

Спонтанная эмиссия в утекающие моды нанопроводов

© В.В. Николаев¹, Е.И. Гиршова^{1,¶}, М.А. Калитеевский²

¹ Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
194021 Санкт-Петербург, Россия

² Университет ИТМО,
197101 Санкт-Петербург, Россия

¶ E-mail: ilinishna@gmail.com

Поступила в Редакцию 13 октября 2022 г.

В окончательной редакции 26 октября 2022 г.

Принята к публикации 26 октября 2022 г.

Получены алгебраические выражения для вероятности спонтанного излучения в утекающие моды для эмиттеров в нанопроводе, ориентированных радиально, аксиально и азимутально по отношению к оси нанопровода. Рассчитаны диаграммы направленности и зависимости вероятности спонтанной эмиссии от положения эмиттера. Показано, что при определенных значениях диаметра нанопровода вероятность спонтанной эмиссии на границе нанопровода может увеличиваться на порядок, и возможно формирование узкой диаграммы направленности.

Ключевые слова: нанопровод, спонтанная эмиссия, утекающие моды.

DOI: 10.21883/FTP.2022.11.54257.9977

1. Введение

Прогресс в области технологии выращивания нанопроводов сделал возможным изготовление различных оптоэлектронных устройств на их основе, в частности светодиодов [1,2], сенсоров [3,4] и источников одиночных фотонов [5–7]. Технология создания нанопроводов позволяет создавать структуры с изменяемым профилем химического состава и морфологической структуры материала в зависимости от радиуса и положения вдоль оси [8–10]. Нанопровод является пространственной неоднородностью диэлектрической проницаемости, что может приводить к изменению вероятности спонтанного излучения (эффекту Парселла) для эмиттера, расположенного внутри нанопровода или вне его [11,12].

Существует множество работ, посвященных расчету вероятности спонтанного излучения для нанопроводов, использующих разный теоретический формализм. Метод, основанный на функциях Грина электромагнитного поля для неоднородных структур, использует громоздкий формализм и не позволяет получить итоговые выражения для вероятности спонтанного излучения в определенном направлении в виде алгебраического выражения [13–15]. Формализм, основанный на использованной концепции локальной плотности состояний [16], неудобен для анализа влияния пространственной ориентации излучателя на вероятность спонтанной эмиссии, поскольку в случае пространственно неоднородных структур в малом интервале энергии могут содержаться моды, обладающие разным направлением электрического поля в точке нахождения эмиттера, что может особенно сильно проявляться в случае оптического резонанса. Значительная часть работ, посвященных расчетам вероятности спонтанной эмиссии, использует

численные методы, результаты применения которых, очевидно, обладают ограниченной применимостью с точки зрения описания физической природы того или иного явления.

Несмотря на значительное число работ по данной теме, алгебраические выражения для вероятности спонтанной эмиссии в фиксированном направлении для определенной ориентации эмиттера, расположенного внутри или около диэлектрического цилиндра, до сих пор не получены. Данное обстоятельство существенно осложняет анализ процессов излучения в нанопроводах, а также создания устройств на их основе.

Кроме этого, при анализе процессов излучения в нанопроводе иногда ограничиваются описанием взаимодействия эмиттера с волноводными модами, игнорируя излучение в свободное пространство (вытекающие моды), что, возможно, связано с наличием фундаментальной волноводной моды HE₁₁, которая существует при любом значении радиуса цилиндрического волновода. Необходимо учитывать, что при малых радиусах волновода вероятность эмиссии в волновую моду очень мала [17–21], и основной вклад в эмиссию вносят утекающие моды.

Цель данной работы — получение алгебраических выражений для вероятности спонтанного излучения в утекающие моды для эмиттера, ориентированного радиально, аксиально или азимутально по отношению к оси нанопровода, в зависимости от положения эмиттера и направления излучения, а также расчет коэффициента Парселла, и диаграммы направленности излучения.

Схема структуры показана на рис. 1: эмиттер может быть ориентирован аксиально (вдоль оси нанопровода z), радиально (перпендикулярно оси z) или азимутально. Показатели преломления нанопровода и окружающей среды равны 3.5 и 1.0 соответственно.

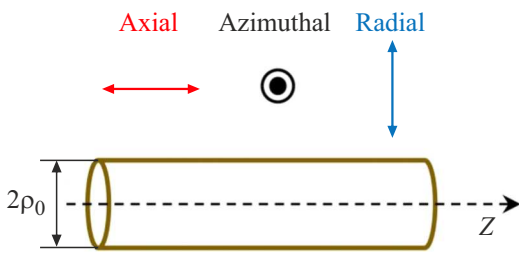


Рис. 1. Схема структуры: нанопровод и возможные ориентации диполя.

2. Основные уравнения

2.1. Матрица рассеяния цилиндрических электромагнитных волн

Рассмотрим однородную среду, характеризующуюся диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ_1 и μ_1 соответственно, в которую помещен цилиндр радиуса ρ_0 и проницаемостями ϵ_2 и μ_2 . Для данной системы введем цилиндрическую систему координат $\{\rho, \phi, z\}$, где ось z — направлена вдоль оси симметрии нанопровода.

Рассмотрим монохроматическое электромагнитное поле циклической частоты ω с фиксированным волновым числом k_z . Электрические и магнитные компоненты поля будут пропорциональны множителю $\exp(ik_z z) \exp(-i\omega t)$. Если волновое число k_z меньше волнового вектора света во внешней среде $\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} k_0$, где $k_0 = \omega/c$ есть волновой вектор в вакууме, то рассматриваемое поле будет состоять из электромагнитных волн, распространяющихся под углом к оси структуры, причем $\cos(\theta) = k_z / (\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} k_0)$. В однородной среде такое электромагнитное поле может быть представлено в виде суммы

$$\mathbf{E}_{k_z}(\mathbf{r}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{\substack{J=\text{TM,TE} \\ i=1,2}} A_{J,m}^{(i)} \tilde{\mathbf{E}}_{J,m}^{(i)}(\rho) \exp(im\phi) \exp(ik_z z), \quad (1)$$

где суммирование происходит по целым значениям квантового числа азимутального углового момента m . Индекс J обозначает ТМ- (transverse magnetic) либо ТЕ- (transverse electric) поляризацию (общий временной множитель здесь и далее опущен). Индекс $i = 1, 2$ обозначает расходящиеся и сходящиеся цилиндрические волны соответственно. Безразмерные профили электрического поля $\tilde{\mathbf{E}}_{J,m}^{(i)}(\rho)$ связаны с векторными цилиндрическими гармониками [22]:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\text{TM},m}^{(i)}(\rho) = \frac{1}{k_\rho} \mathbf{N}_m^{(i)}(\rho), \quad (2a)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\text{TE},m}^{(i)}(\rho) = \frac{1}{k_\rho} \mathbf{M}_m^{(i)}(\rho), \quad (2б)$$

где $k_\rho = \sqrt{\epsilon \mu k_0^2 - k_z^2}$ есть поперечная компонента волнового вектора, которая в общем случае может быть комплексной. Безразмерные профили магнитного поля, соответствующие электрическим полям в (2), имеют вид (в этой работе мы используем гауссову систему единиц):

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\text{TM},m}^{(i)}(\rho) = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \tilde{\mathbf{E}}_{\text{TE},m}^{(i)}(\rho) = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{i}{k_\rho} \mathbf{M}_m^{(i)}(\rho), \quad (3a)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\text{TE},m}^{(i)}(\rho) = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \tilde{\mathbf{E}}_{\text{TM},m}^{(i)}(\rho) = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{i}{k_\rho} \mathbf{N}_m^{(i)}(\rho). \quad (3б)$$

Векторные цилиндрические гармоники даются следующими выражениями [18,19]:

$$\mathbf{N}_m^{(i)}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \frac{k_\rho}{k_0} \left(ik_z H_m^{(i)}(k_\rho \rho) \mathbf{e}_\rho - mk_z \frac{H_m^{(i)}(k_\rho \rho)}{k_\rho \rho} \mathbf{e}_\phi + k_\rho H_m^{(i)}(k_\rho \rho) \mathbf{e}_z \right), \quad (4a)$$

$$\mathbf{M}_m^{(i)}(\rho) = k_\rho \left(im \frac{H_m^{(i)}(k_\rho \rho)}{k_\rho \rho} \mathbf{e}_\phi - H_m^{(i)}(k_\rho \rho) \mathbf{e}_\phi \right), \quad (4б)$$

где мы выбрали функции Ханкеля первого и второго рода $H_m^{(1)}(x)$ и $H_m^{(2)}(x)$ в качестве линейно независимых решений уравнения Бесселя; производная в функциях Ханкеля, где она есть, берется по всему аргументу. Такой выбор удобен для представления сходящихся (задаваемых функцией $H_m^{(2)}$) и расходящихся ($H_m^{(1)}$) цилиндрических волн. Из уравнений (2)–(4) видно, что ТМ(ТЕ)-поляризованные поля обладают нулевой компонентой магнитного (электрического) поля вдоль оси симметрии структуры. Постоянные коэффициенты $A_{\text{TM/TE},m}^{(1/2)}$ в (1) задают конкретный вид поля. Так, плоская линейно поляризованная волна, распространяющаяся вдоль положительного направления оси x под углом к оси z , будет даваться коэффициентами $A_{\text{TM},m}^{(1)} = A_{\text{TM},m}^{(2)} = i^m E_0/2$, $A_{\text{TE},m}^{(1)} = A_{\text{TE},m}^{(2)} = 0$ для случая магнитного поля, перпендикулярного оси z (ТМ-поляризация), и $A_{\text{TE},m}^{(1)} = A_{\text{TE},m}^{(2)} = i^m E_0/2$, $A_{\text{TM},m}^{(1)} = A_{\text{TM},m}^{(2)} = 0$ для ТЕ-поляризации, при которой электрическое поле перпендикулярно оси z . Здесь E_0 — амплитуда электрического поля плоской волны. Разложение поля вида (1) может быть применено как для внешней среды, так и для цилиндра, несмотря на то что внутри цилиндра вместо функций Ханкеля удобнее использовать функцию Бесселя $J_m(x)$, которая не расходится на оси симметрии.

В центре нашего формализма находится матрица рассеяния \hat{s}_m цилиндра для цилиндрических волн с фиксированным числом углового момента m и волновым числом k_z :

$$\begin{pmatrix} A_{\text{TM},m}^{(1)} \\ A_{\text{TE},m}^{(1)} \end{pmatrix} = \hat{s}_m(k_z) \begin{pmatrix} A_{\text{TM},m}^{(2)} \\ A_{\text{TE},m}^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Матрица рассеяния в выражении (5) связывает амплитудные коэффициенты $A_{\text{TM/TE},m}^{(2)}$ при сходящихся цилиндрических волнах с соответствующими коэффициентами $A_{\text{TM/TE},m}^{(1)}$ отраженных от цилиндра волн. Аналитические выражения для этой матрицы получены исходя из условия непрерывности тангенциальных компонент электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{H} полей на границе цилиндра:

$$\hat{s}_m(k_z) = -\frac{H_m^{(2)}(\tilde{k}_{\rho 1})}{H_m^{(1)}(\tilde{k}_{\rho 1})} \frac{1}{T_{\varepsilon,m}^{(1)} T_{\mu,m}^{(1)} - m^2 U^2} \times \begin{pmatrix} T_{\varepsilon,m}^{(2)} T_{\mu,m}^{(1)} - m^2 U^2 & -V_m \\ V_m & T_{\varepsilon,m}^{(1)} T_{\mu,m}^{(2)} - m^2 U^2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где

$$T_{\varepsilon,m}^{(i)} = \tilde{H}_m^{(i)}(\tilde{k}_{\rho 1}) - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \tilde{J}_m(\tilde{k}_{\rho 2}),$$

$$T_{\mu,m}^{(i)} = \tilde{H}_m^{(i)}(\tilde{k}_{\rho 1}) - \frac{\mu_2}{\mu_1} \tilde{J}_m(\tilde{k}_{\rho 2}),$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} \frac{k_z}{k_0} \left(\frac{1}{\tilde{k}_{\rho 1}^2} - \frac{1}{\tilde{k}_{\rho 2}^2} \right),$$

и

$$V_m = m \frac{4}{\pi} \frac{1}{\tilde{k}_{\rho 1}^2} \frac{U}{H_m^{(1)}(\tilde{k}_{\rho 1}) H_m^{(2)}(\tilde{k}_{\rho 1})}.$$

Здесь

$$\tilde{k}_{\rho 1/2} = \rho_0 \sqrt{\varepsilon_{1/2} \mu_{1/2} k_0^2 - k_z^2}$$

есть безразмерные поперечные компоненты волнового вектора во внешней среде и внутри цилиндра, которые в общем случае могут быть комплексными. Также введены обозначения

$$\tilde{H}_m^{(i)}(x) = H_m^{(i)}(x) / (x H_m^{(i)}(x))$$

и

$$\tilde{J}_m(x) = J_m'(x) / (x J_m(x)).$$

Выражение (6) справедливо для любого значения k_z и любых комплексных оптических параметров внешней среды и цилиндра. Для металлического материала цилиндра может быть удобно выразить

$$\tilde{J}_m(x) = -I_m'(-ix) / (-ix I_m(-ix)) = -\tilde{I}_m(-ix),$$

где I_m есть модифицированная функция Бесселя.

В более компактном виде матрицу рассеяния можно записать как

$$\hat{s}_m(k_z) = -\frac{H_m^{(2)}(\tilde{k}_{\rho 1})}{H_m^{(1)}(\tilde{k}_{\rho 1})} \frac{1}{\theta_{\text{Disp},m}} \begin{pmatrix} \theta_{\text{TM},m} & -V_m \\ V_m & \theta_{\text{TE},m} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где

$$\theta_{\text{Disp},m} = T_{\varepsilon,m}^{(1)} T_{\mu,m}^{(1)} - m^2 U^2, \quad \theta_{\text{TM},m} = T_{\varepsilon,m}^{(2)} T_{\mu,m}^{(1)} - m^2 U^2$$

и

$$\theta_{\text{TE},m} = T_{\varepsilon,m}^{(1)} T_{\mu,m}^{(2)} - m^2 U^2.$$

Элементы матрицы рассеяния (6), (7) связаны с коэффициентами рассеяния M_i для цилиндра [22]:

$$\hat{s}_m = -2 \begin{pmatrix} b_{m\text{I}} - \frac{1}{2} & b_{m\text{II}} \\ a_{m\text{I}} & a_{m\text{II}} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где коэффициенты M_i могут быть использованы для расчета сечения рассеяния цилиндра для плоской волны ТЕ-поляризации [15]:

$$\sigma = \frac{2}{k_0 \rho_0} (|a_{0\text{I}}|^2 + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} |a_{m\text{I}}|^2 + |b_{m\text{II}}|^2). \quad (9)$$

Для расчета сечения рассеяния ТМ-поляризованной плоской волны необходимо в (9) вместо $\{a_{m\text{II}}, b_{m\text{II}}\}$ подставить коэффициенты $\{b_{m\text{I}}, a_{m\text{I}}\}$. В (9) сечение рассеяния приводится к длине цилиндра.

2.2. Излучение во внешнее пространство

Для расчета темпа спонтанной рекомбинации во внешнее пространство посредством золотого правила Ферми необходимо задать процедуру квантования мод, способных переносить энергию излучения вонне структуры. Рассмотрим цилиндр квантования радиуса R , который впоследствии мы устремим к бесконечности. По аналогии с (6) можно получить выражение матрицы рассеяния для всего цилиндра квантования \hat{S} . В пределе большого радиуса R эта матрица имеет вид

$$\hat{S}_m(k_z) = \exp\left(i \left[2k_{\rho 1} \rho_0 - m\pi - \frac{\pi}{2} \right]\right) \hat{s}_m(k_z), \quad (10)$$

где \hat{s}_m — модифицированная матрица рассеяния цилиндра, отличающаяся от \hat{s}_m умножением на -1 элементов второго ряда ($\hat{s}_m[2, 1]$ и $\hat{s}_m[2, 2]$).

В качестве условия квантования приравняем к нулю тангенциальные компоненты поля на поверхности цилиндра квантования. С качественной точки зрения такое условие напоминает квантование электрон-дырочных пар в непрерывном спектре (формула Эллиотта). В терминах матрицы рассеяния условие квантования сводится к следующему:

1) на квантованных частотах собственные значения матрицы \hat{S}_m равняются -1 ;

2) электромагнитные поля квантованных мод соответствуют собственным векторам модифицированной матрицы рассеяния цилиндра \hat{s}_m .

Первый пункт есть условие на фазу в экспоненте в уравнении (10) и ведет к квантованию поперечного волнового вектора $k_{\rho 1}$ во внешней среде. Добавляя к этому условию Борна–Кармана вдоль оси цилиндра, которое дает квантование продольного вектора k_z , а также нормировку электромагнитного поля на энергию фотона внутри цилиндра квантования и устремляя R к бесконечности, можно получить спектр собственных мод электромагнитного поля.

Выражение для вероятности спонтанной эмиссии для перехода между двумя квантовыми состояниями имеет вид

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathbf{d}_{fi}|^2 \sum_P |\mathbf{E}_P(\mathbf{r}_0) \mathbf{e}_d|^2 \delta(\hbar\omega_{fi} - \hbar\omega_P), \quad (11)$$

где $|\mathbf{d}_{fi}|$ — матричный элемент дипольного момента оптического перехода, $\hbar\omega_{fi}$ — энергия оптического перехода, $\hbar\omega_P$ — энергия фотона квантованной нормированной оптической моды и есть комплексная амплитуда электрического поля в точке нахождения эмиттера. Суммирование происходит по всем возможным квантовым модам (характеризуемым индексом P); конкретный вид этих мод зависит от используемых правил квантования. Суммирование по всем модам с индексом P является суммированием по азимутальным числам m , поляризациям J , а также по модам, квантованным в направлениях z и ρ :

$$\sum_P \rightarrow \sum_m \sum_{J=\text{EH,HE}} \sum_{N_z} \sum_{N_\rho}, \quad (12)$$

что может быть преобразовано к виду

$$\sum_P \rightarrow \sum_m \sum_{J=\text{EH,HE}} \varepsilon_1 \mu_1 \frac{RL_z}{\pi^2} \int \frac{\hbar\omega_P}{(\hbar c)^2} d\theta d(\hbar\omega_P). \quad (13)$$

Темп спонтанной рекомбинации в утекающие моды можно записать в виде:

$$W_{\text{rad}} = \frac{3}{16} W_1 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{J=\text{EH,HE}} \int_0^\pi |\tilde{\mathbf{E}}_m^J(\rho) \mathbf{e}_d|^2 \sin\theta d\theta, \quad (14)$$

где

$$W_1 = \frac{4}{3} \mu_1 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \frac{k_0^3}{\hbar} |\mathbf{d}_{fi}|^2$$

— полный темп рекомбинации во внешней однородной среде и $\mathbf{d}_{fi} = |\mathbf{d}_{fi}| \mathbf{e}_d$ — матричный элемент дипольного момента оптического перехода. Соответствующий ему единичный комплексный вектор \mathbf{e}_d задает поляризацию оптического перехода. Выражение $\tilde{\mathbf{E}}_m^J(\rho)$ есть нормированный безразмерный профиль поля, соответствующий собственным модам цилиндра квантования с идеально проводящими цилиндрическими стенками, или, что то же самое, собственным векторам модифицированной матрицы рассеяния \hat{s}_m . Индекс $J = \text{EH, HE}$ отмечает поляризацию моды, которая в свою очередь соответствует одному из двух собственных векторов модифицированной матрицы рассеяния (см. далее). Безразмерный профиль электрического поля во внешней среде имеет вид

$$\tilde{\mathbf{E}}_m^J(\rho) = \sum_{i=1,2} \tilde{A}_{\text{TM},m}^{J,(i)} \tilde{\mathbf{E}}_{\text{TM},m}^{(i)}(\rho) + \tilde{A}_{\text{TE},m}^{J,(i)} \tilde{\mathbf{E}}_{\text{TE},m}^{(i)}(\rho), \quad (15)$$

где ТМ и ТЕ — поляризованные профили поля $\tilde{\mathbf{E}}_{\text{TM/TE},m}^{(i)}(\rho)$ приведены в (2), (4). Пары безразмерных коэффициентов при сходящихся цилиндрических волнах

$\{\tilde{A}_{\text{TM},m}^{\text{EH,(2)}}, \tilde{A}_{\text{TE},m}^{\text{EH,(2)}}\}$ и $\{\tilde{A}_{\text{TM},m}^{\text{HE,(2)}}, \tilde{A}_{\text{TE},m}^{\text{HE,(2)}}\}$ являются собственными векторами матрицы \hat{s}_m . Соответствующие коэффициенты при расходящихся волнах $\{\tilde{A}_{\text{TM},m}^{\text{EH/HE,(1)}}, \tilde{A}_{\text{TE},m}^{\text{EH/HE,(1)}}\}$ получаются при помощи (5). Нормировка собственных мод цилиндра квантования в данном контексте означает следующие равенства: $|\tilde{A}_{\text{TM},m}^{J,(2)}| + |\tilde{A}_{\text{TE},m}^{J,(2)}| = 1$ для индекса поляризации $J = \text{EH, HE}$ и аналогично для коэффициентов при расходящихся волнах. Такая нормировка (как и в целом подобные правила квантования) возможна в случае, если поглощение в цилиндре и внешней среде пренебрежимо мало (оптические константы среды цилиндра можно считать вещественными). В этом случае величины $\theta_{\text{TM},m}$ и $\theta_{\text{TE},m}$, определяющие диагональные элементы матрицы рассеяния, являются комплексно сопряженными $\theta_{\text{TE},m} = (\theta_{\text{TM},m})^*$, а величина V_m , определяющая диагональные элементы, является вещественной.

Нормированные собственные вектора модифицированной матрицы рассеяния могут быть выбраны в следующем виде:

$$\tilde{A}_{\text{TM},m}^{\text{EH,(2)}} = \tilde{A}_{\text{TE},m}^{\text{HE,(2)}} = \frac{X_{R,m}}{\sqrt{X_{R,m}^2 + V_m^2}}, \quad (16a)$$

$$\tilde{A}_{\text{TE},m}^{\text{EH,(2)}} = -\tilde{A}_{\text{TM},m}^{\text{HE,(2)}} = -\frac{V_m}{\sqrt{X_{R,m}^2 + V_m^2}}, \quad (16b)$$

где

$$X_{R,m} = \text{Re}\{\theta_{\text{TM},m}\} + \sigma \sqrt{\text{Re}\{\theta_{\text{TM},m}\}^2 + V_m^2},$$

и константа $\sigma = \text{sign}(\text{Re}\{\theta_{\text{TM}}(k_z = 0)\})$ определяется знаком величины $\text{Re}\{\theta_{\text{TM}}\}$ при угле распространения перпендикулярно оси структуры.

При помощи собственных чисел модифицированной матрицы рассеяния β^\pm

$$\tilde{\beta}^\pm = \left\{ -\frac{H_m^{(2)}(k_{\rho 1})}{H_m^{(1)}(k_{\rho 1})} \frac{1}{\theta_{\text{Disp},m}} \right\} \times \left(i \text{Im}\{\theta_{\text{TM},m}\} \pm \sigma \sqrt{(\text{Re}\{\theta_{\text{TM},m}\})^2 + V_m^2} \right) \quad (17a)$$

можно выразить коэффициенты при сходящихся волнах в уравнении (16):

$$\tilde{A}_{\text{TM},m}^{\text{EH,(1)}} = \beta^+ \tilde{A}_{\text{TM},m}^{\text{EH,(2)}}, \quad (17б)$$

$$\tilde{A}_{\text{TE},m}^{\text{EH,(1)}} = -\beta^+ \tilde{A}_{\text{TE},m}^{\text{EH,(2)}}, \quad (17в)$$

$$\tilde{A}_{\text{TM},m}^{\text{HE,(1)}} = \beta^- \tilde{A}_{\text{TM},m}^{\text{HE,(2)}}, \quad (17г)$$

$$\tilde{A}_{\text{TE},m}^{\text{HE,(1)}} = -\beta^- \tilde{A}_{\text{TE},m}^{\text{HE,(2)}}. \quad (17д)$$

Можно показать аналитически, что в случае отсутствия поглощения и усиления в структуре модули собственных чисел равны единице $|\beta^\pm| = 1$. Теперь можно прояснить разделение квантованных мод на ЕН-

и НЕ-поляризацию. При перпендикулярном распространении ($\theta = \pi/2$, $k_z = 0$) величина V_m , которая, как видно из выражения матрицы рассеяния (6), определяет смешивание ТМ- и ТЕ-поляризаций, обращается в нуль. В этом случае из соотношений (16), (17) получаем $\tilde{A}_{\text{TE},m}^{\text{EH},(2)} = \tilde{A}_{\text{TE},m}^{\text{EH},(1)} = 0$, т.е. квантованная мода ЕН-типа является чисто ТМ-поляризованной при условии отсутствия смешивания поляризаций. Аналогично, при перпендикулярном распространении НЕ-мода является ТЕ-поляризованной. При изменении угла θ квантованные моды становятся смешанными, причем доли ТМ- и ТЕ-поляризаций в них меняются непрерывно. Таким образом, мы ввели обозначение квантованных мод по аналогии с общепринятыми наименованиями волноводных мод, где смешанные ЕН (НЕ) моды стремятся стать ТМ (ТЕ) поляризованными при стремлении смешивания к нулю.

Используя свойства цилиндрических векторных гармоник (2), (4) при смене знака азимутального квантового числа m , можно переписать выражение (14) для темпа спонтанной рекомбинации в виде суммы по неотрицательным m :

$$\left\{ \frac{3}{16} \right\}^{-1} \frac{W_{\text{rad}}}{W_1} = \int_0^\pi (|\tilde{\mathbf{E}}_{m=0}^{\text{TM}}(\rho)\mathbf{e}_{d,p}|^2 + |\tilde{\mathbf{E}}_{m=0}^{\text{TE}}(\rho)\mathbf{e}_{d,s}|^2) \sin \theta d\theta + 2 \sum_{J=\text{EH,HE}} \sum_{m=1}^{+\infty} \int_0^\pi (|\tilde{\mathbf{E}}_m^J(\rho)\mathbf{e}_{d,p}|^2 + |\tilde{\mathbf{E}}_m^J(\rho)\mathbf{e}_{d,s}|^2) \sin \theta d\theta. \quad (18)$$

Здесь нижним индексом p обозначается часть вектора поляризации эмиттера \mathbf{e}_d , лежащая в плоскости, содержащей ось цилиндра и радиус-вектор, указывающий положение эмиттера, а индекс s указывает оставшуюся часть вектора, перпендикулярную данной плоскости, $\mathbf{e}_d = \mathbf{e}_{d,p} + \mathbf{e}_{d,s}$. Вектор $\mathbf{e}_{d,p}$ может быть выражен через орты цилиндрической системы координат \mathbf{e}_ρ и \mathbf{e}_z , тогда как вектор $\mathbf{e}_{d,s}$ содержит только орту \mathbf{e}_ϕ . В выражении (18) учтено, что при $m = 0$ смешивание ТМ- и ТЕ-поляризаций отсутствует и, таким образом, ЕН мода является ТМ-поляризованной, тогда как НЕ мода обладает ТЕ-поляризацией, причем при $m = 0$ ТМ(ТЕ)-поляризованная волна взаимодействует только с частью оптического перехода, задаваемой вектором $\mathbf{e}_{d,p}$ ($\mathbf{e}_{d,s}$). Таким образом, сочетание уравнений (2), (4), (15)–(18) дает аналитическое выражение для темпа спонтанной рекомбинации эмиттера, находящегося вне нанопровода.

Выражение (18) можно интерпретировать как разложение темпа спонтанной рекомбинации на члены, соответствующие излучению эмиттера в моды, каждая из которых представляет собой линейную комбинацию ТМ- и ТЕ-поляризованных цилиндрических волн с азимутальными числами противоположного знака $m = \pm|m|$. Из выражений (4) для цилиндрических волн можно

получить угловую зависимость от полярной координаты ϕ для плотности потока энергии электромагнитных полей, образованных различными линейными комбинациями цилиндрических волн с $m = \pm|m|$, эти зависимости различны для ТМ- и ТЕ-поляризованных полей. Воспользовавшись этим анализом и полученным выражением (18), можно определить, какая часть спонтанного излучения эмиттера уходит в определенный телесный угол $do = \sin \theta d\theta d\phi$:

$$\left\{ \frac{3}{32\pi} \right\}^{-1} \frac{dW_{\text{rad}}}{W_1 do} = |\tilde{\mathbf{E}}_{m=0}^{\text{TM}}(\rho)\mathbf{e}_{d,p}|^2 + |\tilde{\mathbf{E}}_{m=0}^{\text{TE}}(\rho)\mathbf{e}_{d,s}|^2 + 4 \sum_{J=\text{EH,HE}} \sum_{m=1}^{+\infty} (|\tilde{\mathbf{E}}_m^J(\rho)\mathbf{e}_{d,p}|^2 \times \{P_{\text{TM},m}^J \cos^2(m\phi) + P_{\text{TE},m}^J \sin^2(m\phi)\} + |\tilde{\mathbf{E}}_m^J(\rho)\mathbf{e}_{d,s}|^2 \{P_{\text{TM},m}^J \sin^2(m\phi) + P_{\text{TE},m}^J \cos^2(m\phi)\}), \quad (19)$$

где величины $P_{\text{TM/TE},m}^J$ определяют соотношение ТМ- и ТЕ-поляризаций в J -поляризованной смешанной квантованной моде и даются квадратами модулей амплитудных коэффициентов (16), (17):

$$P_{\text{TM},m}^J = |\tilde{A}_{\text{TM},m}^{J,(1)}|^2 = |\tilde{A}_{\text{TM},m}^{J,(2)}|^2, \quad (20a)$$

$$P_{\text{TE},m}^J = |\tilde{A}_{\text{TE},m}^{J,(1)}|^2 = |\tilde{A}_{\text{TE},m}^{J,(2)}|^2, \quad (20б)$$

$$P_{\text{TM},m}^{\text{EH}} = P_{\text{TE},m}^{\text{HE}} = \frac{X_{R,m}^2}{X_{R,m}^2 + V_m^2}. \quad (20в)$$

При выводе выражения (19) предполагалось, что полярная координата эмиттера задана как $\phi_e = 0$. Выражение (19) дает относительную интенсивность спонтанного излучения в дифференциальный телесный угол на больших расстояниях от эмиттера (в дальнем поле).

3. Результаты и обсуждение

Оптические свойства и спонтанная эмиссия света в нанопроводе определяются спектром его волноводных и утекающих мод, при этом для утекающих мод определяющее значение имеют моды шепчущих галерей (МШГ).

Значения приведенных радиусов ρ_0/λ_0 , где ρ_0 — радиус нанопровода и λ_0 — волны излучения в вакууме, для МШГ можно оценить с помощью соотношения [23]

$$\rho_0/\lambda_0 = (m + 2j \pm 1/2)/(4n_2), \quad (21)$$

где m — азимутальное число, j — „главное квантовое число“, $n_2 = \sqrt{\epsilon_2}$ и знак $+$ ($-$) соответствует ТМ(ТЕ) поляризации. Точные значения комплексных приведенных радиусов определяются для ТМ-поляризации уравнением

$$n_1 J_m(2\pi n_2 \rho_0/\lambda_0) H_m^{(1)}(2\pi n_1 \rho_0/\lambda_0) - n_2 J'_m(2\pi n_2 \rho_0/\lambda_0) H_m^{(1)}(2\pi n_1 \rho_0/\lambda_0) = 0, \quad (22a)$$

где $n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$, и для ТЕ-поляризации

$$n_2 J'_m(2\pi n_2 \rho_0 / \lambda_0) H_m^{(1)}(2\pi n_1 \rho_0 / \lambda_0) - n_1 J_m(2\pi n_1 \rho_0 / \lambda_0) H_m^{(1)'}(2\pi n_2 \rho_0 / \lambda_0) = 0. \quad (226)$$

Отметим, что МШГ с $m = 0$ в литературе иногда называют электродипольной (магнитодипольной) модой для ТМ(ТЕ)-поляризации.

Значения приведенных радиусов для азимутальных чисел $m = 0, 1, 2, 3, 4$ продемонстрированы на рис. 2, *a*. Можно видеть, что приведенные радиусы МШГ, характеризуемые значениями $m = 1$ и 2, обладают существенной мнимой частью, при увеличении m мнимая часть быстро падает.

На рис. 2, *b, c* показана зависимость коэффициентов Парселла от приведенного радиуса нанопровода, для эмиттера, расположенного в центре нанопровода (*b*) и на его границе (*c*). Для аксиального эмиттера, расположенного в центре структуры, в случае малого приведенного радиуса коэффициент Парселла равен единице, в то время как для радиального эмиттера излучение экранируется.

При увеличении приведенного радиуса появляются пики коэффициента Парселла, при этом их положение и ширина определяются значениями комплексного приведенного радиуса для МШГ с $m = 0$ для ТМ-поляризации и $m = 1$ для ТЕ-поляризации. Такое поведение объясняется симметрией мод: в центре структуры электрическое поле отлично от нуля только для ТМ-мод с $m = 0$ и для ТЕ-мод с $m = 1$. Отметим, что для аксиального диполя первый пик наблюдается при значении приведенного радиуса 0.0334, что на практике соответствует тонким нанопроводам, где излучение в фундаментальную волноводную моду HE_{11} подавлено [6]. Если эмиттер расположен на границе цилиндра с внешней стороны, то спектр коэффициента Парселла качественно меняется: появляются острые пики, соответствующие модам шепчущих галерей (МШГ), как показано на рис. 2, *c*. Наибольшей амплитудой в данном случае обладают пики, соответствующие аксиальным эмиттерам, для них вероятность спонтанной эмиссии увеличивается на порядок. Можно видеть, что пики, соответствующие МШГ, наблюдаются также в спектрах эффективности рассеяния для ТЕ и ТМ плоской волны, показанных на рис. 2, *c*. Пунктирными вертикальными линиями показаны приведенные радиусы отсечек для волноводных мод TM_{01} и TE_{01} ($\rho_0/\lambda_0 = 0.114$) и EH_{11} ($\rho_0/\lambda_0 = 0.181$). Для сравнения показана зависимость сечения рассеяния нанопровода от его приведенного радиуса в случае ТМ-поляризованной (красная линия) и ТЕ-поляризованной волны (синяя линия). (Цветной вариант рисунка представлен в электронной версии статьи).

На рис. 3 показана зависимость коэффициента Парселла от расстояния от оси z до эмиттера для ситуаций,

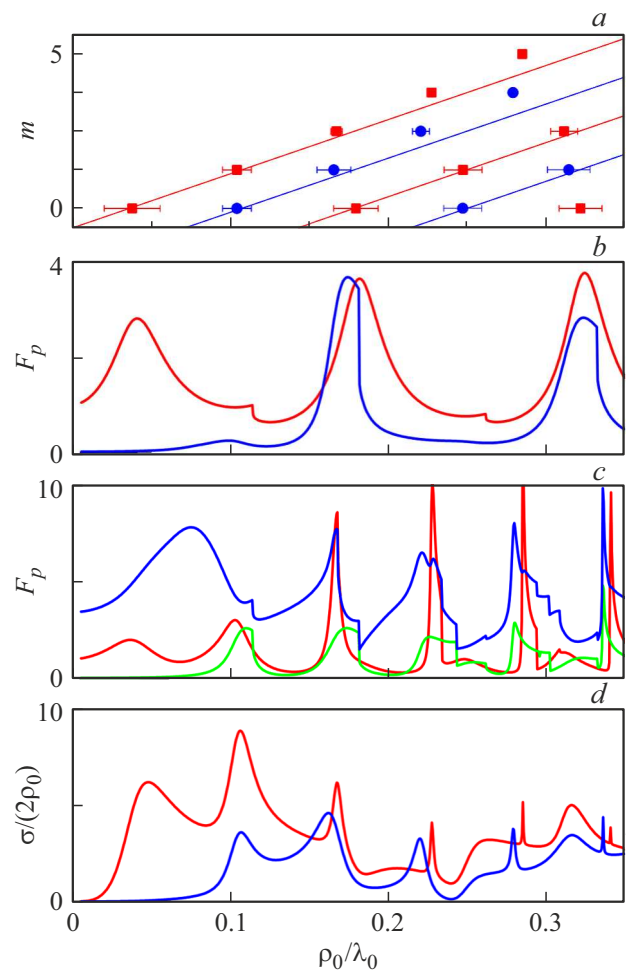


Рис. 2. *a* — приведенные радиусы нанопровода, соответствующие МШГ с азимутальными числами $m = 0, 1, 2, 3, 4$. Мнимая часть приведенных радиусов показана горизонтальной чертой. Сплошными линиями показаны оценочные зависимости, рассчитанные с помощью уравнения (21). Красные квадраты соответствуют ТМ-модам, синие круги — ТЕ-модам. (*b, c*) Зависимости коэффициента Парселла от приведенного радиуса нанопровода для излучателя, расположенного на оси нанопровода (*b*) и на его границе (*c*). Красные линии соответствуют аксиальной ориентации диполя, зеленые — азимутальной, синие — радиальной. *d* — зависимости сечения рассеяния нанопровода от его приведенного радиуса в случае ТМ-поляризованной (красная линия) и ТЕ-поляризованной волны (синяя линия). (Цветной вариант рисунка представлен в электронной версии статьи).

когда приведенный радиус нанопровода соответствует МШГ ТМ3 (рис. 3, *a*), ТЕ3 (рис. 3, *b*), ТМ4 (рис. 3, *c*) и ТЕ4 (рис. 3, *d*). Можно видеть, что в случае ТМ поляризованных МШГ максимум коэффициента Парселла имеет место внутри нанопровода на некотором удалении от границы, а в случае ТЕ поляризованных мод — на внешней границе. Во всех рассмотренных случаях максимальное значение коэффициента Парселла для азимутального диполя меньше, чем радиального и

аксиального. Для ТЕ поляризованных мод вероятность эмиссии для радиального диполя, расположенного на внешней границе нанопровода, увеличивается на порядок, что важно для применения нанопроводов в качестве оптических сенсоров.

На рис. 2, *b* и *c* можно видеть изломы на зависимостях коэффициента Парселла. На рис. 4 показана зависимость коэффициентов Парселла вблизи резонансов, соответствующих МШГ.

Можно видеть, что данные изломы связаны с частотами отсечки волноводных мод: при появлении волноводной моды вероятность эмиссии в вытекающие моды снижается. Общая вероятность спонтанной эмиссии в соответствии с формулой (20) определяется суммиро-

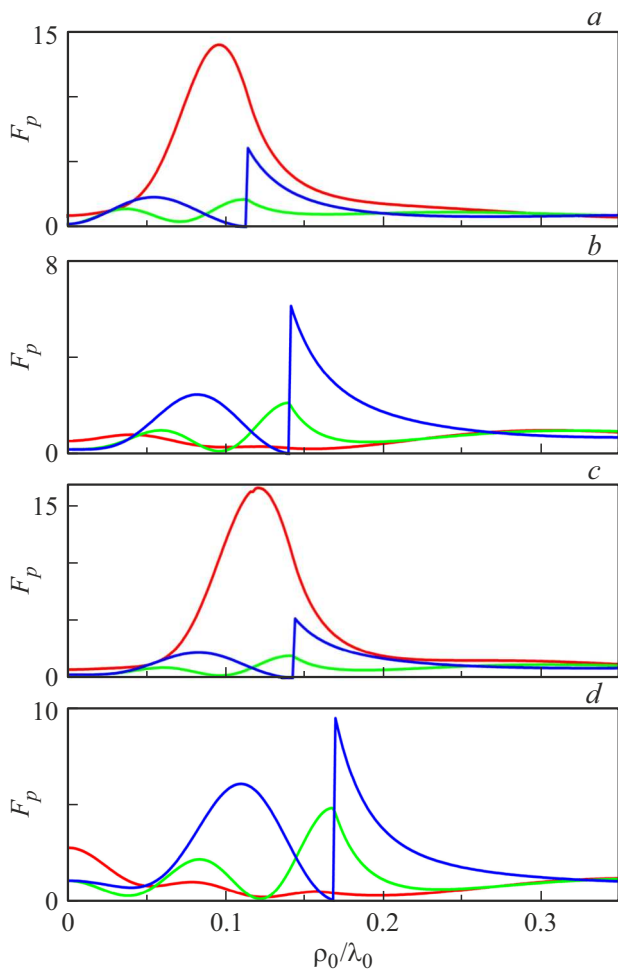


Рис. 3. Зависимости коэффициентов Парселла от положения эмиттера для различных значений приведенного радиуса нанопровода: *a* — $\rho_0/\lambda_0 = 0.228$, *b* — $\rho_0/\lambda_0 = 0.28$, *c* — $\rho_0/\lambda_0 = 0.285$, *d* — $\rho_0/\lambda_0 = 0.336$ (границе нанопровода соответствует разрыв в зависимости для радиальной ориентации диполя). Выбранные значения приведенных радиусов цилиндров соответствуют положениям мод шепчущих галерей, ТМ3, ТЕ3, ТМ4, и ТЕ4. Красные линии соответствуют аксиальной ориентации диполя, зеленые — азимутальной, синие — радиальной. (Цветной вариант рисунка представлен в электронной версии статьи).

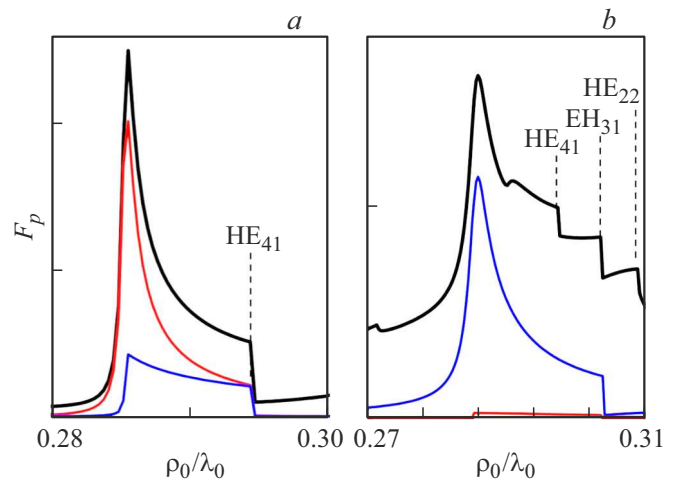


Рис. 4. Приведены коэффициенты Парселла для эмиттера, расположенного на внешней границе нанопровода, ориентированного аксиально (*a*) и радиально (*b*). Интервал приведенных радиусов выбран вблизи резонансов, связанных с модами шепчущих галерей ТМ4 (*a*) и ТЕ3 (*b*). Черными линиями показаны полные величины коэффициентов Парселла для утекающих мод; вклады, обусловленные компонентами HE_m и EH_m (где m — азимутальное число), показаны красными и синими линиями соответственно. Вертикальными штриховыми линиями показаны значения приведенных радиусов, соответствующих отсечкам волноводов мод.

ванием по компонентам поля, характеризуемым всеми возможными азимутальными числами m . При этом, как показано на рис. 4, вблизи МШГ доминирующий вклад в спонтанную эмиссию вносят именно отсечки волноводных мод.

Далее приведены коэффициенты Парселла для эмиттера, расположенного на внешней границе нанопровода, ориентированного аксиально (*a*) и радиально (*b*). Интервал приведенных радиусов выбран вблизи резонансов, связанных с модами шепчущих галерей ТМ4 (*a*) и ТЕ3 (*b*). Черными линиями показаны полные величины коэффициентов Парселла для утекающих мод; вклады, обусловленные компонентами HE_m и EH_m (где m — азимутальное число), показаны красными и синими линиями соответственно. Вертикальными штриховыми линиями показаны значения приведенных радиусов, соответствующих отсечкам волноводов мод.

Перспективными направлениями использования нанопроводов является создание источников одиночных фотонов и оптических сенсоров на их основе. В обоих случаях крайне важной характеристикой процесса излучения является не только вероятность эмиссии, но и диаграмма направленности. На рис. 5 показаны диаграммы направленности излучения, усредненные по углу ϕ , соответствующие пикам коэффициента Парселла, показанным на рис. 2, *b*, *c*: $\rho_0/\lambda_0 = 0.0748$ (рис. 5, *a*, пик F_p , соответствующий моде МШГ ТЕ0); $\rho_0/\lambda_0 = 0.1678$ (рис. 5, *b*, МШГ ТМ2, ТЕ1); $\rho_0/\lambda_0 = 0.2799$ (рис. 5, *c*, МШГ ТЕ4)

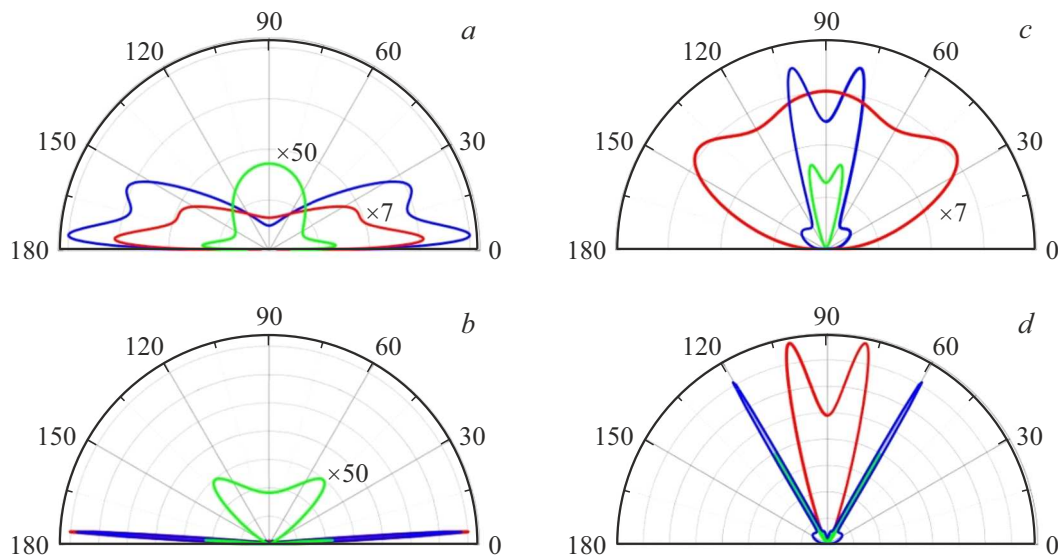


Рис. 5. Диаграммы направленности излучения эмиттера, расположенного на внешней границе нанопровода, усредненные по углу ϕ , для разных значений приведенного радиуса нанопровода: $\rho_0/\lambda_0 = 0.0748$ (a); $\rho_0/\lambda_0 = 0.1678$ (b); $\rho_0/\lambda_0 = 0.2799$ (c); и $\rho_0/\lambda_0 = 0.2855$ (d). Выбранные значения радиусов соответствуют максимумам коэффициента Парселла на рис. 2, b, c. Красные линии соответствуют аксиальной ориентации диполя, зеленые — азимутальной, синие — радиальной.

и $\rho_0/\lambda_0 = 0.2855$ (рис. 5, d, МШГ ТМ3). Отметим, что излучатель находится на поверхности нанопровода (в точке $\phi = 0$), так что система, строго говоря, не обладает цилиндрической симметрией.

Можно видеть, что при определенных значениях приведенного радиуса имеет место формирование узких лепестков диаграммы направленности. Для $\rho_0/\lambda_0 = 0.0784$ для радиальной ориентации диполя излучение сконцентрировано в узком интервале углов вблизи оси нанопровода. Для $\rho_0/\lambda_0 = 0.167$ имеет место концентрация излучения в узком конусе с углом θ около 5° .

4. Заключение

Получены алгебраические выражения для расчета вероятности спонтанной эмиссии для произвольно ориентированного эмиттера, расположенного около нанопровода или внутри него. Рассчитаны вероятности спонтанной эмиссии в зависимости от положения эмиттера и радиуса нанопровода. Рассчитаны диаграммы направленности для различных ориентаций диполя, продемонстрировано, что при определенных значениях приведенного радиуса возможно формирование узкой диаграммы направленности.

Финансирование работы

Работа поддержана Российским научным фондом (грант 21-12-00304).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] Katsuhiko Tomioka, Junichi Motohisa, Shinjiro Hara, Kenji Hiruma, Takashi Fukui. *Nano Lett.*, **10** (5), 1639 (2010).
- [2] Xing Dai, Agnes Messanvi, Hezhi Zhang, Christophe Durand, Joël Eymery, Catherine Bougerol, François H. Julien, Maria Tchernycheva. *Nano Lett.*, **15** (10), 6958 (2015).
- [3] Niranjana S. Ramgir, Yang Yang, Margit Zacharias. *Nanowire-based sensors*, **6** (16), 1705 (2010).
- [4] Haiqing Liu, Jun Kameoka, D.A. Czaplewski, H.G. Craighead. *Nano Lett.*, **4** (4), 671 (2004).
- [5] V.N. Kats, V.P. Kochereshko, A.V. Platonov, T.V. Chizhova, G.E. Cirlin, A.D. Bouravleuv, Y.B. Samsonenko, I.P. Soshnikov, E.V. Ubyivovk, J. Bleuse. *Semicond. Sci. Technol.*, **27**, 015009 (2011).
- [6] L. Leandro, J. Hastrup, R. Reznik, G. Cirlin, N. Akopian. *NPJ Quant. Inf.*, **6**, 93 (2020).
- [7] L. Leandro, C.P. Gunnarsson, R. Reznik, K.D. Jöns, I.V. Shtrom, A.I. Khrebtov, T. Kasama, V. Zwiller, G.E. Cirlin, N. Akopian. *Nano Lett.*, **18**, 7217 (2018).
- [8] V.G. Dubrovskii, I.V. Shtrom, R.R. Reznik, Yu.B. Samsonenko, A.I. Khrebtov, I.P. Soshnikov, S. Rouvimov, N. Akopian, T. Kasama, G.E. Cirlin. *Cryst. Growth Des.*, **16** (12), 7251 (2016).
- [9] A.C. Bleszynski, Floris A. Zwanenburg, R.M. Westervelt, Aarnoud L. Roest, E.P.A.M. Bakkers, Leo P. Kouwenhoven. *Nano Lett.*, **7** (9), 2559 (2007).
- [10] G.E. Cirlin, V.G. Dubrovskii, Yu.B. Samsonenko, A.D. Bouravleuv, K. Durose, Y.Y. Proskuryakov, Budhikar Mendes, L. Bowen, M.A. Kaliteevski, R.A. Abram, Dagou Zeze. *Phys. Rev. B*, **82**, 035302 (2010).
- [11] E.M. Purcell. *Phys. Rev.*, **69** (11), 681 (1946).
- [12] F. Bloch. *Phys. Rev.*, **70**, 460 (1946).
- [13] J. Bleuse, J. Claudon, M. Creasey, N.S. Malik, J.-M. Gérard, I. Maksymov, J.-P. Hugonin, Lalanne, P. Inhibition. *Phys. Rev. Lett.*, **10**, 10360 (2011).

- [14] David Dzsotjan, A.S. Sorensen, M. Fleischhauer. Phys. Rev. B, **82**, 075427 (2010).
- [15] T. Weiss, M. Schäferling, H. Giessen, N.A. Gippius, S.G. Tikhodeev, W. Langbein, E.A. Muljarov. Phys. Rev. B, **96**, 045129 (2017).
- [16] Y. Chen, T.R. Nielsen, N. Gregersen, P. Lodahl, J. Mork. Phys. Rev. B, **81**, 125431 (2010).
- [17] J. Bleuse, J. Claudon, M. Creasey, N.S. Malik, J.-M. Gérard, I. Maksymov, J.-P. Hugonin, P. Lalanne. Phys. Rev. Lett., **106**, 10360 (2011).
- [18] R.R. Reznik, G.E. Cirlin, K.P. Kotlyar, I.V. Ilkiv, N. Akopian, L. Leandro, V.V. Nikolaev, A.V. Belonovski, M.A. Kaliteevski. Nanomaterials, **11**, 2894 (2021).
- [19] R. Paniagua-Domínguez, G. Grzela, J.G. Rivas, J.A. Sánchez-Gil. Nanoscale, **5** (21), 10582 (2013).
- [20] Diego R. Abujetas, Ramón Paniagua-Domínguez, José A. Sánchez-Gil. ACS Photonics, **2** (7), 921 (2015).
- [21] Dick van Dam, Diego R. Abujetas, Ramón Paniagua-Domínguez, José A. Sánchez-Gil, Erik P.A. M. Bakkers, Jos E.M. Haverkort, Jaime Gómez Rivas. Nano Lett., **15** (7), 4557 (2015).
- [22] C.F. Bohren, D.R. Huffman. *Absorption and Scattering of Light by Small Particles* (Wiley, N.Y., 1998).
- [23] M.A. Kaliteevski, S. Brand, R.A. Abram, A. Kavokin, Le Si Dang. Phys. Rev. B, **75**, 233309 (2007).

Редактор Г.А. Оганесян

Spontaneous emission in leaky modes of nanowires

V.V. Nikolaev¹, E.I. Girshova², M.A. Kaliteevski²

¹ Ioffe Institute,
194021 St. Petersburg, Russia

² ITMO University,
197021 St. Petersburg, Russia

Abstract Analytical expressions for spontaneous emission probability in the vicinity of nanowire for the emitter oriented in axial, radial and azimuthal direction in respect to the nanowire axis, has been obtained. Directionality of emission and probability of emission have been calculated for various positions of emitter. Enhancement of the spontaneous emission probability by one order of magnitude, and formation of the sharp directionality diagram has been demonstrated.