

01;11

## Различные режимы трех связанных генераторов, способных демонстрировать квазипериодические колебания

© А.П. Кузнецов, Ю.В. Седова, Н.В. Станкевич

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратов, Россия  
E-mail: sedovayv@yandex.ru

Поступило в Редакцию 5 июля 2022 г.

В окончательной редакции 17 октября 2022 г.

Принято к публикации 23 октября 2022 г.

Рассмотрена динамика трех связанных генераторов, способных демонстрировать автономные квазипериодические колебания. Обсуждается сложное устройство ляпуновских карт системы, выявляющих инвариантные торы разной размерности, квазипериодические бифуркации и резонансную паутину Арнольда на базе торов разной размерности. Обнаружена возможность четырехчастотных торов в случае, когда индивидуальные подсистемы демонстрируют режим предельного цикла.

**Ключевые слова:** генератор, квазипериодические колебания, инвариантные торы, показатели Ляпунова.

DOI: 10.21883/PJTF.2022.24.54018.19296

Квазипериодические колебания представляют собой самостоятельный класс, достаточно широко распространенный в науке и технике [1]. Наиболее известны и изучены такие колебания, возникающие при взаимодействии автоколебательных подсистем с периодическими режимами. С другой стороны, в [2] рассмотрен пример электронной схемы с автономной квазипериодической динамикой. В дополнение к [2] сравнительно недавно было предложено несколько вариантов подобных систем (квазипериодических генераторов) [3–5], которые были реализованы экспериментально. Введение их в рассмотрение позволило сформулировать широкий круг задач. Так, последовательно были рассмотрены задачи о динамике автономных генераторов, генераторов с внешним воздействием, двух связанных генераторов, а также возбуждение внешним сигналом двух связанных генераторов [3–9]. Отметим, что с данной тематикой связана также проблема квазипериодических бифуркаций (бифуркаций инвариантных торов) [10–14]. Как известно в теории колебаний, увеличение числа взаимодействующих подсистем заметно обогащает динамику. В настоящей работе в развитие задачи о динамике двух квазипериодических генераторов [7] рассмотрим случай трех связанных подсистем. Выберем связь в виде цепочки (случай связи типа кольца является отдельной задачей). В качестве инструмента будем использовать ляпуновский анализ по аналогии с [7]. Он позволяет выявлять глобальное устройство плоскости параметров, включая такие моменты, как организация иерархии торов разной размерности, и очень сложно устроенные структуры типа резонансной паутины Арнольда [15], что представляется пока недостижимым в рамках других методов. Отметим, что ляпуновский анализ с достаточной для физических задач точностью позволяет выявлять локальные бифуркации торов по методике [10].

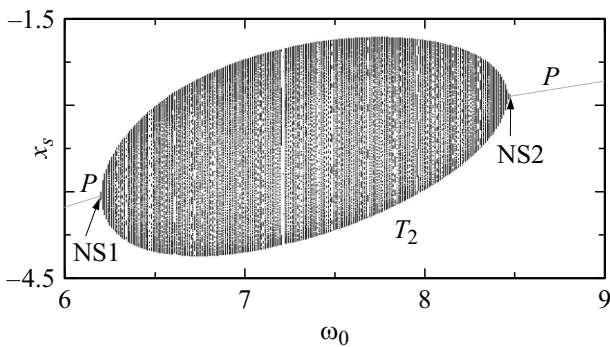
Уравнения системы запишем по аналогии со случаем двух генераторов [7]:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - (\lambda_1 + z_1 + x_1^2 - \beta x_1^4)\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + M_C(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= 0, \\ \dot{z}_1 &= b(\varepsilon - z_1) - kx_1^2, \\ \ddot{x}_2 - (\lambda_2 + z_2 + x_2^2 - \beta x_2^4)\dot{x}_2 + (\omega_0 + \Delta_1)^2 x_2 &+ M_C(2\dot{x}_2 - \dot{x}_1 - \dot{x}_3) = 0, \\ \dot{z}_2 &= b(\varepsilon - z_2) - kx_2^2, \\ \ddot{x}_3 - (\lambda_3 + z_3 + x_3^2 - \beta x_3^4)\dot{x}_3 + (\omega_0 + \Delta_2)^2 x_3 &+ M_C(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) = 0, \\ \dot{z}_3 &= b(\varepsilon - z_3) - kx_3^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $x, z$  — переменные генераторов,  $\omega_0$  — собственная частота первого генератора,  $\Delta_{1,2}$  — частотные расстройки второго и третьего генераторов относительно первого,  $M_C$  — коэффициент связи. В соответствии с [6,7] выбираем следующие параметры:  $\varepsilon = 4$ ,  $b = 1$ ,  $k = 0.02$ ,  $\beta = 1/18$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ .

В индивидуальном генераторе в некотором диапазоне изменения параметра  $\omega_0$  наблюдаются двухчастотные квазипериодические режимы  $T_2$ , за исключением очень узких резонансных интервалов. На рис. 1 представлена соответствующая иллюстрация в виде бифуркационной диаграммы, построенной для сечения Пуанкаре плоскостью  $\dot{x} = 0$ ; этому отвечает набор точек  $(x_s, 0, z_s)$ . На рис. 1 показана диаграмма в проекции на переменную  $x_s$ . На границах диапазона NS1 ( $\omega_0 \approx 6.201$ ) и NS2 ( $\omega_0 \approx 8.45$ ) реализуются бифуркации Неймарка–Сакера, а вне его наблюдается режим предельного цикла  $P$ .

Для системы связанных генераторов (1) выберем сначала частотные параметры  $\omega_0 = 5$ ,  $\Delta_2 = 1$ , когда первый и третий генераторы демонстрируют режим



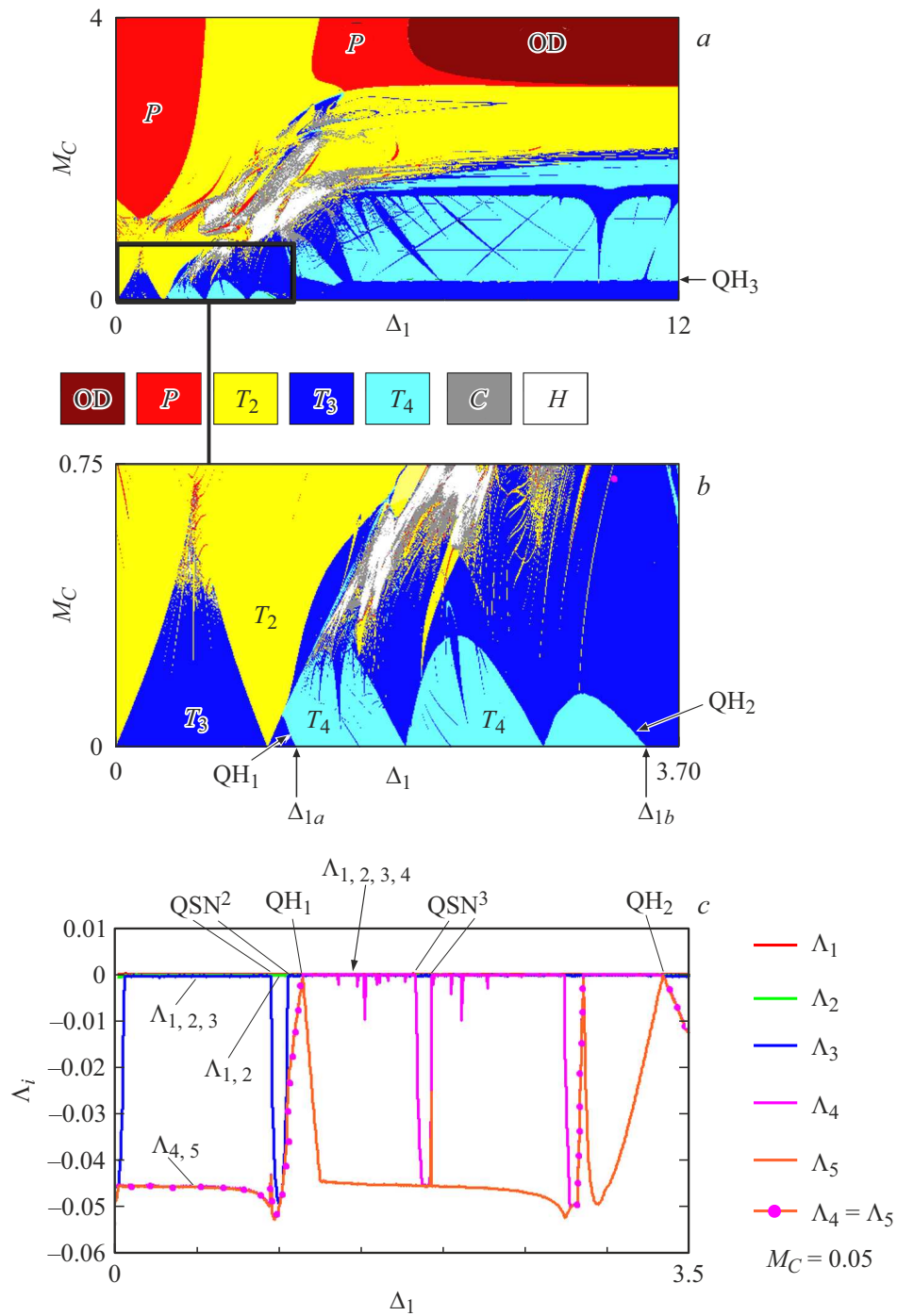
**Рис. 1.** Бифуркационная диаграмма индивидуального генератора квазипериодических колебаний. NS1 и NS2 — точки бифуркации Неймарка–Сакера.

периодических колебаний. Тогда при вариации параметра  $\Delta_1$  второй генератор демонстрирует переход от предельного цикла к квазипериодическому режиму при  $\Delta_{1a} = 1.201$  и обратно при  $\Delta_{1b} = 3.45$ . На рис. 2, *a, b* показаны ляпуновская карта системы (1) и ее увеличенный фрагмент на плоскости  $(\Delta_1, M_C)$ . Можно видеть области четырех- ( $T_4$ ), трех- ( $T_3$ ) и двухчастотных ( $T_2$ ) торов, периодических режимов ( $P$ ), гибели колебаний (OD), хаоса ( $C$ ) и гиперхаоса ( $H$ ). Тип режима определяется по спектру показателей Ляпунова аналогично [7], причем размерность инвариантных торов определяется числом нулевых показателей. Обсудим устройство карты подробнее. Проще всего организована область  $\Delta_1 < \Delta_{1a}$ , когда все индивидуальные генераторы находятся в режиме предельных циклов. На увеличенном фрагменте карты (рис. 2, *b*) в этом случае можно видеть два языка двухчастотных торов  $T_2$ , между которыми расположена область трехчастотной квазипериодичности  $T_3$ . При большой связи на рис. 2, *a* перекрытие языков приводит к периодическому режиму  $P$  полной синхронизации трех генераторов. В этом случае картина аналогична случаю трех связанных генераторов ван дер Поля [16]. Отличия возникают при переходе частотного параметра  $\Delta_1$  через значение  $\Delta_{1a}$ , когда второй генератор переходит в режим квазипериодических колебаний. В соответствии с этим на карте появляется область четырехчастотной квазипериодичности  $T_4$  (рис. 2, *b*). Такой переход происходит через квазипериодическую бифуркацию Хопфа  $QH_1$ . На рис. 2, *b* линия этой бифуркации выходит из точки  $\Delta_1 = \Delta_{1a}$ . Эту бифуркацию можно диагностировать по методике [10] по графикам показателей Ляпунова (рис. 2, *c*). Условием ее является равенство до порога бифуркации двух старших ненулевых показателей  $\Lambda_4 = \Lambda_5 < 0$ . В момент бифуркации показатель  $\Lambda_4$  становится нулевым, а  $\Lambda_5$  вновь отрицательным. При этом тор  $T_4$  рождается мягким образом из тора  $T_3$ . В свою очередь в возникшую область четырехчастотных торов погружена система языков трехчастотных торов, имеющих острия на оси частотной расстройки  $\Delta_1$ . На рис. 2, *c* показаны границы одного из таких языков  $QSN^3$ , кото-

рым отвечают седлоузловые бифуркации трехчастотных торов. Для бифуркации такого типа характерно, что при вариации параметра к нулю подходит и становится равным нулю только один показатель Ляпунова [10], в нашем случае  $\Lambda_4$ , а  $\Lambda_5 < 0$  (рис. 2, *c*). Тогда при пересечении границы языка устойчивый тор  $T_3$  сталкивается с седловым тором той же размерности, в результате чего возникает тор  $T_4$  [10]. Отметим также появление областей хаоса  $C$  и гиперхаоса  $H$  при увеличении связи, когда торы разрушаются. При переходе через значение  $\Delta_1 = \Delta_{1b}$  второй генератор снова переходит в режим предельного цикла, и снова возникают трехчастотные торы через квазипериодическую бифуркацию Хопфа  $QH_2$ , проходящую в обратном порядке (рис. 2, *b, c*). Обратимся вновь к рис. 2, *a*. Можно видеть, что при больших значениях  $\Delta_1$  при возрастании связи трехчастотные торы превращаются снова в четырехчастотные. Этот переход также связан с квазипериодической бифуркацией Хопфа  $QH_3$ . Такие торы возникают, хотя все три индивидуальных генератора находятся в режиме предельных циклов, что является еще одним отличием от случая трех осцилляторов ван дер Поля [16]. Эта область четырехчастотных торов пронизана узкими полосами трехчастотных торов и формирует структуру, получившую название резонансной паутины Арнольда [15]. При увеличении связи возможными становятся двухчастотные торы, отвечающие широкой полосе, не имеющей резонансных включений. Далее возникает очень узкая область периодического режима, а при  $M_C > 3.0$  устойчивым остается только состояние равновесия: наблюдается режим гибели колебаний OD.

Мы обсудили случай, когда только один индивидуальный генератор демонстрирует квазипериодические колебания. Будем теперь варьировать обе частотные расстройки ( $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ ). Параметр  $\omega_0$  выберем равным  $2\pi$ , что отвечает режиму квазипериодических колебаний в автономном первом генераторе. Таким образом, теперь все три генератора в автономном режиме могут демонстрировать квазипериодические колебания. Чтобы визуализировать возникающие режимы, в этом случае удобно использовать карту показателей Ляпунова на плоскости частотных расстройек  $(\Delta_1, \Delta_2)$ , показанную на рис. 3 при двух фиксированных уровнях связи. Можно видеть, что теперь при малой связи возможны шестичастотные  $T_6$  и пятичастотные  $T_5$  торы. С ростом связи шестичастотные торы полностью исчезают, а области пятичастотных заметно уменьшаются. Наблюдаются также характерные пересекающиеся полосы в виде резонансной паутины Арнольда. Теперь такая структура возникает на базе не только четырехчастотных торов, но и пятичастотных. Отметим, что области двухчастотных торов очень небольшие и отвечают пересечению резонансных полос трехчастотных торов. Периодические режимы (режимы полной синхронизации) при данных уровнях связи отсутствуют.

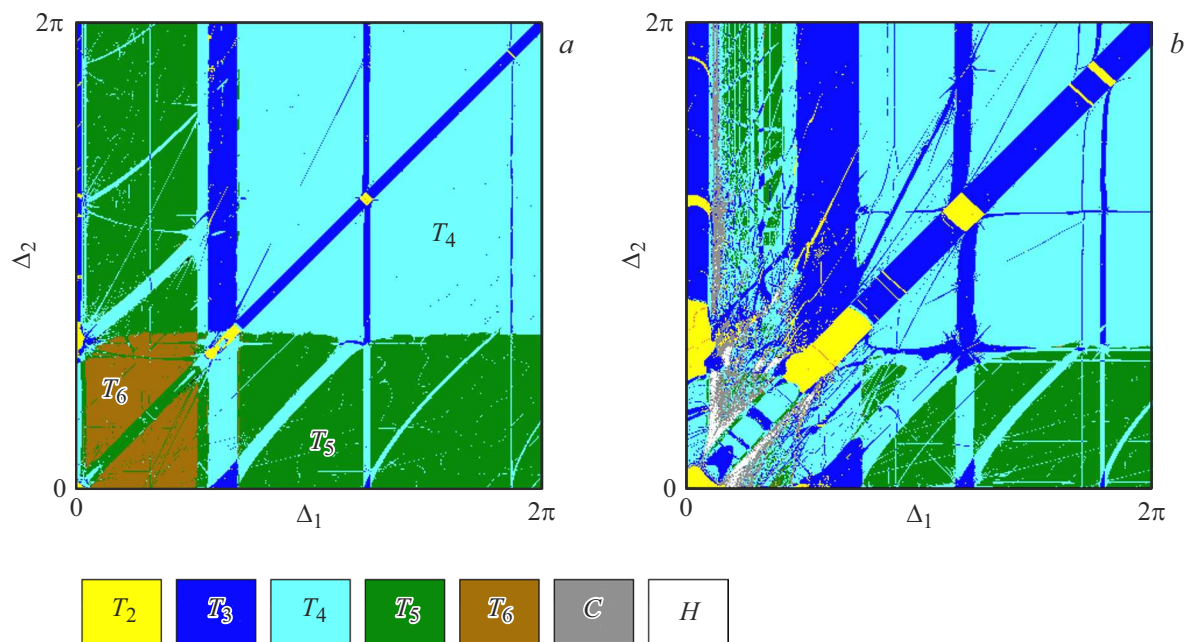
Таким образом, задачи о динамике квазипериодических генераторов оказываются достаточно сложными.



**Рис. 2.** Карта показателей Ляпунова (a), ее фрагмент (b) и графики показателей Ляпунова (c). QSN<sup>2</sup> — седлоузловые бифуркации двухчастотных торов, QSN<sup>3</sup> — седлоузловые бифуркации трехчастотных торов, QH — квазипериодические бифуркации Хопфа трехчастотных торов. Цветной вариант рисунка представлен в электронной версии статьи.

Логичным развитием случая двух связанных генераторов является переход к анализу трех связанных генераторов. Такая система может быть в значительной мере изучена с помощью двухпараметрического ляпуновского анализа. В случае квазипериодических колебаний в одном индивидуальном генераторе картина оказывается иной, чем в случае трех связанных генераторов ван дер

Поля. Наблюдаются квазипериодические бифуркации Хопфа, седлоузловые бифуркации инвариантных торов и резонансная паутина Арнольда. Четырехчастотные торы возникают и в случае, когда все три индивидуальных генератора находятся в режиме предельных циклов, что является еще одним отличием от случая осцилляторов ван дер Поля. В случае квазипериодических колебаний



**Рис. 3.** Карты показателей Ляпунова на плоскости частотных расстройк генераторов.  $M_C = 0.1$  (a) и  $0.3$  (b). Цветной вариант рисунка представлен в электронной версии статьи.

в каждом индивидуальном генераторе наблюдается возникновение торов высокой размерности и резонансной паутины Арнольда на базе торов разной размерности.

### Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-12-00121.

### Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

### Список литературы

- [1] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, *Synchronization: a universal concept in nonlinear science* (Cambridge University Press, 2001).
- [2] Т. Мацумото, Хаотические системы. Тематический выпуск ТИИЭР, **75** (8), 66 (1987).
- [3] В.С. Анищенко, С.М. Николаев, Письма в ЖТФ, **31** (19), 88 (2005). [V.S. Anishchenko, S.M. Nikolaev, Tech. Phys. Lett., **31** (10), 853 (2005). DOI: 10.1134/1.2121837].
- [4] V. Anishchenko, S. Nikolaev, J. Kurths, Phys. Rev. E., **73** (5), 056202 (2006). DOI: 10.1103/PhysRevE.73.056202
- [5] В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, *Лекции по нелинейной динамике* (НИЦ РХД, М.-Ижевск, 2011).
- [6] А.П. Кузнецов, Н.В. Станкевич, Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика, **23** (3), 71 (2015). DOI: 10.18500/0869-6632-2015-23-3-71-93
- [7] A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, N.A. Shchegoleva, N.V. Stankevich, Physica D, **398**, 1 (2019). DOI: 10.1016/j.physd.2019.05.014
- [8] А.П. Кузнецов, Ю.В. Седова, Письма в ЖТФ, **48** (4), 48 (2022). DOI: 10.21883/PJTF.2022.04.52086.18925 [A.P. Kuznetsov, Yu.V. Sedova, Tech. Phys. Lett., **48** (2), 85 (2022). DOI: 10.21883/TPL.2022.02.52858.18925].
- [9] А.П. Кузнецов, Ю.В. Седова, Н.В. Станкевич, ЖТФ, **91** (11), 1619 (2021). DOI: 10.21883/JTF.2021.11.51519.145-2
- [10] H. Broer, C. Simó, R. Vitolo, Regul. Chaotic Dyn., **16** (1-2), 154 (2011). DOI: 10.1134/S1560354711010060
- [11] Yu.A. Kuznetsov, H.G.E. Meijer, *Numerical bifurcation analysis of maps: from theory to software* (Cambridge University Press, 2019), p. 44–49.
- [12] K. Kamiyama, M. Komuro, T. Endo, K. Aihara, Int. J. Bifur. Chaos, **24** (12), 1430034 (2014). DOI: 10.1142/S0218127414300341
- [13] M. Komuro, K. Kamiyama, T. Endo, K. Aihara, Int. J. Bifur. Chaos, **26** (07), 1630016 (2016). DOI: 10.1142/S0218127416300160
- [14] M. Sekikawa, N. Inaba, Int. J. Bifur. Chaos, **31** (01), 2150009 (2021). DOI: 10.1142/S0218127421500097
- [15] H. Broer, C. Simó, R. Vitolo, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, **15** (5), 769 (2008). DOI: 10.36045/bbms/1228486406
- [16] Yu.P. Emelianova, A.P. Kuznetsov, I.R. Sataev, L.V. Turukina, Physica D, **244** (1), 36 (2013). DOI: 10.1016/j.physd.2012.10.012