58) сводится к интегрированию кусочно-непрерывных функций, которое также не вызывает принципиальных затруднений. Однако в этом случае ряды Фурье для продольных компонент

электромагнитного поля моды не являются абсолютно сходящимися. В результате изложенный метод становится асимптотическим. Проявление этой особенности при расчете мод прямоугольных диэлектрических волноводов рассмотрено в отдельной работе, которая будет опубликована в журнале „Вестник МГУ им. А.А. Кулешова“.

Финансирование работы

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь „1.15 Фотоника и электроника для инноваций“.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] J. Lai, S. Jiang. Appl. Comput. Harmon. Anal., **44** (3), 645 (2018). DOI: 10.1016/j.acha.2016.06.009
- [2] W. Lu, Y.Y. Lu. J. Lightwave Technol., **30** (11), 1610 (2012). DOI: 10.1109/JLT.2012.2189355
- [3] E. Pone, A. Hassani, S. Lacroix, A. Kabashin, M. Skorobogatiy. Opt. Express, **15** (16), 10231 (2007). DOI: 10.1364/OE.15.010231.
- [4] S.V. Boriskina, T.M. Benson, P. Sewell, A.I. Nosich. IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron., **8** (6), 1225 (2002). DOI: 10.1109/JSTQE.2002.806729
- [5] А.Б. Сотский. *Теория оптических волноводных элементов* (УО „МГУ им. А.А. Кулешова“, Могилев, 2011)
- [6] T.P. White, B.T. Kuhlmeiy, R.C. McPhedran, D. Maystre, G. Renversez, C.M. de Sterke, L.C. Botten. J. Opt. Soc. Am. B, **19** (10), 2322 (2002). DOI: 10.1364/JOSAB.19.002322
- [7] B.T. Kuhlmeiy, T.P. White, G. Renversez, D. Maystre, L.C. Botten, C.M. de Sterke, R.C. McPhedran. J. Opt. Soc. Am. B, **19** (10), 2331 (2002). DOI: 10.1364/JOSAB.19.002331
- [8] A.B. Sotsky, An Ying. Mogilev State A. Kuleshov University Bull. Ser. B., **59** (1), 42 (2022).
- [9] А.Б. Сотский, Л.И. Сотская, В.П. Минкович, D. Monzon-Hernandez. ЖТФ, **79** (6), 103 (2009). [A.B. Sotsky, L.I. Sotskaya, V.P. Minkovich, D. Monzon-Hernandez. Tech. Phys., **54** (6), 865 (2009). <https://doi.org/10.1134/S1063784209060152>]
- [10] M.S. Sicacha, V.P. Minkovich, A.B. Sotsky, A.V. Shilov, L.I. Sotskaya, E.A. Chudakov. J. Eur. Opt. Soc.: Rapid Publ., **17**, 24 (2021). DOI: 10.1186/s41476-021-00169-4
- [11] Д. Маркузе. *Оптические волноводы* (Мир, М., 1974), с. 576. [Пер. с англ.: D. Marcuse. *Light Transmission Optics* (Van Nostrand Reinhold Company, NY.—Cincinnati—Toronto—London—Melbourne., 1972)]
- [12] Г. Корн, Т. Корн. *Справочник по математике* (Наука, М., 1977), с. 831. [Пер. с англ.: G. Korn T. Korn. *Mathematical handbook* (McGraw-Hill Book Company, NY.—SF—Toronto—London—Sydney., 1968)]
- [13] Е.А. Иванов. *Дифракция электромагнитных волн на двух телах* (Наука, Минск, 1968)

- [14] C. Yeh, F.I. Shimabukuro. *The Essence of Dielectric Waveguides* (Springer, NY., 2008)
- [15] D. Marcuse. *Theory of Dielectric Optical Waveguides* (Academic Press, NY., 1974)
- [16] M.J. Steel, T.P. White, C.M. de Sterke, R.C. McPhedran, L.C. Botten. *Opt. Lett.*, **26** (8), 488 (2001).
DOI: 10.1364/OL.26.000488
- [17] А. Снайдер, Дж. Лав. *Теория оптических волноводов* (Радио и связь, М., 1987)
- [18] M.J. Steel, R.M. Osgood. *J. Lightwave Technol.*, **19** (4), 495 (2001). DOI: 10.1109/50.920847
- [19] L. Wang, D. Yang. *Opt. Express*, **15** (14), 8892 (2007).
DOI: 10.1364/OE.15.008892
- [20] V.P. Minkovich, A.V. Kir'yanov, A.B. Sotsky, L.I. Sotskaya. *J. Opt. Soc. Am. B*, **21** (6), 1161 (2004).
DOI: 10.1364/JOSAB.21.001161
- [21] А.Б. Сотский, Л.И. Сотская, О.А. Паушкина. *Письма в ЖТФ*, **36** (10), 81 (2010).
- [22] Г. Агравал. *Нелинейная волоконная оптика* (Мир, М., 1996)