

Многомодовая динамика электронов дираковского кристалла в поле монохроматического излучения

© С.В. Крючков^{1,2}, Е.И. Кухарь¹

¹ Волгоградский государственный технический университет,
400005 Волгоград, Россия

² Волгоградский государственный социально-педагогический университет,
Лаборатория физики низкоразмерных систем,
400066 Волгоград, Россия

e-mail: eikuhar@yandex.ru

Поступила в редакцию 08.03.2022 г.

В окончательной редакции 24.01.2023 г.

Принята к публикации 26.01.2023 г.

С учетом эффекта Zitterbewegung изучена многомодовая динамика электрона дираковского 2D-кристалла, помещенного в поле монохроматического излучения. Для расчетов использован модельный гамильтониан, учитывающий две независимые дираковские точки. Вычисления показали, что спектр электронных осцилляций содержит серию новых (по сравнению с обычным Zitterbewegung) частот. Последние, в случае высокой частоты излучения, являются комбинацией частоты Zitterbewegung и частот, кратных частоте поля. В случае, когда частота поля сравнима с частотой Zitterbewegung, спектр электронных осцилляций определяется амплитудой поля. Показано, что характер этой зависимости меняется с изменением направления поляризации излучения. Обсуждена также возможность появления постоянной составляющей скорости у электрона в поле монохроматического излучения.

Ключевые слова: Zitterbewegung, графен, дираковский кристалл, частота Раби.

DOI: 10.21883/OS.2023.02.55022.3359-22

Введение

Открытие новых видов 2D-кристаллов, составляющих группу так называемых дираковских материалов (графен, германен, силицен и т.д.), а также исследование их электродинамических свойств определило, по сути, развитие той части физики твердотельных структур, что стоит на стыке теории конденсированного состояния и физики высоких энергий. Дело в том, что релятивистская форма уравнений для электронных состояний в гексагональных 2D-решетках делает графеноподобные материалы удобной платформой для изучения эффектов квантовой электродинамики [1–4]. Уникальность указанных выше материалов объясняется наличием в квантовом уравнении для электронных состояний слагаемых, связывающих импульс носителя заряда с его псевдоспиновой степенью свободы. Примерами проявлений такой связи могут служить топологические фазовые переходы [5–10] типа „полуметалл–изолятор“ [7,11,12] и „дираковский–полудираковский материал“ [13,14], а также эффект Zitterbewegung (ZB) — быстрые осцилляции скорости свободного (псевдо)релятивистского электрона, возникающие вследствие интерференции состояний с положительной и отрицательной энергиями.

Возможность ZB для электронов в кристаллах, описываемых псевдорелятивистским гамильтонианом, теоретически показана в [15–18]. Что же касается экспериментальной реализации ZB, то в связи с высокой частотой соответствующих осцилляций электрона в вакууме

($\sim 10^{21}$ Hz) наблюдение этого эффекта является весьма затруднительным. Преимуществом же дираковских структур перед вакуумом является гораздо меньшее значение частоты ZB, что значительно облегчает его экспериментальное обнаружение в этих материалах [19–21]. В [22,23] произведено компьютерное моделирование затухания осцилляций ZB для волнового пакета гауссовского типа, предсказанное ранее теоретически [17]. Стоит отметить, что исследование ZB в дираковских кристаллах имеет еще и прикладное значение. Так, в [24] намечен путь по созданию нанорезонатора на основе системы колебательных контуров, проявляющей свойства активной нагрузки при частотах внешнего сигнала, превышающих частоту ZB. В [25] аналогичные системы использовались в микросхемах, позволивших смоделировать такие релятивистские квантовые эффекты, как парадокс Клейна и ZB.

В последнее время актуальным является вопрос об управлении электронным ZB в дираковских материалах за счет внешних силовых полей. В частности, в [26–28] предлагается решение проблемы затухания ZB для электронного волнового пакета конечной ширины. В [29,30] показана возможность стабилизации ZB квантующим магнитным полем. Комбинационный эффект от одновременного учета ZB в дираковских структурах и внешнего высокочастотного (ВЧ) электромагнитного (ЭМ) поля исследован в [26,31,32].

В работе [32] для свободного графена изучен так называемый многомодовый ZB — индуцированные ВЧ

электрическим полем осцилляции электрона. Спектр таких осцилляций содержал новые частоты, равные комбинациям частоты монохроматического поля и частоты ZB. Однако в [32] вычисления выполнены не для произвольных импульсов электрона: импульс вдоль линии поляризации считался равным нулю. Это не соответствует реальной ситуации, в которой импульсы носителей заряда подчиняются 2D-статистике. Кроме того, в некоторых случаях амплитуда поля предполагалась достаточно малой, что позволило решать уравнения движения в линейном по амплитуде поля приближении. Как результат спектр многомодового ZB содержал только две новые частоты. Ниже, так же как и в [32], для расчетов использованы приближения (1) вращающихся поляризаций (rotating wave approximation, RWA) и (2) высокой частоты накачки (high driving frequency, HDF). В отличие от [32] аналитические расчеты выполнены для произвольных амплитуд переменного поля и в случае применения HDF для произвольных импульсов электрона. Показано, что для сильных полей спектр многомодового ZB содержит серию новых (по сравнению с обычным ZB) частот, являющихся комбинацией частоты ZB и частот, кратных частоте поля накачки. Кроме всего прочего, результат обобщен на случай модели гамильтониана, описывающей две независимые дираковские точки [13].

Постоянная составляющая скорости электрона в монохроматическом поле

Пусть дираковский 2D-кристалл, с которым свяжем плоскость xu , помещен в поле монохроматического ЭМ излучения, распространяющегося вдоль Oz так, что его электрическая составляющая осциллирует вдоль Ox . В дальнейшем будем пренебрегать координатной зависимостью напряженности электрического поля волны, считая, что длина последней намного больше толщины рассматриваемого материала. Спинор ψ , описывающий состояние электрона в такой ситуации, удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\Omega_1 \hat{\sigma}_x + \Omega_2 \hat{\sigma}_y) \psi + \omega a(t) \hat{\sigma}_x \psi, \quad (1)$$

где $\hat{\sigma}_{x,y,z}$ — матрицы Паули, ω — частота переменного поля, $\hbar\Omega_1 = v_F p_x$, а вид слагаемого $\hbar\Omega_2$ будет определяться моделью кристалла. Так, например, для модели конического спектра $\hbar\Omega_1 = v_F p_y$. В дальнейшем используем модель 2D-кристалла со смещенными дираковскими точками [13]:

$$\hbar\Omega_2 = \frac{p_y^2}{2m} - \Delta, \quad (2)$$

причем $\Delta > 0$. Отметим, что изменение знака параметра Δ на противоположный означает переход из полуметаллического состояния в состояние зонного изолятора.

В последнем случае кристалл будет относиться к полудираковскому типу.

Полагаем, что временная зависимость ВЧ сигнала является гармонической: $a(t) = a_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$. Здесь $a_0 = v_F p_0 / \hbar \omega$, $p_0 = e E_0 / \omega$, E_0 — амплитуда напряженности электрического поля, φ_0 — начальная фаза. Кроме того, считаем, что начальное состояние в импульсном представлении описывается спинором

$$\psi_0(\mathbf{p}) = \frac{f(\mathbf{p} - \mathbf{p}')}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \chi_0, \quad (3)$$

где $f(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ — нормированная функция, задающая профиль волнового пакета с начальным импульсом \mathbf{p}' , $\chi_0 = (C_1 \ C_2)^T$, а компоненты C_1 и C_2 определяют ориентацию псевдоспина [18,23,33]. Для исследования именно модификации за счет ZB спектрального состава колебаний скорости электрона в монохроматическом силовом поле, а не временной эволюции волнового пакета в качестве $f(\mathbf{p})$, достаточно выбрать дельтаобразный профиль [32]: $f(\mathbf{p}) = \delta(\mathbf{p})$. Выбор же в качестве начальной функции $f(\mathbf{p})$ волнового пакета гауссовского профиля конечной ширины, с которым, как правило, имеют дело в работах [15,18,23,33–36], приведет к стандартной ситуации затухания электронных осцилляций [17].

Если $\Omega_2 = 0$, то уравнение (1) допускает точное аналитическое решение

$$\psi(t) = e^{-i(\Omega_1 t + a_0 \sin(\omega t + \varphi_0)) \hat{\sigma}_x} \psi_0. \quad (4)$$

Для определенности мы фиксируем $C_1 = 1$, а параметр C_2 будем считать произвольным, $C_2 = \alpha$. Например, значения $\alpha = 1$, $\alpha = i$ и $\alpha = 0$ описывают состояния с ориентацией псевдоспина вдоль осей Ox , Oy и Oz соответственно. Компоненты средней квантово-механической скорости электрона, вычисляемые как матричные элементы $v_{x,y} = v_F \langle \psi | \hat{\sigma}_{x,y} | \psi \rangle$, равны

$$v_x = \frac{2v_F \text{Re} \alpha}{1 + |\alpha|^2},$$

$$v_y = 2v_F \frac{\text{Im} \alpha}{1 + |\alpha|^2} \cos(\Omega_{ZB} t + b(t)) - v_F \frac{1 - |\alpha|^2}{1 + |\alpha|^2} \sin(\Omega_{ZB} t + b(t)), \quad (5)$$

где $\Omega_{ZB} = 2\Omega_1$ — частота осцилляций скорости в отсутствие переменного поля (частота ZB), $b(t) = 2a_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$. В частности, для $\alpha = 0$ имеем

$$v_x = 0, \quad v_y = -v_F \sin(\Omega_{ZB} t + 2a_0 \sin(\omega t + \varphi_0)). \quad (6)$$

Согласно (6), оказывается возможной следующая ситуация. Если $\varphi_0 \neq s\pi$, а частота ZB окажется кратной частоте переменного поля, $\Omega_{ZB} = k\omega$ (s и k — целые числа), то у скорости электрона появляется постоянная составляющая, равная

$$\langle v_y \rangle_t = (-1)^k J_k(2a_0) v_F \sin k\varphi_0. \quad (7)$$

Здесь $J_k(x)$ — функция Бесселя k -го порядка. В частности, если $\varphi_0 = \pi/2$, то постоянная составляющая скорости отлична от нуля, только когда отношение $\Omega_{\text{ЗВ}}/\omega$ составляет нечетное число: $\Omega_{\text{ЗВ}} = (2k + 1)\omega$. При этом $\langle v_y \rangle_t = (-1)^{k+1} J_{2k+1}(2a_0) v_F$. Такое „выпрямление“ скорости обусловлено комбинацией двух колебательных движений электрона в дираковском кристалле: колебаний ЗВ, имеющих место и в отсутствие поля, и вынужденных колебаний, возникающих за счет силового действия со стороны переменного электрического поля.

Многомодовый ЗВ в ВЧ электрическом поле

Для анализа поведения скорости электрона при произвольных Ω_2 удобно воспользоваться унитарным преобразованием с помощью оператора

$$\hat{U} = e^{i\Omega t \hat{\sigma}_0}, \tag{8}$$

где обозначено

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\Omega_1 \hat{\sigma}_x + \Omega_2 \hat{\sigma}_y}{\Omega}, \quad \Omega = \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}.$$

В [32] для исследования нелинейной динамики дираковского электрона в рамках HDF решение уравнения (1) ограничивалось линейным по амплитуде поля a_0 приближением. Применяемый здесь оператор унитарного преобразования (8) отличается от аналогичного оператора, использованного в [32], и позволяет получить аналитические результаты для произвольных амплитуд ВЧ поля. Положив в (1) $\psi = \hat{U}^+ \chi$ и $\hat{\Sigma}_{x,y,z}(t) = \hat{U} \hat{\sigma}_{x,y,z} \hat{U}^+$, $\varphi_0 = 0$, придем после некоторых преобразований к следующему уравнению:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = -i\omega a_0 \cos \omega t \hat{\Sigma}_x(t) \chi. \tag{9}$$

Предположим, что выполняется следующее условие: $\omega \gg \Omega$ (приближение HDF). Тогда нетрудно убедиться, что спинор

$$\chi(t) = e^{-ia_0 \sin \omega t \hat{\Sigma}_x(t)} \chi_0 \tag{10}$$

является решением уравнения (9). Действительно, слагаемыми, равными результату дифференцирования спинора $\hat{\Sigma}_x(t) \chi_0$, можно пренебречь, так как последние будут содержать в качестве множителя низкие по сравнению с ω частоты. С помощью спинора (10) вычислим среднюю квантово-механическую скорость электрона:

$$v_{x,y} = v_F \langle \chi | \hat{\Sigma}_{x,y} | \chi \rangle. \tag{11}$$

Для определенности рассмотрим довольно часто встречающийся в литературе случай, когда начальный псевдоспин ориентирован перпендикулярно плоскости 2D-кристалла, т.е. $\chi_0 = (1\ 0)^T$ [15,18,23,32–36]. После подстановки (10) в (11) и некоторых преобразований получим

$$v_x = \frac{v_F \Omega_2}{\Omega} \sin 2\Omega t, \tag{12}$$

$$v_y = -\frac{v_F \Omega_1}{\Omega} \cos(2a_0 \sin \omega t) \sin 2\Omega t - v_F \sin(2a_0 \sin \omega t) \cos 2\Omega t. \tag{13}$$

Как и следовало ожидать, колебания скорости, согласно (13), не являются гармоническими.

Для анализа спектрального состава этих колебаний разложим функцию (13) в ряд Фурье:

$$v_y = -\frac{v_F \Omega_1}{\Omega} J_0(2a_0) \sin 2\Omega t + \frac{v_F \Omega_1}{\Omega} \times \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(2a_0) (\sin 2(n\omega - \Omega)t - \sin 2(n\omega + \Omega)t) - v_F \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(2a_0) (\sin((2n+1)\omega + 2\Omega)t + \sin((2n+1)\omega - 2\Omega)t). \tag{14}$$

Таким образом, спектр осциллирующей скорости электрона содержит в качестве основной частоты частоту ЗВ, равную 2Ω , и дополнительные частоты $n\omega \pm 2\Omega$, где n — целое число. Такого типа движение дираковского электрона в монохроматическом поле в [32] получило название многомодового ЗВ. Если p_x и $a_0 \ll 1$, то, как и следует ожидать, выражения (12) и (14) переходят в соответствующие формулы из [32]. Интенсивность многомодового ЗВ пропорциональна среднему по времени квадрату скорости электрона $\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle$ [32]. Используя формулы (12) и (14), найдем

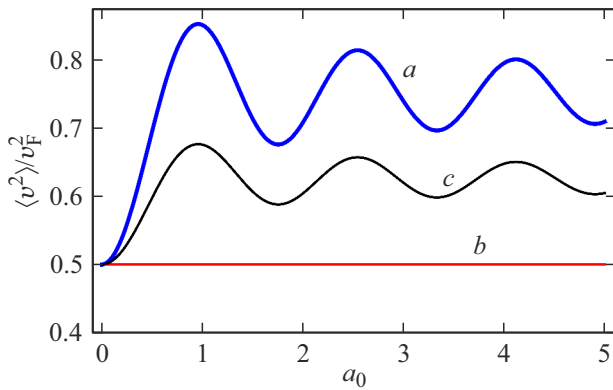
$$\langle v^2 \rangle = v_F^2 \left(\frac{\Omega_2^2}{2\Omega^2} + \frac{\Omega_1^2}{2\Omega^2} (J_0^2(2a_0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}^2(2a_0)) + \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}^2(2a_0) \right). \tag{15}$$

Зависимость $\langle v^2 \rangle$ от безразмерной амплитуды ВЧ поля a_0 , построенная по формуле (15), показана на рисунке для различных значений Ω_1 и Ω_2 . Если $\Omega_2 = 0$, то величина $\langle v^2 \rangle$ не зависит от амплитуды a_0 и равна $v_F^2/2$.

Как можно заметить, многомодовый эффект проявляется только для компоненты скорости v_y , что обусловлено выбранной ориентацией плоскости поляризации падающего излучения. Следует ожидать, что в случае, например, эллиптически поляризованной волны многомодовый эффект будет наблюдаться у обеих компонент средней скорости.

Нетрудно получить среднюю скорость и для других начальных спинорных структур. Ниже приведены результаты только для компоненты v_y . Так, в случае $\chi_0 = (1\ i)^T$, отвечающем ориентации начального псевдоспина вдоль Ox , имеем

$$v_y = \frac{v_F \Omega_2}{\Omega} \left(\frac{\Omega_1}{\Omega} (1 - \cos 2\Omega t) \cos b_0 + \sin 2\Omega t \sin b_0 \right). \tag{16}$$



Зависимость $\langle v^2 \rangle$ от амплитуды ВЧ электрического поля. a — $\Omega_1 = 0$; b — $\Omega_2 = 0$; c — $\Omega_1 = \Omega_2$.

Здесь b_0 — осциллирующая функция $b(t)$, фигурирующая в (5), при $\varphi_0 = 0$. Если $\chi_0 = (1 \ i)^T$, что соответствует начальной ориентации псевдоспина вдоль Oy , то

$$v_y = \frac{v_F}{\Omega^2} (\Omega_2^2 + \Omega_1^2 \cos 2\Omega t) \cos b_0 - \frac{v_F \Omega_1}{\Omega} \sin 2\Omega t \sin b_0. \quad (17)$$

Частота Раби

Здесь, так же как и в [32], положим $p_x = 0$, однако вместо конической модели гамильтониана будем пользоваться моделью (2). Приближение RWA позволяет найти решения уравнения (1) при условии $|2|\Omega_2| - \omega| \ll \omega$. В рамках RWA пренебрегается слагаемыми, осциллирующими с частотой $2|\Omega_2| + \omega$. В этом случае спектр осцилляций скорости по-прежнему будет содержать три частоты: Ω_R , $\Omega_R \pm \omega$, где Ω_R — так называемая частота Раби, имеющая вид

$$\Omega_R = \sqrt{(2|\Omega_2| - \omega)^2 + \frac{v_F^2 p_0^2}{\hbar^2}}. \quad (18)$$

Как видно из (18), в отличие от [32] частота Раби (18) определяется тремя параметрами структуры кристалла v_F , m и Δ вместо одного параметра v_F . Кроме того, анизотропность модели гамильтониана [13], учитывающей 2 дираковские точки, приводит к тому, что характер зависимости частоты Раби от амплитуды переменного поля будет определяться направлением поляризации этого поля в плоскости 2D-кристалла. Убедимся в этом явно. Для этого изменим направление поляризации поля так, чтобы оно осциллировало вдоль оси Oy . Тогда вместо (1) следует записать

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \Omega_1 \hat{\sigma}_x \psi + \tilde{\Omega}_2 \hat{\sigma}_y \psi + \omega \left(\frac{p_0^2}{4m\hbar\omega} \cos 2\omega t + \frac{p_y p_0}{m\hbar\omega} \cos \omega t \right) \hat{\sigma}_y \psi, \quad (19)$$

где обозначено

$$\tilde{\Omega}_2 = \Omega_2 + \frac{p_0^2}{4m}. \quad (20)$$

Далее считаем, что $\tilde{\Omega}_2 = 0$, что может быть достигнуто, если $\Delta > 0$ и $eE_0 < 2\omega\sqrt{m\Delta}$. Тогда после преобразования с оператором

$$\hat{S} = e^{i\Omega_1 t \hat{\sigma}_x} \quad (21)$$

запишем вместо (19)

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = -i\omega(a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t) \hat{\Xi}_y \chi. \quad (22)$$

Здесь $\hat{\Xi}_y = \hat{S} \hat{\sigma}_y \hat{S}^+$, $a_1 = \pm q_0 p_0 / m\hbar\omega$, $a_2 = p_0^2 / 4m\hbar\omega$, $q_0 = \sqrt{2m\Delta - p_0^2} / 2$. Для решения уравнения (22) применим метод RWA. Последний оправдан в двух случаях: (а) $|2|\Omega_1| - \omega| \ll \omega$ или (б) $2|\Omega_1| - \omega \ll \omega$. В первом случае в (22) оставляем только те слагаемые, которые осциллируют с частотой $2|\Omega_1| - \omega$. В итоге придем к следующему соотношению:

$$(a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t) \hat{\Xi}_y \approx \frac{a_1}{2} e^{i(2|\Omega_1| - \omega)t \hat{\sigma}_x} \hat{\sigma}_y.$$

Тогда вместо (22) получим

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = -\frac{i\omega a_1}{2} e^{i(2|\Omega_1| - \omega)t \hat{\sigma}_x} \hat{\sigma}_y \chi. \quad (23)$$

После некоторых преобразований запишем

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - i(2|\Omega_1| - \omega) \hat{\sigma}_x \frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\omega^2 a_1^2}{4} \chi = 0. \quad (24)$$

Частные решения уравнения (24) имеют вид

$$\chi_{\pm}(t) = e^{-\frac{i}{2}(\omega - 2|\Omega_1| \pm \Omega_R)t \hat{\sigma}_x} \chi_0, \quad (25)$$

где частота Раби

$$\Omega_R = \sqrt{(2|\Omega_1| - \omega)^2 + \frac{2\Delta p_0^2}{m\hbar^2} \left(1 - \frac{p_0^2}{4m\Delta}\right)}. \quad (26)$$

В случае $2|\Omega_1| - \omega \ll \omega$ в уравнении (22) следует оставить слагаемые, осциллирующие с частотой $2|\Omega_1| - 2\omega$. В результате после аналогичных преобразований получим для частоты Раби

$$\Omega_R = \sqrt{4(|\Omega_1| - \omega)^2 + \frac{p_0^4}{16m^2\hbar^2}}. \quad (27)$$

Как видно из (18), (26) и (27), функциональная зависимость частоты Раби от амплитуды ВЧ поля ($p_0 = eE_0/\omega$) оказывается различной для различных поляризаций этого поля, что объясняется анизотропностью спектра дираковского кристалла с гамильтонианом [13].

Заключение

Выше рассмотрена нелинейная динамика электрона в 2D-дираковом кристалле, помещенном в переменное электрическое поле монохроматического излучения частоты ω . Используемый в расчетах модельный гамильтониан [13] в отличие от [32] учитывал наличие 2-х независимых дираковских точек и характеризовался существенной анизотропностью. Учет явления ZB — осциллирующий свободный дираковский электрон — приводит к модификации спектра нелинейных колебаний электрона во внешнем силовом ВЧ поле. В приближении HDF, когда частота внешнего поля значительно превышает частоту ZB, этот спектр содержит комбинации $n\omega \pm 2\Omega$, где n — целое число, 2Ω — частота ZB. Стоит сказать, что многомодовая динамика дираковского электрона в монохроматическом поле исследовалась ранее в [32], где в рамках HDF сообщалось о трех частотах в спектре электронных осцилляций: 2Ω и $\omega \pm 2\Omega$. Однако теория, построенная в [32], ограничивалась одномерным движением электрона и линейным по амплитуде ВЧ поля приближением. В настоящей работе в отличие от [32] исследован случай произвольных направлений квазиимпульса и произвольных амплитуд ВЧ излучения. В результате получена функциональная зависимость интенсивности многомодового ZB от амплитуды ВЧ поля a_0 (рисунок). Кроме того, формула (14) позволяет найти зависимость от a_0 амплитуды произвольной n -й гармоники многомодового ZB.

Спектр электронных осцилляций, полученный в рамках RWA, когда частота внешнего поля сравнима с частотой ZB, содержит, так же как и в [32], три частоты: Ω_R , $\Omega_R \pm \omega$, где Ω_R — частота Раби. Однако в отличие от [32] зависимость частоты Ω_R от амплитуды ЭМ излучения определяется направлением его поляризации (формулы (18), (26) и (27)). Последнее связано с анизотропностью использованного в расчетах гамильтониана [13].

В заключение укажем на возможность появления постоянной составляющей скорости у электрона 2D-дираковского кристалла в поле монохроматического излучения. Для этого необходимо, чтобы частота ZB была кратна частоте переменного электрического поля. При этом, согласно формуле (7), величина „выпрямленной“ скорости определяется амплитудой этого поля.

Финансирование работы

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства просвещения Российской Федерации в рамках государственного задания. Название проекта „Распространение и взаимодействие уединенных волн в наноструктурах на основе дираковских материалов“.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] M.I. Katsnelson, K.S. Novoselov, A.K. Geim. *Nature Phys.*, **2**, 620 (2006). DOI: 10.1038/nphys384
- [2] M.I. Katsnelson. *Eur. Phys. J. B*, **51**, 157 (2006). DOI: 10.1140/epjb/e2006-00203-1
- [3] A.F. Young, P. Kim. *Nat. Phys.*, **5**, 222 (2009). DOI: 10.1038/nphys1198
- [4] I. Romanovsky, C. Yannouleas, U. Landman. *Phys. Rev. B*, **87**, 165431 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevB.87.165431
- [5] M. Ezawa. *Phys. Rev. Lett.*, **109**, 055502 (2012). DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.055502
- [6] D. Pesin, A.H. MacDonald. *Nature Mater.*, **11**, 409 (2012). DOI: 10.1038/nmat3305
- [7] P. Delplace, A. Gomez-Leon, G. Platero. *Phys. Rev. B*, **88**, 245422 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevB.88.245422
- [8] G. Usaj, P.M. Perez-Piskunow, L.E.F. Foa Torres, C.A. Balseiro. *Phys. Rev. B*, **90**, 115423 (2014). DOI: 10.1103/PhysRevB.90.115423
- [9] S. Ghosh, A. Manchon. *SPIN*, **6**(2), 1640004 (2016). DOI: 10.1142/S201032471640004X
- [10] C.P. Weber. *J. Appl. Phys.*, **129**, 070901 (2021). DOI: 10.1063/5.0035878
- [11] T. Oka, H. Aoki. *Phys. Rev. B*, **79**, 081406 (2009). DOI: 10.1103/PhysRevB.79.081406
- [12] O.V. Kibis. *Phys. Rev. B*, **81**, 165433 (2010). DOI: 10.1103/PhysRevB.81.165433
- [13] G. Montambaux, F. Piéchon, J.-N. Fuchs, M.O. Goerbig. *Eur. Phys. J. B*, **72**, 509 (2009). DOI: 10.1140/epjb/e2009-00383-0
- [14] E.I. Kukhar, S.V. Kryuchkov. *Physica E*, **134**, 114811 (2021). DOI: 10.1016/j.physe.2021.114811
- [15] J. Schliemann, D. Loss, R.M. Westervelt. *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 206801 (2005). DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.206801
- [16] J. Cserti, G. Dávid. *Phys. Rev. B*, **74**, 172305 (2006). DOI: 10.1103/PhysRevB.74.172305
- [17] T.M. Rusin, W. Zawadzki. *Phys. Rev. B*, **76**, 195439 (2007). DOI: 10.1103/PhysRevB.76.195439
- [18] G.M. Maksimova, V.Ya. Demikhovskii, E.V. Frolova. *Phys. Rev. B*, **78**, 235321 (2008). DOI: 10.1103/PhysRevB.78.235321
- [19] X. Zhang. *Phys. Rev. Lett.*, **100**, 113903 (2008). DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.113903
- [20] I. Stepanov, M. Ersfeld, A.V. Poshakinskiy, M. Lepsa, E.L. Ivchenko, S.A. Tarasenko, B. Beschoten. *arXiv.org [Электронный ресурс]* arXiv:1612.06190 (2016). URL: <https://arxiv.org/abs/1612.06190>
- [21] Y. Iwasaki, Y. Hashimoto, T. Nakamura, S. Katsumoto. *J. Phys. Conf. Ser.*, **864**, 012054 (2017). DOI: 10.1088/1742-6596/864/1/012054
- [22] R. Gerritsma, G. Kirchmair, F. Zahringer, E. Solano, R. Blatt, C.F. Roos. *Nature*, **463**, 68 (2010). DOI: 10.1038/nature08688
- [23] L. Diago-Cisneros, E. Serna, I.R. Vargas, R. Pérez-Álvarez. *J. Appl. Phys.*, **125**, 203902 (2019). DOI: 10.1063/1.5078642
- [24] Н.Е. Фирсова, С.А. Ктиторов. *ФТТ*, **63**(2), 277 (2021). DOI: 10.21883/FTT.2021.02.50478.148 [N.E. Firsova, S.A. Ktitorov. *Phys. Solid State*, **63**, 313 (2021). DOI: 10.1134/S1063783421020074].
- [25] W. Zhang, H. Yuan, W. He, X. Zheng, N. Sun, F. Di, H. Sun, X. Zhang. *Commun. Phys.*, **4**, 250 (2021). DOI: 10.1038/s42005-021-00752-8
- [26] L.-K. Shi, S.-C. Zhang, K. Chang. *Phys. Rev. B*, **87**, 161115 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevB.87.161115

- [27] C.S. Ho, M.B.A. Jalil, S.G. Tan. *EPL*, **108**, 27012 (2014). DOI: 10.1209/0295-5075/108/27012
- [28] P. Reck, C. Gorini, K. Richter. *Phys. Rev. B*, **101**, 094306 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevB.101.094306
- [29] T.M. Rusin, W. Zawadzki. *Phys. Rev. B*, **78**, 125419 (2008). DOI: 10.1103/PhysRevB.78.125419
- [30] E. Romera, J.B. Roldán, F. de los Santos. *Phys. Lett. A*, **378**, 2582 (2014). DOI: 10.1016/j.physleta.2014.06.040
- [31] М.Б. Белоненко, Н.Н. Янушкина. *ФТТ*, **54**, 2331 (2012). URL: <https://journals.ioffe.ru/articles/828> [M.B. Belonenko, N.N. Yanyushkina. *Phys. Solid State*, **54**, 2462 (2012). DOI: 10.1134/S1063783412120050].
- [32] T.M. Rusin, W. Zawadzki. *Phys. Rev. B*, **88**, 235404 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevB.88.235404
- [33] I.R. Lator, D.R. da Costa, A. Chaves, S.H.R. Sena, G.A. Farias, B. Van Duppen, F.M. Peeters. *J. Phys. Condens. Matter.*, **33**, 095503 (2021). DOI: 10.1088/1361-648X/abcd7f
- [34] W. Zawadzki, T. M. Rusin. *J. Phys. Condens. Matter*, **23**, 143201 (2011). DOI: 10.1088/0953-8984/23/14/143201
- [35] T. Huang, T. Ma, L.-G. Wang. *J. Phys. Condens. Matter.*, **30**, 245501 (2018). DOI: 10.1088/1361-648X/aac23b
- [36] J. Luan, S. Li, T. Ma, L.-G. Wang. *J. Phys. Condens. Matter.*, **30**, 395502 (2018). DOI: 10.1088/1361-648X/aadbe0