

03
Аномальный отклик стратифицированной среды на объемное тепловыделение

© Л.Х. Ингель^{1,2}

¹ Научно-производственное объединение „Тайфун“, 249038 Обнинск, Россия

² Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, 119017 Москва, Россия
e-mail: lev.ingel@gmail.com

Поступило в Редакцию 11 сентября 2022 г.

В окончательной редакции 6 ноября 2022 г.

Принято к публикации 13 ноября 2022 г.

Теоретически исследована линейная стационарная задача об отклике полуограниченной устойчиво стратифицированной жидкой/газообразной среды на объемное пространственно-неоднородное тепловыделение в приближении Буссинеска. Важнейшие определяющие параметры — аналог числа Рэлея и аспектное отношение источника плавучести. Для возмущения в виде одной горизонтальной гармоники найдено аналитическое решение, позволяющее проанализировать ряд существенных закономерностей. Обнаружена принципиальная возможность интенсивного гидротермодинамического отклика на слабое тепловыделение при определенном соотношении упомянутых параметров.

Ключевые слова: стратифицированная среда, объемное тепловыделение, конвекция, плотностные течения, аналитическое решение, интенсивный отклик, неустойчивость.

DOI: 10.21883/JTF.2023.02.54493.222-22

Введение

В настоящей работе обращается внимание на нетривиальную возможность интенсивного гидротермодинамического отклика устойчиво стратифицированной жидкой/газообразной среды на слабое объемное тепловыделение.

Достаточно обширная литература посвящена теории конвекции (плотностных течений) над термически-неоднородной горизонтальной поверхностью в поле силы тяжести (см., например, [1–5] и библиографию в этих изданиях). Такие задачи имеют, в частности, известные геофизические приложения (например, местные ветры в атмосфере, связанные с термическими неоднородностями подстилающей поверхности). В меньшей степени исследованы аналогичные задачи с объемными источниками тепла (плавучести). Они также имеют обширные приложения. Например, в тех же задачах динамики атмосферы важную роль играют источники тепла, обусловленные фазовыми переходами водяного пара. Другой близкий пример — примеси, влияющие на радиационный баланс среды (см., например, [6–8]). Относящиеся сюда математические задачи весьма сложны даже в линейном приближении (для малых амплитуд возмущений) и обычно исследуются численно. В настоящей заметке решена задача, допускающая прозрачное аналитическое решение. Это позволяет обнаружить нетривиальный эффект, который труднее было бы заметить при численном моделировании.

1. Постановка задачи

Рассматривается полуограниченная устойчиво стратифицированная по температуре (в атмосфере — по потенциальной температуре [1,2]) среда, ограниченная снизу горизонтальной поверхностью. Для простоты ограничиваемся двумерной задачей с объемным источником тепла, интенсивность которого Q зависит от горизонтальной координаты x и вертикальной координаты z (ось z направлена вверх).

При отсутствии упомянутого источника (фоновое состояние) имеется статическое решение с постоянным вертикальным градиентом температуры $\gamma > 0$ (устойчивая фоновая стратификация). Наличие горизонтально-неоднородного источника $Q(x, z)$ приводит к возмущениям этого фонового состояния — к появлению горизонтальных термических неоднородностей, горизонтальным вариациям веса столба среды и возникновению течений. Предполагаемая относительная малость амплитуды объемного тепловыделения дает основания рассматривать линейные возмущения.

Линеаризованная система уравнений гидротермодинамики для двумерной стационарной задачи в приближении Буссинеска имеет вид [3,4,9,10]:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta_2 u, \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta_2 w + g\alpha\theta, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \gamma w = \kappa \Delta_2 \theta + Q(x, z). \quad (2)$$

Здесь u, w — составляющие возмущения поля скорости возникающего течения вдоль осей x, z соответственно;

p, θ — возмущения давления и температуры; α — коэффициент теплового расширения, $\bar{\rho}$ — средняя (отсечная) плотность среды; g — ускорение свободного падения; Δ_2 — символ двумерного лапласиана; κ, ν — коэффициенты обмена.

На нижней горизонтальной границе (поверхности $z = 0$) предполагается выполнение условий непротекания и прилипания, а также фиксированной температуры (отсутствия температурных возмущений):

$$u = w = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad (3)$$

Предполагается, что интенсивность объемного тепловыделения отлична от нуля в области конечной толщины вблизи нижней границы. Соответственно при $z \rightarrow \infty$ предполагается затухание возмущений.

2. Решение

Исключая из системы уравнений все неизвестные, кроме одной, нетрудно получить уравнение

$$\Delta_2^3 w + \frac{N^2}{\nu \kappa} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\alpha g}{\nu \kappa} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}. \quad (4)$$

Здесь $N = (\alpha g \gamma)^{1/2}$ — частота плавучести (частота Брента–Вяйсяля). Удобно анализировать модель с гармонической зависимостью тепловыделения от горизонтальной координаты:

$$Q(x, z) = q(z) \cos kx. \quad (5)$$

В этом случае решение также ищем в виде горизонтальной гармоники:

$$u(x, z) = U(z) \sin kx, \quad w(x, z) = W(z) \cos kx,$$

$$\theta(x, z) = \Theta(z) \cos kx, \quad p(x, z)/\bar{\rho} = P(z) \cos kx.$$

Уравнение (4) принимает вид

$$\left(\frac{d^2}{dZ^2} - 1 \right)^3 W - RW = -R \frac{q}{\gamma}, \quad R \equiv \frac{N^2}{\kappa \nu k^4}. \quad (6)$$

Здесь введены безразмерная переменная $Z = kz$ и безразмерный параметр R , являющийся некоторым аналогом числа Рэлея [3,10].

Решение последнего уравнения стандартным образом ищем в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Упомянутое общее решение можно представить в виде линейной комбинации экспонент типа $\exp(\sigma_j kz)$, где σ_j — корни характеристического уравнения

$$(\sigma^2 - 1)^3 - R = 0. \quad (7)$$

С учетом затухания возмущений при $z \rightarrow \infty$, из шести корней σ_j отбираются три с отрицательными действительными частями (здесь предполагается, что эти корни различны):

$$W_h(z) = \sum_{j=1}^3 C_j \exp(k\sigma_j z), \quad (8)$$

где C_j — постоянные интегрирования.

В качестве примера рассмотрим модель с источником тепла (плавучести), затухающим с высотой по экспоненциальному закону:

$$q = q_0 \exp(-z/h), \quad (9)$$

где h — некоторый вертикальный масштаб, $q_0 > 0$. В этом случае легко найти частное решение неоднородного уравнения (6): $W_i = W_0 \exp(-z/h)$, где масштаб вертикальной скорости

$$W_0 = \frac{q_0}{\gamma [1 - (1 - \delta^2)^3 / (\delta^6 R)]}, \quad (10)$$

безразмерный параметр $\delta = hk$. С учетом (1) и уравнения неразрывности решение можно представить в виде

$$\begin{aligned} w &= \left[\sum_{j=1}^3 C_j \exp(k\sigma_j z) + W_0 \exp(-z/h) \right] \cos kx, \\ u &= \left[- \sum_{j=1}^3 C_j \sigma_j \exp(k\sigma_j z) + (W_0/hk) \exp(-z/h) \right] \sin kx, \\ \theta &= \frac{\nu k^2}{\alpha g} \left[\sum_{j=1}^3 C_j (\sigma_j^2 - 1)^2 \exp(k\sigma_j z) + \frac{W_0}{\delta^4} (1 - \delta^2)^2 \exp(-z/h) \right] \cos kx. \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом краевых условий (3) получаем систему уравнений для определения постоянных интегрирования C_j :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 C_j &= -W_0, \quad \sum_{j=1}^3 \sigma_j C_j = W_0/\delta, \\ \sum_{j=1}^3 (\sigma_j^2 - 1)^2 C_j &= -\frac{W_0}{\delta^4} (1 - \delta^2)^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Как видно из (7), величина $\sigma_j^2 - 1$ может принимать три значения: $R^{1/3}$, $R^{1/3} \exp(\pm 2\pi i/3)$. Выражения для корней σ_j в общем случае несколько громоздки. Имеет смысл остановиться на предельном случае больших значений параметра R . Например, если в приземном слое атмосферы $N = 10^{-2} \text{ s}$, $K = 3 \text{ m}^2/\text{s}$ (достаточно характерные значения), то при $k = 10^{-2} \text{ m}^{-1}$ (длина полуволны около 300 м) $R = 10^3$. В указанном пределе $|\sigma_j| \gg 1$, и значения корней с отрицательными реальными частями:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\approx -R^{1/6}, \\ \sigma_2 &\approx -R^{1/6} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = R^{1/6} \exp(-2\pi i/3), \\ \sigma_3 &\approx -R^{1/6} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = R^{1/6} \exp(2\pi i/3). \end{aligned} \quad (13)$$

Приближенное решение системы (12) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 C_1 &\approx \frac{1}{2} (W_1 - W_2), \\
 C_2 &\approx \frac{1}{\sqrt{3}} \left[W_0 \exp\left(-\frac{5}{6}\pi i\right) + \frac{1}{2} W_1 \exp\left(\frac{5}{6}\pi i\right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\sqrt{3}}{2} W_2 \exp\left(\frac{\pi i}{3}\right) \right], \\
 C_3 &\approx \frac{1}{\sqrt{3}} \left[W_0 \exp\left(\frac{5}{6}\pi i\right) + \frac{1}{2} W_1 \exp\left(-\frac{5}{6}\pi i\right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\sqrt{3}}{2} W_2 \exp\left(-\frac{\pi i}{3}\right) \right]. \tag{14}
 \end{aligned}$$

Здесь введены масштабы скорости

$$W_1 = -\frac{W_0}{b^4} (1 - \delta^2)^2, \quad W_2 = W_0/b; \tag{15}$$

безразмерный параметр $b = \delta R^{1/6}$. Ниже будет также удобно использовать вертикальный масштаб $H = 1/kR^{1/6}$. Явный вид решения с учетом (14)

$$\begin{aligned}
 w &= \left\{ \frac{1}{2} (W_1 - W_2) \exp\left(-\frac{z}{H}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{z}{H}\right) \right. \\
 &\quad \times \left[W_0 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{z}{H} + \frac{5}{6}\pi\right) + \frac{1}{2} W_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{z}{H} - \frac{5}{6}\pi\right) \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\sqrt{3}}{2} W_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{z}{H} - \frac{\pi}{3}\right) \right] + W_0 \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \right\} \cos kx, \\
 u &= R^{1/6} \left\{ \frac{1}{2} (W_1 - W_2) \exp\left(-\frac{z}{H}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{z}{H}\right) \right. \\
 &\quad \times \left[W_0 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{z}{H}\right) + \frac{1}{2} W_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{z}{H} - \frac{\pi}{6}\right) \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\sqrt{3}}{2} W_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{z}{H} + \frac{\pi}{3}\right) \right] + \frac{W_0}{b} \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \right\} \sin kx, \\
 \theta &= \frac{\nu k^2}{\alpha g} R^{2/3} \left\{ \frac{1}{2} (W_1 - W_2) \exp\left(-\frac{z}{H}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{z}{H}\right) \right. \\
 &\quad \times \left[W_0 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{z}{H}\right) + \frac{1}{2} W_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{z}{H} - \frac{\pi}{6}\right) \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\sqrt{3}}{2} W_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{z}{H} + \frac{\pi}{3}\right) \right] - W_1 \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \right\} \cos kx, \\
 \frac{p}{\bar{\rho}} &= k\nu R^{1/2} \left\{ -\frac{1}{2} (W_1 - W_2) \exp\left(-\frac{z}{H}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \right. \\
 &\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{z}{H}\right) \left[W_0 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{z}{H} + \frac{5}{6}\pi\right) \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} W_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{z}{H} - \frac{5}{6}\pi\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} W_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{z}{H} - \frac{\pi}{3}\right) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{W_0}{R^{1/2}\delta^3} (1 - \delta^2) \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \right\} \cos kx.
 \end{aligned}$$

3. Анализ решения

Для определенности остановимся на решении вблизи вертикали $x = 0$. В этой области источник тепла $Q > 0$. Следовательно, в ней можно ожидать положительных в целом отклонений температуры, отрицательных отклонений плотности, понижения давления (уменьшения веса столба среды), сходящихся горизонтальных течений и (из-за неразрывности) восходящих движений. Это и демонстрирует построенный согласно полученному решению рис. 1. Две тонкие кривые отвечают набору значений параметров, характерному для приземного слоя атмосферы: $q_0 = 3 \cdot 10^{-4}$ K/s (порядка 1 K/hour), $\kappa = \nu = 3$ m²/s, $h = 50$ m, $k = 2 \cdot 10^{-3}$ m⁻¹, $\gamma = 3 \cdot 10^{-3}$ K/m. При этом $R \approx 7 \cdot 10^5$, $\delta = 0.1$, $H \approx 50$ m.

При достаточно больших пространственных масштабах источника (в частности, больших значениях параметра R) и вдали от нижней границы диффузионные слагаемые в уравнениях несущественны, и, как видно уже из (4), существует приближенное решение

$$w \approx Q/\gamma. \tag{16}$$

Его физический смысл вполне прозрачен: каждый нагреваемый элемент среды движется по вертикали с такой скоростью, что приращение плавучести за счет тепловыделения приближенно компенсируется убыванием плавучести за счет подъема в менее плотные слои среды. Отклонения температуры и давления в этом случае малы, так что такое решение можно назвать режимом с нейтральной плавучестью. Но вблизи нижней границы, вследствие условия непротекания, вертикальная скорость мала, и восходящие движения не в состоянии уносить все выделяющееся тепло. Поэтому отклонения

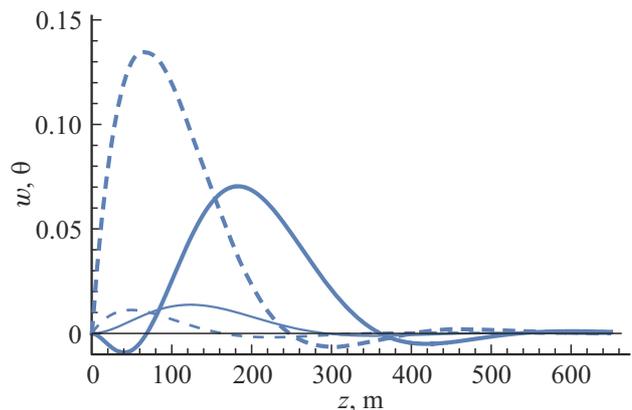


Рис. 1. Примеры вертикальных профилей возмущений температуры (сплошные линии, нормировано на $2\nu k^2 R^{2/3}/\alpha g$) и вертикальной скорости (штриховые линии, [m/s]) на оси области тепловыделения (на вертикали $x = 0$). Тонкие линии соответствуют ситуации общего положения ($h = 50$ m). Толстые линии ($h \approx 52.82$ m) отвечают области значений параметров вблизи соотношения $\delta = (1 + R^{1/3})^{-1/2}$, когда знаменатель (10) близок к нулю.

плаучести там относительно велики, и существенны диффузионные слагаемые.

Интересно отметить, что здесь в принципе существует возможность аномально интенсивного отклика на тепловыделение. Знаменатель выражения (10) может, вообще говоря, переходить через нуль. Это происходит при следующем (вполне реальном) соотношении безразмерных параметров:

$$\delta = (1 + R^{1/3})^{-1/2}. \quad (17)$$

При $R \gg 1$ это соответствует близким значениям вертикального масштаба источника h и вертикального масштаба H , обусловленного устойчивой стратификацией среды. Значения масштабов скорости W_0, W_1, W_2 при выполнении (17), очевидно, обращаются в бесконечность. Рассматриваемая в настоящей работе линейная модель, конечно, позволяет рассматривать лишь не слишком большие амплитуды возмущений. Рис. 1 (толстые линии) демонстрирует, что при приближении значений параметров к (17) (по сравнению с принятыми выше значениями параметров лишь немного изменен масштаб h) амплитуда возмущений температуры и скорости резко возрастает (кратно увеличивается по сравнению с тонкими линиями, отвечающими типичным амплитудам вдали от соотношения (17)). Следует отметить, что обнаруженный эффект весьма чувствителен к значениям параметров вблизи соотношения (17).

Возможность интенсивного отклика на слабое тепловыделение означает существование линейной неустойчивости рассматриваемого фоновое состояние по отношению к возмущениям определенной структуры. Неустойчивость устойчиво стратифицированной (нагреваемой сверху) бесдвиговой вязкой среды выглядит, на первый взгляд, парадоксальной. Но для двухслойной системы, нагреваемой сверху, подобные возможности были теоретически обнаружены ранее [9,11]; появился даже термин „антиконвекция“ [11]. Этот нетривиальный эффект схематически пояснен на рис. 2. Пусть источник тепла (на рисунке затушеван) распределен вблизи границы раздела двух сред (нижняя среда предполагается существенно плотнее верхней, так что деформации границы раздела незначительны). В обеих средах вблизи области тепловыделения возникают конвективные течения, уносящие выделяющееся тепло. (Подчеркнем, что, поскольку тепловыделение на фоне достаточно устойчивой стратификации предполагается слабым, речь не идет о возникновении конвективной неустойчивости. Течения возникают по другой причине: вследствие горизонтальной неоднородности гидростатического давления — возникновения горизонтальных градиентов веса столба среды. Пользуясь другой терминологией, эти течения можно назвать плотностными). Как видно из рисунка, вблизи границы раздела возникающие горизонтальные течения направлены навстречу друг другу. Строгие расчеты по линейной модели показывают, что при определенных соотношениях параметров сред взаимодействие этих

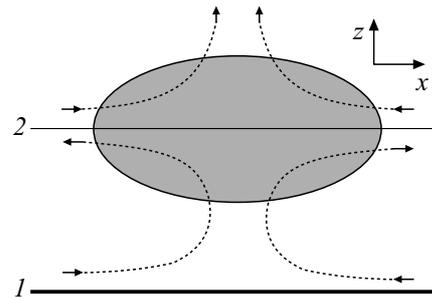


Рис. 2. Схема течений, возникающих вблизи области тепловыделения (затушевана) в двухслойной среде: 1 — нижняя граница среды, 2 — граница раздела двух сред, пунктирные линии — линии тока.

двух встречных течений может приводить к нарушению „естественной вентиляции“ области тепловыделения. Например, сходящееся горизонтальное течение над границей раздела может за счет вязкости увлекать в том же направлении и нижнюю среду. Последняя тем самым перестает выносить тепло из области тепловыделения, так что при учете взаимодействия сред изображенное на рис. 2 направление течения в нижней среде меняется, тепло накапливается, и возмущения усиливаются.

До настоящего времени считалось, что такое усиление возмущений возможно только в некоторых двухслойных средах при весьма специальных соотношениях между параметрами двух сред [11]. Приведенные выше расчеты впервые показывают, что аналогичный эффект, в принципе, возможен и в однослойной полуограниченной непрерывно стратифицированной среде. В такой среде некоторым аналогом горизонтальной границы раздела является уровень $z \sim H = 1/kR^{1/6}$. Область тепловыделения, расположенная ниже этого уровня, приводит к возникновению течений, качественно близких к течениям в нижней среде на рис. 2. Действительно, в работе [4] показано, что возмущения от источника, сосредоточенного на нижней границе, достигают высоты порядка H (выше движения не могут проникнуть из-за устойчивой стратификации). Полученная в [4] картина течений качественно близка к схеме течений ниже границы раздела на рис. 2. Очевидно, что тепловыделение в области $0 < z \leq H$ также не может индуцировать возмущения, проникающие существенно выше порядка $z = H$. На более высоких уровнях приближенно выполняется решение (16), качественно близкое к структуре возмущений выше границы раздела на рис. 2. Таким образом, просматривается физический механизм, напоминающий ранее исследованную ситуацию в двухслойной среде.

Заключение

Как упоминалось выше, ранее в литературе весьма обстоятельно исследовалась конвекция над термически-неоднородной горизонтальной поверхностью. Было показано, что возмущения проникают от нижней границы в

устойчиво стратифицированную среду до высоты порядка $H \approx (\nu \kappa L^2 / N^2)^{1/6}$, где L — горизонтальный масштаб термической неоднородности (см., например, [4]). Если источник плавучести объемный, но сконцентрирован относительно близко от нижней границы (в области $z < H$), то можно было ожидать, что результат качественно не изменится, и это действительно следует из полученного решения. Но, как видно из решения, результаты качественно меняются, когда вертикальные масштабы источника плавучести достигают и превышают значение H . Вдали от нижней границы возникает режим с нейтральной плавучестью, при котором $w \approx Q/\gamma$. А при значениях параметров вблизи условия (17) возможен, несмотря на устойчивую фоновую стратификацию, интенсивный гидротермодинамический отклик на слабое тепловыделение. Отметим, что это — строго доказанный результат, поскольку он виден уже из легко воспроизводимой и анализируемой формулы (10), где знаменатель может обращаться в нуль. Обнаруженная возможность интенсивного отклика на слабое тепловыделение означает наличие линейной неустойчивости устойчиво стратифицированной среды по отношению к возмущениям определенной структуры. Ранее такая возможность была показана только для некоторых двухслойных сред.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] Y.-L. Lin. *Mesoscale Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2007)
- [2] R.A. Pielke. *Mesoscale Meteorological Modeling* (Elsevier Science, Amsterdam, 2013)
- [3] Б. Гебхарт, Й. Джалурия, Р. Махаджан, Б. Саммакия. *Свободно-конвективные течения, тепло- и массообмен* (Мир, М., 1991), кн. 1. [Пер. с англ.: B. Gebhart, Y. Jaluria, R. L. Mahajan, B. Sammakia. *Buoyancy-Induced Flows and Transport* (Springer, Berlin, 1988)]
- [4] H. Stommel, G. Veronis. *Tellus*, **9** (3), 401 (1957).
- [5] P.H. Oosthuizen, A.Y. Kalendar. *Natural Convective Heat Transfer from Horizontal and Near Horizontal Surfaces* (Springer Cham, Cham, 2018), <https://doi.org/10.1007/978-3-319-78750-3>
- [6] W.M. Gray, W.M. Frank, M.L. Corrin, C.A. Stokes. *J. Appl. Meteor.*, **15** (4), 355 (1976).
- [7] А.П. Ревокатова, В.А. Гинзбург. *Фундамент. и прикл. климатология*, **7** (3), 50 (2021). DOI: 10.21513/2410-8758-2021-3-50-83
- [8] D.R. Allen, M.D. Fromm, G.P. Kablick III, G.E. Nedoluha. *J. Atmos. Sci.*, **77** (12), 4297 (2020). DOI: 10.1175/JAS-D-20-0131.1
- [9] Л.Х. Ингель, И.В. Стогова. *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*, **23** (10), 1120 (1987). [L.Kh. Ingel, I.V. Stogova. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Fiz. Atmos. Okeana*, **23** (10), 828 (1987).]
- [10] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Гидродинамика* (Наука, М., 1986)
- [11] Л.Х. Ингель. *УФН*, **167** (7), 779 (1997). [L.Kh. Ingel. *Phys. Usp.*, **40**, 741 (1997).]