

Перепутывание изолированного кубита и кубита в резонаторе со средой Керра

© Е.К. Башкиров

Самарский национальный исследовательский университет им. акад. С.П. Королева,
443086 Самара, Россия
e-mail: bashkirov.ek@ssau.ru

Поступило в Редакцию 20 декабря 2022 г.
В окончательной редакции 20 декабря 2022 г.
Принято к публикации 20 декабря 2022 г.

Найдено точное решение модели, состоящей из двух дипольно-связанных кубитов, один из которых находится в свободном состоянии, а второй взаимодействует с тепловой модой резонатора со средой Керра. Исследовано влияние керровской нелинейности на степень перепутывания кубитов, индуцированного тепловым полем резонатора, для сепарабельных и перепутанных начальных состояний кубитов. Показана возможность исчезновения эффекта мгновенной смерти перепутывания кубитов в модели с керровской нелинейностью.

Ключевые слова: кубиты, тепловое поле, керровская нелинейность, диполь-дипольное взаимодействие, перепутывание, мгновенная смерть перепутывания.

DOI: 10.21883/JTF.2023.04.55028.280-22

Введение

Модель Джейнса–Каммингса, описывающая взаимодействие двухуровневого атома с выделенной квантовой модой поля резонатора без потерь, представляет собой простейшую полностью квантованную точно решаемую модель квантовой оптики [1]. Несмотря на простоту, модель Джейнса–Каммингса и ее обобщения, учитывающие несколько переходов в атомах, наличие нескольких мод квантованного поля, нескольких атомов, диполь-дипольное и другие типы взаимодействий между атомами, наличие различных типов нелинейных сред в резонаторе, позволяют описать все основные квантовые эффекты взаимодействия излучения с веществом [2]. В последнее время различные обобщения модели Джейнса–Каммингса нашли широкое применение в физике квантовых вычислений и квантовых коммуникаций. Это связано с тем, что для генерации и управления перепутанными состояниями естественных и искусственных двухуровневых атомов (кубитов), таких как сверхпроводящие кольца с джозефсоновскими переходами, ионы в магнитных ловушках, примесные спины и др., обычно используют электромагнитные поля резонаторов [3–5]. В настоящее время динамика перепутывания кубитов, индуцированного полями резонаторов, исследована для большого числа различных многокубитных моделей типа Джейнса–Каммингса (см. ссылки в [6–11]). Использование перепутанных состояний для квантовых вычислений и коммуникаций предполагает необходимость выбора надлежащих мер количественной оценки степени перепутывания кубитов. Хотя общие свойства перепутанных состояний достаточно подробно изучены, строгие количественные критерии перепутывания кубитов до настоящего времени удалось ввести

только для двухкубитных систем. К таким критериям относятся согласованность (критерий Вуутерса) [12] и отрицательность (критерий Переса–Хородецких) [13,14]. Что касается многокубитных систем, то для них до настоящего времени не удается ввести аналогичные количественные критерии. Поэтому в настоящее время особое внимание уделяется изучению динамики перепутывания двухкубитных систем.

Одним из препятствий на пути реализации эффективных и надежных протоколов физики квантовых вычислений и квантовых коммуникаций является эффект мгновенной смерти перепутывания кубитов. Поэтому изучение механизмов, способствующих исчезновению или ослаблению эффекта мгновенной смерти перепутывания кубитов, становится одной из приоритетных задач квантовой информатики. Явление мгновенной смерти перепутывания заключается в исчезновении перепутывания кубитов на временах меньших времени декогеренции. Такой эффект теоретически впервые был предсказан Ю и Эберли [15] при изучении унитарной динамики двух кубитов в резонаторе. Позднее указанный эффект наблюдался экспериментально [16]. В работе [17] эффект мгновенной смерти перепутывания исследовался на примере системы двух пространственно разделенных двухуровневых атомов: изолированного атома и атома, взаимодействующего с модой квантового электромагнитного поля резонатора без потерь (атома Джейнса–Каммингса). Авторы ограничились рассмотрением случая, когда атомы в начальный момент времени находятся в перепутанном состоянии, а поле резонатора — в фоковском состоянии. При этом авторы предсказали возможность мгновенной смерти перепутывания атомов в процессе их эволюции. В рамках модели, предложенной в работе [17], были также исследованы различия в поведении различных

количественных мер перепутывания кубитов [18,19], а также влияние квантовой фазы на эффект мгновенной смерти перепутывания [20]. Влияние расстройки частот перехода в атоме Джейнса–Каммингса и тепловой резонаторной моде, а также прямого диполь-дипольного взаимодействия атомов на характер проявления эффекта мгновенной смерти перепутывания в указанной модели рассмотрено в работах [21,22].

В настоящее время экспериментально получены перепутанные состояния кубитов различной физической природы в резонаторах при различных температурах от нК до комнатных [4,5]. Это означает наличие тепловых фотонов в резонаторах таких квантовых устройств. В целом ряде работ было показано, что взаимодействие кубитов с тепловыми полями резонаторов может приводить к мгновенной смерти перепутывания кубитов (см. ссылки в [23,24]). Поэтому представляет значительный интерес исследование механизмов, позволяющих предотвратить мгновенную смерть перепутывания кубитов, вызванную тепловыми полями резонаторов. В настоящее время показано, что устранению эффекта мгновенной смерти перепутывания, индуцированной тепловым шумом, способствуют включение расстройки частот кубитов и поля, прямого диполь-дипольного и изинговского взаимодействия кубитов, штарковского сдвига и др. (см. ссылки в [25]). Исчезновению эффекта может способствовать также использование нелинейных сред резонаторов, в частности нелинейности Керра [26]. Для атомных систем параметр керровской нелинейности Ξ мал по сравнению со скоростью потерь фотонов из резонатора κ , поэтому влияние керровской среды на динамику атомов на временах релаксации незначительно. Однако для сверхпроводящих кубитов в копланарных резонаторах удалось создать условия, при которых соотношение керровской нелинейности и скорости потерь удовлетворяет условию $\Xi\kappa > 30$ [27]. В таких условиях керровская нелинейность может оказывать существенное влияние на динамику перепутывания сверхпроводящих кубитов.

В настоящей работе нами найдена точная динамика системы дипольно-связанных изолированного двухуровневого атома (кубита) и атома Джейнса–Каммингса, взаимодействующих с тепловым полем резонатора со средой Керра. На основе точного решения нами исследована временная зависимость параметра перепутывания кубитов — отрицательности для сепарабельных и перепутанных начальных состояний кубитов. Проанализированы условия исчезновения эффекта мгновенной смерти перепутывания кубитов.

1. Модель и ее точное решение

Рассмотрим систему, состоящую из двух идентичных дипольно-связанных естественных или искусственных двухуровневых атомов (кубитов) Q_1 и Q_2 с частотой перехода между возбужденным и основным уровнями, равной $\hbar\omega_0$. При этом первый кубит заперт в одномодовом

идеальном резонаторе и резонансно взаимодействует посредством однофотонных переходов с полем резонатора частоты $\omega = \omega_0$, а второй кубит находится в свободном состоянии. Заметим, что для искусственных атомов, например сверхпроводящих колец с джозефсоновскими переходами, константа прямого диполь-дипольного взаимодействия может превосходить константу атом-полевого взаимодействия [28]. Предположим также, что в резонаторе имеется дополнительная среда Керра. Тогда гамильтониан рассматриваемой модели в представлении взаимодействия можно записать в виде

$$H = \hbar g(\sigma_1^+ a + \sigma_1^- a^\dagger) + \hbar J(\sigma_2^+ \sigma_1^- + \sigma_1^+ \sigma_2^-) + \hbar \Xi a^\dagger a^2, \quad (1)$$

где $\sigma_1^- = |- \rangle_{11} \langle +|$ и $\sigma_1^+ = |+ \rangle_{11} \langle -|$ — операторы перехода между возбужденным $|+ \rangle_1$ и основным $|- \rangle_1$ состоянием в первом кубите, a^\dagger и a — операторы рождения и уничтожения фотонов резонаторной моды, g — константа взаимодействия между кубитом и полем резонатора, J — константа диполь-дипольного взаимодействия кубитов и Ξ — константа нелинейности Керра.

Будем полагать, что в начальный момент времени кубиты приготовлены в одном из сепарабельных состояний вида

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2} = |+, - \rangle, \quad (2)$$

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2} = |+, + \rangle, \quad (3)$$

или в перепутанном состоянии Белловского типа

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2} = \cos \theta |+, - \rangle + \sin \theta |-, + \rangle, \quad (4)$$

где θ — параметр, определяющий степень начального перепутывания кубитов Q_1 и Q_2 . Максимальной степени перепутывания кубитов соответствует значение $\theta = \pi/4$. Такие начальные состояния для кубитов в резонаторах можно получить с помощью микроволновых импульсов с определенной длительностью.

В качестве начального состояния поля выберем одномодовое тепловое состояние с матрицей плотности вида

$$\rho_F(0) = \sum_n p_n |n\rangle \langle n|.$$

Здесь весовые функции p_n имеют вид

$$p_n = \bar{n}^n / (1 + \bar{n})^{n+1},$$

где \bar{n} — среднее число тепловых фотонов, определяемое формулой Бозе–Эйнштейна,

$$\bar{n} = (\exp[\hbar\omega/k_B T] - 1)^{-1},$$

где k_B — постоянная Больцмана и T — температура микроволнового резонатора. В зависимости от физической природы естественного или искусственного атома, взаимодействующего с полем резонаторов, температура резонатора может меняться от комнатных температур для азотозамещенных вакансий в алмазе до нК в случае нейтральных атомов и ионов в магнитных ловушках.

Поставим перед собой задачу найти точную динамику рассматриваемой модели. Для этого мы предварительно найдем точное решение временного уравнения Шредингера для рассматриваемой модели в случае начального состояния электромагнитного поля с определенным числом фотонов, а затем обобщим полученные результаты на случай теплового поля.

Для состояния поля с определенным числом фотонов волновая функция есть

$$|\Psi(0)\rangle_F = |n\rangle \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Чтобы получить точное решение временного уравнения Шредингера для рассматриваемой модели, воспользуемся так называемым представлением „одетых“ состояний, т.е. собственных функций гамильтониана (1). Предположим, что число возбуждений системы „два кубита + поле резонатора“ равно $N = n + 2$ ($n \geq 0$). Тогда эволюция временного вектора состояния будет происходить в 4-х мерном гильбертовом пространстве с базисом

$$|-, -, n + 2\rangle, |+, -, n + 1\rangle, |-, +, n + 1\rangle, |+, +, n\rangle.$$

Тогда, используя разложение временного вектора состояния по базисным векторам

$$|\Psi(t)\rangle_n = X_{1,n}(t)|-, -, n + 2\rangle + X_{2,n}(t)|+, -, n + 1\rangle + X_{3,n}(t)|-, +, n + 1\rangle + X_{4,n}(t)|+, +, n\rangle \quad (5)$$

совместно с временным уравнением Шредингера, получаем

$$\dot{\tilde{X}} = -(iH/\hbar)\tilde{X},$$

где

$$\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} X_{1,n}(t) \\ X_{2,n}(t) \\ X_{3,n}(t) \\ X_{4,n}(t) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) для чисел возбуждения $N \geq 2$ и начальных состояний кубитов $|-, -\rangle, |+, -\rangle, |-, +\rangle, |+, +\rangle$ есть

$$X_{i,n}^{(m)}(t) = \sum_{j=1}^4 U_{ij, nm}(t) X_{j,n}^{(m)}(0), \quad (7)$$

где

$$U_{ij, nm}(t) = \sum_{l=1}^4 t_{inm}^l (t_{jnm}^l)^* e^{-i\lambda_{lm}gt}.$$

Здесь индекс $m = 1, 2, 3, 4$ нумерует начальные состояния кубитов вида $|-, -\rangle, |+, -\rangle, |-, +\rangle, |+, +\rangle$ соответственно, а $\lambda_{ln} = E_{ln}/(\hbar g)$ ($l = 1, 2, 3, 4$) — нормированные собственные значения гамильтониана (1):

$$\lambda_{1n} = (1/2)\chi + n\chi + n^2\chi - V_n - W_n,$$

$$\lambda_{2n} = (1/2)\chi + n\chi + n^2\chi - V_n + W_n,$$

$$\lambda_{3n} = (1/2)\chi + n\chi + n^2\chi + V_n - W_n,$$

$$\lambda_{4n} = (1/2)\chi + n\chi + n^2\chi + V_n + W_n,$$

где

$$V_n = \frac{1}{2}\sqrt{-2c_n/3 + d_n^2/4 + 2^{1/3}G_n/(3F_n) + F_n/(3 \cdot 2^{1/3})},$$

$$W_n = \frac{1}{2}\sqrt{-2c_n/3 + d_n^2/4 - 2^{1/3}G_n/(3F_n) - F_n/2^{1/3}},$$

$$F_n = \left(27b_n^2 - 72a_n c_n + 2c_n^3 - 9b_n c_n d_n + 27a_n d_n^2 + \sqrt{(-4(12a_n + c_n^2 - 3b_n d_n)^3 + (27b_n^2 - 72a_n c_n + 2c_n^3 - 9b_n c_n d_n + 27a_n d_n^2)^2)} \right)^{1/3},$$

$$G_n = 12a_n + c_n^2 - 3b_n d_n,$$

$$H_n = -(2b_n - c_n d_n + d_n^3/4) / \sqrt{-2c_n/3 + d_n^2/4 + 2^{1/3}G_n/(3F_n) + F_n/(3 \cdot 2^{1/3})},$$

$$a_n = \sqrt{1 + n}\sqrt{2+n}(n+1) - n(2 + 7n + 9n^2 + 5n^3 + n^4)\chi^2$$

$$+ -n^2(n^2 - 1)\sqrt{1 + n}\sqrt{2+n}\chi^2 + n\alpha^2(2 + n - 2n^2)\chi^2$$

$$- n^4\alpha^2\chi^2 - 2n^3\chi^4 - 5n^4\chi^4 - 2n^5\chi^4 + 4n^6\chi^4 + 4n^7\chi^4,$$

$$b_n = n^8\chi^4(2\chi + 6n\chi + 6n^2\chi + 2n^3\chi + 2n^2\sqrt{1 + n}\sqrt{2+n}\chi$$

$$+ 2\alpha^2\chi + 2n\alpha^2\chi + 2n^2\alpha^2\chi + 2n^2\chi^3 - 10n^4\chi^3$$

$$- 12n^5\chi^3 - 4n^6\chi^3),$$

$$c_n = -1 - n - \sqrt{1 + n}\sqrt{2+n} - \alpha^2 + 2n\chi^2 + 8n^2\chi^2$$

$$+ 12n^3\chi^2 + 6n^4\chi^2,$$

$$d_n = -2\chi - 4n\chi - 4n^2\chi, \quad \chi = \Xi/g, \quad \alpha = J/g$$

и

$$X_{1,n}^{(1)}(0) = 1, X_{2,n}^{(1)}(0) = 0, X_{3,n}^{(1)}(0) = 0, X_{4,n}^{(1)}(0) = 0,$$

$$X_{1,n}^{(2)}(0) = 0, X_{2,n}^{(2)}(0) = 1, X_{3,n}^{(2)}(0) = 0, X_{4,n}^{(2)}(0) = 0,$$

$$X_{1,n}^{(3)}(0) = 0, X_{2,n}^{(3)}(0) = 0, X_{3,n}^{(3)}(0) = 1, X_{4,n}^{(3)}(0) = 0,$$

$$X_{1,n}^{(4)}(0) = 0, X_{2,n}^{(4)}(0) = 0, X_{3,n}^{(4)}(0) = 0, X_{4,n}^{(4)}(0) = 1.$$

Явный вид коэффициентов t_{inm}^l для начальных состояний атомов (2)–(4) в настоящей работе не представлен ввиду их чрезмерно громоздкого вида.

Для числа возбуждений системы $N = 1$ решение временного уравнения Шредингера можно представить в виде:

а) начальное состояние системы $|+, -, 0\rangle$

$$|\Psi(t)\rangle_1 = Y_1^{(1)}(t)|-, -, 1\rangle + Y_2^{(1)}(t)|+, -, 0\rangle + Y_3^{(1)}(t)|-, +, 0\rangle, \quad (8)$$

где

$$Y_1^{(1)} = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_j e^{i\varepsilon_j t} / q_j, \quad Y_2^{(1)} = -\sum_{j=1}^3 \varepsilon_j^2 e^{i\varepsilon_j t} / q_j,$$

$$Y_3^{(1)} = -\alpha \sum_{j=1}^3 \varepsilon_j e^{i\varepsilon_j t} / q_j,$$

$$q_j = 1 + \alpha^2 - 3\varepsilon_j^2,$$

$$\varepsilon_1 = \operatorname{Re} [(-\sqrt[3]{2}\xi/\xi + \xi/\sqrt[3]{2})]/3,$$

$$\varepsilon_2 = \operatorname{Re} ((1 + i\sqrt{3})\xi/2^{2/3}\xi - (1 - i\sqrt{3})\xi/2\sqrt[3]{2})/3,$$

$$\varepsilon_3 = \operatorname{Re} ((1 - i\sqrt{3})\xi/2^{2/3}\xi - (1 + i\sqrt{3})\xi/2\sqrt[3]{2})/3,$$

$$\xi = 2^{1/3} i \sqrt{3(\alpha^2 + 1)}, \quad \xi = -3(1 + \alpha^2);$$

б) начальное состояние системы $|-, +, 0\rangle$

$$|\Psi(t)\rangle_2 = Y_1^{(2)}(t)|-, -, 1\rangle + Y_2^{(2)}(t)|+, -, 0\rangle + Y_3^{(2)}(t)|-, +, 0\rangle, \quad (9)$$

где

$$Y_1^{(2)} = -\alpha \sum_{j=1}^3 e^{i\varepsilon_j t} / q_j, \quad Y_2^{(2)} = -\alpha \sum_{j=1}^3 \varepsilon_j e^{i\varepsilon_j t} / q_j,$$

$$Y_3^{(2)} = -\alpha \sum_{j=1}^3 e^{i\varepsilon_j t} / q_j;$$

в) начальное состояние системы $|-, -, 1\rangle$

$$|\Psi(t)\rangle_3 = Y_1^{(3)}|-, -, 1\rangle + Y_2^{(3)}|+, -, 0\rangle + Y_3^{(3)}|-, +, 0\rangle, \quad (10)$$

где

$$Y_1^{(3)} = \sum_{j=1}^3 (\alpha^2 - \varepsilon_j^2) e^{i\varepsilon_j^2 t} / q_j, \quad Y_2^{(3)} = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_j e^{i\varepsilon_j t} / q_j,$$

$$Y_3^{(3)} = -\alpha \sum_{j=1}^3 e^{i\varepsilon_j t} / q_j.$$

Наконец, для числа возбуждений $N = 0$ и начального состояния системы $|-, -, 0\rangle$ временная волновая функция остается неизменной во времени

$$|\Psi(t)\rangle_4 = |-, -, 0\rangle. \quad (11)$$

Используя выражения (5)–(11), мы можем получить временную матрицу плотности для всей системы в случае теплового начального состояния поля резонатора в виде

$$\rho(t) = \sum_n p_n |\Psi(t)\rangle_{nn} \langle \Psi(t)|.$$

Для вычисления количественного критерия перепутывания кубитов — отрицательности, необходимо вычислить редуцированную кубит-кубитную матрицу плотности. Для этого необходимо усреднить полную матрицу плотности по переменным поля $\rho_{Q_1 Q_2}(t) = \operatorname{Tr}_F \rho(t)$.

2. Расчет отрицательности

Для двухкубитной системы, описываемой оператором плотности $\rho_{Q_1 Q_2}(t)$, мера перепутывания кубитов — отрицательность, может быть определена через отрицательные собственные значения v_i^- частично транспонированной по переменным одного кубита редуцированной двухкубитной матрицы плотности $\rho_{Q_1 Q_2}^{T_1}$ [13,14]:

$$N(t) = -2 \sum_i v_i^-. \quad (12)$$

Для сепарабельных начальных состояний кубитов (2), (3) и перепутанного начального состояния (4) двухкубитная матрица плотности имеет вид

$$\rho_{Q_1 Q_2}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22}(t) & \rho_{23}(t) & 0 \\ 0 & \rho_{23}(t)^* & \rho_{33}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{44}(t) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Соответственно частично транспонированная по переменным одного кубита матрица плотности для (13) есть

$$\rho_{Q_1 Q_2}^{T_1}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(t) & 0 & 0 & \rho_{23}(t)^* \\ 0 & \rho_{22}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33}(t) & 0 \\ \rho_{23}(t) & 0 & 0 & \rho_{44}(t) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Элементы матрицы (14) для начального состояния кубитов $|+, +\rangle$ равны

$$\rho_{11} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |X_{4,n}^{(4)}(t)|^2, \quad \rho_{22} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |X_{2,n}^{(4)}(t)|^2,$$

$$\rho_{33} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |X_{3,n}^{(4)}(t)|^2, \quad \rho_{44} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |X_{1,n}^{(4)}(t)|^2,$$

$$\rho_{23} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n X_{2,n}^{(4)}(t) X_{3,n}^{(1)}(t)^*.$$

Для начального состояния $|+, -\rangle$ они принимают вид

$$\rho_{11} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |X_{4,n-1}^{(2)}(t)|^2,$$

$$\rho_{22} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |X_{2,n-1}^{(2)}(t)|^2 + p_0 Y_2^{(1)}(t),$$

$$\rho_{33} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |X_{3,n-1}^{(2)}(t)|^2 + p_0 Y_3^{(1)}(t),$$

$$\rho_{44} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |X_{1,n}^{(2)}(t)|^2 + p_0 Y_1^{(1)}(t),$$

$$\rho_{23} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n X_{2,n-1}^{(2)}(t) X_{3,n-1}^{(2)}(t)^*.$$

Для перепутанного начального состояния (4) матричные элементы в настоящей работе не приводятся ввиду их чрезвычайной громозкости.

Матрица (14) имеет только одно собственное значение, которое может принимать отрицательные значения. В результате для отрицательности (12) имеем

$$N(t) = \sqrt{(\rho_{11}(t) - \rho_{44}(t))^2 + 4|\rho_{23}(t)|^2} - \rho_{11}(t) - \rho_{44}(t). \quad (15)$$

Результаты численных расчетов отрицательности (15) для различных начальных состояний кубитов и параметров модели представлены на рис. 1–4.

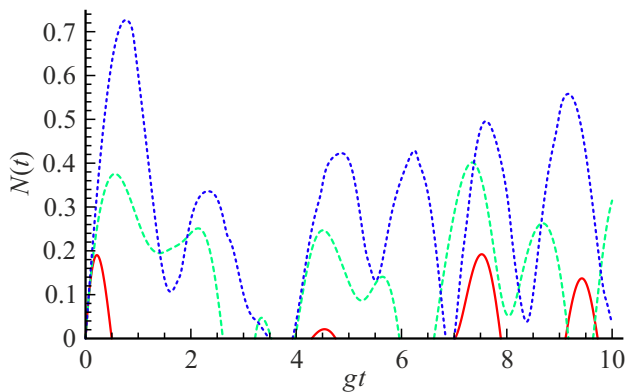


Рис. 1. Отрицательность как функция безразмерного времени gt для сепарабельного начального состояния кубитов $|+-, -\rangle$. Среднее число фотонов в моде $\bar{n} = 3$. Безразмерный параметр диполь-дипольного взаимодействия $\alpha = 0.75$. Безразмерный параметр керровской нелинейности $\chi = 0$ (сплошная линия), $\chi = 1$ (штриховая линия) и $\chi = 3$ (точечная линия).

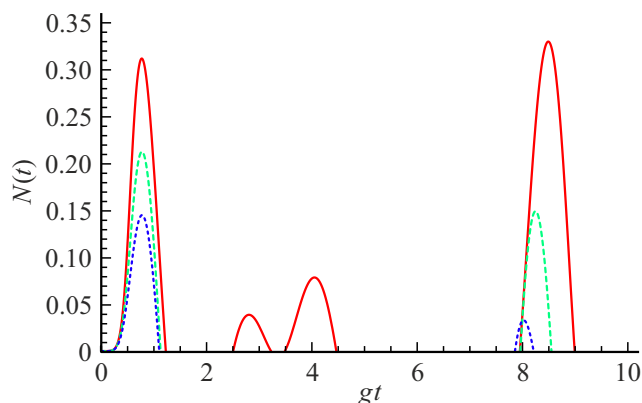


Рис. 2. Отрицательность как функция безразмерного времени gt для сепарабельного начального состояния кубитов $|++, +\rangle$. Среднее число фотонов в моде $\bar{n} = 3$. Безразмерный параметр диполь-дипольного взаимодействия $\alpha = 0.75$. Безразмерный параметр керровской нелинейности $\chi = 0$ (сплошная линия), $\chi = 0.2$ (штриховая линия) и $\chi = 0.3$ (точечная линия).

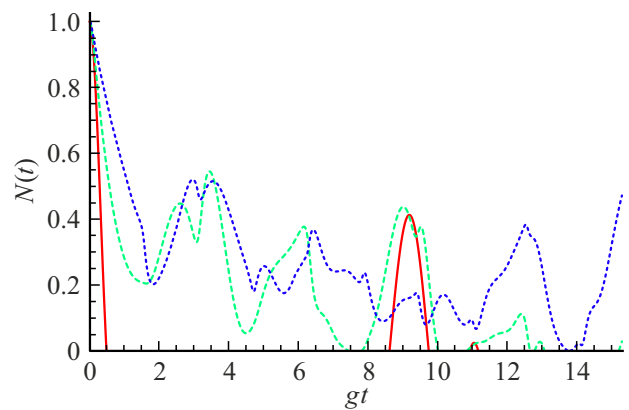


Рис. 3. Отрицательность как функция безразмерного времени gt для перепутанного начального состояния кубитов (4) при $\theta = \pi/4$. Среднее число фотонов в моде $\bar{n} = 3$. Безразмерный параметр диполь-дипольного взаимодействия $\alpha = 0$. Безразмерный параметр керровской нелинейности $\chi = 0$ (сплошная линия), $\chi = 1$ (штриховая линия) и $\chi = 2$ (точечная линия).

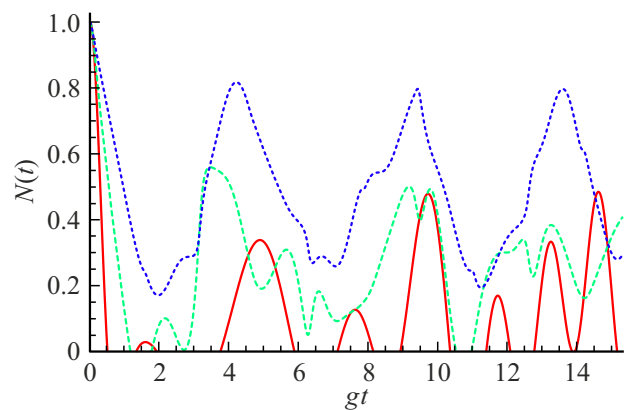


Рис. 4. Отрицательность как функция безразмерного времени gt для перепутанного начального состояния кубитов (4) при $\theta = \pi/4$. Среднее число фотонов в моде $\bar{n} = 3$. Безразмерный параметр диполь-дипольного взаимодействия $\alpha = 0.75$. Безразмерный параметр керровской нелинейности $\chi = 0$ (сплошная линия), $\chi = 1$ (штриховая линия) и $\chi = 2$ (точечная линия).

3. Результаты и обсуждение

На рис. 1 показана зависимость параметра перепутывания от безразмерного времени gt для неперепутанного начального состояния кубитов $|+-, -\rangle$ и различных значений керровской нелинейности. Кривые получены для модели со средним числом тепловых фотонов в моде $\bar{n} = 3$ и значением безразмерного параметра диполь-дипольного взаимодействия кубитов $\alpha = 0, 75$. Для численного моделирования параметра перепутывания рассмотрено достаточно интенсивное тепловое поля резонатора, так как при малых интенсивностях влияние керровской нелинейности на степень перепутывания кубитов незначительно.

Нетрудно заметить, что по мере увеличения безразмерного параметра керровской нелинейности χ максимальная степень перепутывания кубитов возрастает. Аналогичный результат имеет место и для кубитов, взаимодействующих с общим тепловым полем резонатора [25]. Однако для рассматриваемой модели возникновение перепутывания кубитов в случае неперепутанных начальных состояний возможно лишь при наличии их дипольной связи. Из рис. 1 также видно, что в отсутствие керровской нелинейности имеет место эффект мгновенной смерти перепутывания, т.е. исчезновение перепутывания на временах меньших времени декогеренции. При увеличении параметра керровской нелинейности мгновенная смерть перепутывания исчезает. Так, в случае $\alpha = 0.75$ и $\bar{n} = 3$ эффект исчезает для значений параметра керровской нелинейности $\chi > 3.5$.

Временная зависимость отрицательности для начального атомного состояния $|+, +\rangle$ и различных значений керровской нелинейности показана на рис. 2. Как и для предыдущего рисунка, кривые построены для значения параметра дипольной связи кубитов $\alpha = 0.75$ и среднего число тепловых фотонов в моде $\bar{n} = 3$. Для рассматриваемого начального состояния кубитов увеличение параметра керровской нелинейности приводит к обратному эффекту — максимальная степень перепутывания кубитов при этом уменьшается.

На рис. 3 и 4 представлена временная зависимость отрицательности для белловского перепутанного состояния кубитов $1/\sqrt{2}(|+, -\rangle + |-, +\rangle)$ и различных значений параметра керровской нелинейности. Среднее число тепловых фотонов в моде $\bar{n} = 3$, а параметр дипольной связи кубитов выбран равным $\alpha = 0$ (рис. 3) и $\alpha = 0.75$ (рис. 4). Из рисунков видно, что для перепутанных начальных состояний кубитов включение керровской нелинейности приводит к стабилизации осцилляций колебаний отрицательности как для модели с диполь-дипольным взаимодействием, так и для модели без такого взаимодействия. При этом при больших значениях параметра нелинейности имеет место исчезновение эффекта мгновенной смерти перепутывания.

Заключение

В работе мы исследовали динамику свободного кубита и кубита, запертого в одномодовом идеальном резонаторе со средой Керра, при наличии прямого диполь-дипольного взаимодействия кубитов и резонансного взаимодействия кубита с полем. Получено точное решение квантового уравнения Лиувилля рассматриваемой модели в случае начальных сепарабельных и перепутанных состояний кубитов и теплового поля резонатора. На основе точного решения найдено аналитическое выражение для отрицательности. Нами исследовано влияние керровской нелинейности и диполь-дипольного взаимодействия на степень перепутывания кубитов. Для кубитов, приготовленных в сепарабельном состоянии

$|+, -\rangle$, включение керровской нелинейности приводит к увеличению максимальной степени перепутывания кубитов и может подавить эффект мгновенной смерти перепутывания. Для сепарабельного начального состояния кубитов $|+, +\rangle$ включение керровской нелинейности, напротив, приводит к исчезновению перепутывания кубитов. Для перепутанных начальных состояний кубитов нелинейность ведет к стабилизации амплитуд осцилляций отрицательности как для модели с диполь-дипольным взаимодействием, так и для модели без такого взаимодействия. Для моделей с большими значениями параметра керровской нелинейности эффект мгновенной смерти перепутывания исчезает.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] E.T. Jaynes, F.W. Cummings. Proc. IEEE, **51**, 89 (1963). DOI: 10.1109/PROC.1963.1664
- [2] B.W. Shore, P.L. Knight. J. Mod. Opt., **40** (7), 1195 (1992). DOI: 10.1080/09500349314551321
- [3] I. Buluta, S. Ashhab, F. Nori. Rep. Prog. Phys., **74**, 104401 (2011). DOI: 10.1088/0034-4885/74/10/104401
- [4] Z.-L. Xiang, S. Ashhab, J.Y. You, F. Nori. Rev. Mod. Phys., **85** (2), 623 (2013). DOI: 10.1103/RevModPhys.85.623
- [5] L.M. Georgescu, S. Ashhab, F. Nori. Rev. Mod. Phys., **88** (1), 153 (2014). DOI: 10.1103/RevModPhys.86.153
- [6] M. Ghorbani, M.J. Faghihi, H. Safari. J. Opt. Soc. Am., **B34** (9), 1884 (2017). DOI: 10.1364/JOSAB.34.001884
- [7] L.-T. Shen, Z.-C. Shi, H.-Z. Wu, Z.-B. Yang. Entropy, **19**, 331 (2017). DOI: 10.3390/e19070331
- [8] W.-C. Qiang, G.-H. Sun, Q. Dong, O. Camacho-Nieto, S.-H. Dong. Quantum Inf. Proc., **17**, 90 (2018). DOI: 10.1007/s11128-018-1851-8
- [9] Y. Yang, Y. Liu, J. Lu, I. Zhou. Commun. Theor. Phys., **73**, 025101 (2021). DOI: 10.1088/1572-9494/abd0ea
- [10] S. Abdel-Khalek, K. Berrada, M. Eied, E.M. Khalil, H. Eleuch, A.-S.-F. Obada, E. Reda. Entropy, **23**, 452 (2021). DOI: 10.3390/e23040452
- [11] M. Algarni, K. Berrada, S. Abdel-Khalek, H. Eleuch. Mathematics, **10**, 3051 (2022). DOI: 10.3390/math10173051
- [12] W.K. Wootters. Phys. Rev. Lett., **80**, 2245 (1998). DOI: 10.1103/PhysRevLett.80.2245
- [13] A. Peres. Phys. Rev. Lett., **77**, 1413 (1996). DOI: 10.1103/PhysRevLett.77.1413
- [14] R. Horodecki, M. Horodecki, P. Horodecki. Phys. Lett. A, **223**, 333 (1997). DOI: 10.1016/S0375-9601(97)00416-7
- [15] T. Yu, J.H. Eberly. Phys. Rev. Lett., **93**, 140104 (2004). DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.140404
- [16] M.P. Almeida, F. de Melo, M. Hor-Meyll, A. Salles, S.P. Walborn, P.H. Souto Ribeiro, L. Davidovich. Science, **316**, 579 (2007). DOI: 10.1126/science.1139892
- [17] Z.-J. Li, J.-Q. Li, Y.-H. Jin, Y.-H. Nie. J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys., **40**, 34011 (2007). DOI: 10.1088/0953-4075/40/17/008
- [18] W.-C. Qiang, L. Zhang, H.-P. Zhang. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., **48**, 245503 (2015). DOI: 10.1088/0953-4075/48/24/245503

- [19] H.-P. Zhang, W.-C. Qiang. *Int. J. Theor. Phys.*, **57** (4), 1141 (2018). DOI: 10.1007/s10773-017-3644-8
- [20] C.-Q. Pang, M.-L. Liang. *Acta Phys. Polonica A*, **125** (5), 1069 (2014). DOI: 10.12693/APhysPolA.125.1069
- [21] E.K. Bashkirov. *Int. J. Theor. Phys.*, **57** (12), 3761 (2018). DOI: 10.1016/j.optcom.2020.126233
- [22] G.L. Decordi, A. Vidiella-Barranco. *Opt. Commun.*, **475**, 126233 (2020). DOI: 10.1016/j.optcom.2020.126233
- [23] C.-L. Luo, L. Miao, X.-L. Zheng, Z.-H. Chen, C.-G. Liao. *Chin. Phys. B*, **20** (8), 80303 (2011). DOI: 10.1088/1674-1056/20/8/080303
- [24] B. Zhang. *Opt. Commun.*, **283**, 4676 (2010). DOI: 10.1016/j.optcom.2010.06.094
- [25] E.K. Bashkirov. *SPIE Proc.*, **12193**, 12193OR (2022). DOI: 10.1117/12.2625842
- [26] E.K. Bashkirov. *SPIE Proc.*, **11846**, 11846OW (2021). DOI: 10.1117/12.2588673
- [27] G. Kichmair, B. Vlastakis, Z. Leghtas, S.E. Nigg, H. Paik, E. Ginossar, M. Mirrahimi, L. Frunzio, S.M. Girvin, R.J. Schoelkopf. *Nature*, **495**, 205 (2013). DOI: 10.1038/nature11902
- [28] M. Grajcar, A. Izmalkov, S.H.W. van der Ploeg, S. Linzen, E. Il'ichev, Th. Wagner, U. Hübner, H.-G. Meyer, Alec Maassen van den Brink, S. Uchaikin, A.M. Zagoskin. *Phys. Rev. B*, **72**, 020503(R) (2005). DOI: 10.1103/PhysRevB.72.020503