

# Квантовое измерение амплитуды и фазы электромагнитного поля методом оптического гомодинирования

© А.В. Козловский

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,  
119991 Москва, Россия

e-mail: kozlovskiyav@lebedev.ru

Поступила в редакцию 06.05.2022 г.

В окончательной редакции 29.08.2022 г.

Принята к публикации 09.02.2023 г.

Показана возможность измерения амплитуды и фазы электромагнитного поля методом оптического гомодинирования света. Предложен новый метод определения относительной фазы поля с помощью интерференционной схемы балансного гомодинирования. Метод основан на прямом измерении средней комплексной амплитуды квантового поля, смешиваемого с классическим полем с помощью пассивного симметричного светоделителя в условиях измерительной схемы балансного гомодинирования. „Прямое“ измерение средней амплитуды поля представляет собой непосредственные измерения действительной и мнимой частей средней квантово-механической величины комплексной амплитуды поля методом гомодинирования. Путем сравнения с квантовой теорией эрмитова оператора фазы электромагнитного поля проведена оценка точности такого измерения для различных квантовых состояний микроскопического электромагнитного поля.

**Ключевые слова:** амплитуда и фаза электромагнитного поля, тригонометрические операторы разности фаз, интерференционные операторы светоделителя, оптическое гомодинирование.

DOI: 10.21883/OS.2023.03.55391.3653-22

## 1. Введение

Классическая теория использует в качестве основной и фундаментальной характеристики света комплексную амплитуду электромагнитного поля. Амплитуда электромагнитного (ЭМ) поля в полярных координатах записывается в виде  $E = \sqrt{I}e^{i\varphi}$ , где  $I$  — интенсивность поля,  $\varphi$  — фаза поля. Описание ЭМ поля в рамках квантово-механической теории предполагает замену  $s$ -числовых параметров поля  $\mathbf{E}, \mathbf{I}, \varphi$  на соответствующие им операторы  $\hat{a}, \hat{n}, \hat{\varphi}$ . Операторы рождения (уничтожения) поля  $\hat{a}^+(\hat{a})$  определяются в квантовой теории путем замены  $E \rightarrow \hat{a} = \sqrt{\hat{n} + 1}e^{i\hat{\varphi}}$ ,  $E^* \rightarrow \hat{a}^+ = e^{-i\hat{\varphi}}\sqrt{\hat{n} + 1}$ , с учетом коммутационных свойств операторов поля.

Измерения фазы поля  $\varphi$  в классической теории проводятся с помощью интерферометрических схем, в которых измеряемое поле смешивается с другим ЭМ полем с заданной фазой и производится измерение разности фаз этих двух полей. Таким образом, интерферометрическими методами проводится измерение относительной фазы поля (разности фаз двух полей) [1–7]. Для однозначного измерения разности фаз необходимым является совместное измерение значений тригонометрических функций синуса и косинуса разности фаз.

Непосредственно измеряемыми величинами, характеризующими ЭМ поле, в условиях измерения разности фаз полей являются интенсивности этих полей  $I$  (или средние квантово-механические значения чисел фотонов  $\langle \hat{n} \rangle$ ). Такие измеряемые значения служат для определения (вычисления) в рамках той или иной теории

значений тригонометрических функций разности фаз полей или квантово-механических средних тригонометрических операторов разности фаз интерферирующих полей, присутствующих в квантовой теории света.

## 2. Измерение квантово-механических средних электромагнитного поля

Сигнал ЭМ поля на выходе оптического интерферометра чувствителен к разности фаз полей, поступающих на его входы. Простейшим примером оптического интерферометра является пассивный светоделитель. Рассмотрим квантовую теорию пассивного светоделителя. На два входа светоделителя поступают квантовые поля, характеризующиеся операторами рождения (уничтожения)  $\hat{a}_1^+(\hat{a}_1)$  и  $\hat{a}_2^+(\hat{a}_2)$ , а также операторами числа фотонов  $\hat{n}_j = \hat{a}_j^+\hat{a}_j$ ,  $j = 1, 2$ . Операторы рождения (уничтожения) для полей, выходящих из светоделителя, при этом обозначим как  $\hat{b}_1^+(\hat{b}_1)$  и  $\hat{b}_2^+(\hat{b}_2)$ , а операторы чисел фотонов:  $\hat{N}_j = \hat{b}_j^+\hat{b}_j$ ,  $j = 1, 2$ . Будем предполагать, что операторы входящего и выходящего полей удовлетворяют следующему коммутационным соотношениям:  $[\hat{a}_i, \hat{a}_j^+] = \delta_{i,j}$ ,  $[\hat{b}_i, \hat{b}_j^+] = \delta_{i,j}$ ,  $i, j = 1, 2$ .

Для чисел фотонов (интенсивностей) входящих и выходящих полей светоделителя выполняется следующее соотношение (сохранение числа фотонов):  $\hat{N}_1 + \hat{N}_2 = \hat{n}_1 + \hat{n}_2$ . Операторы чисел фотонов выходящих полей при выполнении коммутационных условий и сохранении числа фотонов могут быть выражены с помощью операторов входящих полей с использованием

коэффициента пропускания светоделителя  $\tau$  и коэффициента отражения  $\rho = 1 - \tau$ , а также сдвигов фаз пропускания и отражения. В случае равенства сдвигов фаз  $\phi_\tau = \phi_\rho$  операторы чисел фотонов на выходе светоделителя в квантовой теории могут быть записаны в виде

$$\hat{N}_1 = \tau \hat{n}_1 + (1 - \tau) \hat{n}_2 + \sqrt{\tau(1 - \tau)}(\hat{a}_1^+ \hat{a}_2 + \hat{a}_2^+ \hat{a}_1), \quad (1a)$$

$$\hat{N}_2 = (1 - \tau) \hat{n}_1 + \tau \hat{n}_2 - \sqrt{\tau(1 - \tau)}(\hat{a}_1^+ \hat{a}_2 + \hat{a}_2^+ \hat{a}_1). \quad (1b)$$

Если  $\phi_\tau = \phi_\rho + \pi/2$ , то операторы чисел фотонов проходящего и отраженного света есть

$$\hat{N}'_1 = \tau \hat{n}_1 + (1 - \tau) \hat{n}_2 - i\sqrt{\tau(1 - \tau)}(\hat{a}_1^+ \hat{a}_2 - \hat{a}_2^+ \hat{a}_1), \quad (2a)$$

$$\hat{N}'_2 = (1 - \tau) \hat{n}_1 + \tau \hat{n}_2 + i\sqrt{\tau(1 - \tau)}(\hat{a}_1^+ \hat{a}_2 - \hat{a}_2^+ \hat{a}_1). \quad (2b)$$

Выполнение условия  $\phi_\tau = \phi_\rho + \pi/2$  для симметричного светоделителя эффективно достигается путем помещения  $\lambda/4$  — пластины на входе локального осциллятора.

Будем предполагать в дальнейшем, что поле  $\hat{a}_2$  представляет собой сильное классическое поле с точно определенной комплексной амплитудой  $a_{LO}$ :  $\hat{a}_2 \rightarrow a_{LO}$ , в качестве такого поля локального осциллятора (ЛО) может быть использовано поле в когерентном состоянии  $|\alpha_{LO}\rangle$ ,  $|\alpha_{LO}|^2 \gg 1$ . В таких условиях имеем  $\langle \hat{a}_1^+ \hat{a}_2 \rangle = \alpha_{LO} \langle \hat{a}_1^+ \rangle$ ,  $\alpha_{LO} = |\alpha_{LO}| e^{i\phi_{LO}}$ . Таким образом, будем рассматривать схему оптического гомодинирования квантового поля  $\hat{a}_1$  при смешении его с классическим сигналом  $\alpha_{LO}$ . Будем в дальнейшем полагать, что светоделитель симметричен:  $\tau = \rho = 1/2$ . Складывая уравнения (1a) и (2a) и используя условие сохранения числа фотонов  $\hat{N}'_1 + \hat{N}'_2 = \hat{n}_1 + \hat{n}_2 = \hat{N}_1 + \hat{N}_2$ , находим для среднего квантово-механического оператора рождения для любого квантового состояния измеряемого поля, следующее выражение:

$$\langle \hat{a}_1^+ \rangle = \frac{\langle \hat{N}_- \rangle + i \langle \hat{N}'_- \rangle}{2\alpha_{LO}}, \quad (3a)$$

где  $\langle \hat{N} \rangle \equiv \langle \hat{N}_1 \rangle - \langle \hat{N}_2 \rangle$ ,  $\langle \hat{N}' \rangle \equiv \langle \hat{N}'_1 \rangle - \langle \hat{N}'_2 \rangle$ . Аналогично, используя разность уравнений (1a) и (2a) и подставляя соотношение  $\langle \hat{n}_1 \rangle = \langle \hat{N}'_1 \rangle - \langle \hat{N}'_2 \rangle$ , находим

$$\langle \hat{a}_1 \rangle = \frac{\langle \hat{N}_- \rangle - i \langle \hat{N}'_- \rangle}{2\alpha_{LO}^*}. \quad (3b)$$

Операторы рождения/уничтожения поля  $\hat{a}_1^+(\hat{a}_1)$  могут быть записаны с помощью операторов числа фотонов  $\hat{n}_1 \equiv \hat{a}_1^+ \hat{a}_1$  и оператора экспоненты оператора фазы  $e^{i\hat{\phi}}$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= \sqrt{\hat{n}_1 + 1} e^{i\hat{\phi}_1} = e^{i\hat{\phi}_1} \sqrt{\hat{n}_1}, \\ \hat{a}_1^+ &= e^{-i\hat{\phi}_1} \sqrt{\hat{n}_1 + 1} = \sqrt{\hat{n}_1} e^{-i\hat{\phi}_1}, \end{aligned} \quad (4)$$

Будем предполагать в дальнейшем, что квантово-механические средние оператора экспоненты фазы поля удовлетворяют приближенному соотношению

$$\langle \hat{a} \rangle \approx \langle \sqrt{\hat{n} + 1} \rangle \langle e^{i\hat{\phi}} \rangle, \quad \langle \hat{a}^+ \rangle \approx \langle \sqrt{\hat{n} + 1} \rangle \langle e^{-i\hat{\phi}} \rangle, \quad (5)$$

где нижний индекс в записи операторов рождения/уничтожения  $\hat{a}_1^+/\hat{a}_1$ ,  $\hat{n}_1$  и  $\hat{\phi}_1$  опущен, что мы будем делать и в дальнейшем. Приближение (5) предполагает, что операторы  $e^{i\hat{\phi}}$  и  $(\hat{n} + 1)^{1/2}$  слабо коррелированы между собой. Справедливость такого приближения будет исследоваться нами для различных квантовых состояний поля.

Уравнение (3б) в приближении (5) означает, что оператор экспоненты оператора фазы поля есть

$$e^{i\hat{\phi}} \approx \frac{1}{2\alpha_{LO}^* \sqrt{\hat{n} + 1}} (\hat{N}_- - i\hat{N}'_-),$$

а оператор экспоненты относительной фазы поля  $\hat{\phi} - \phi_{LO}$  определяется как

$$e^{i(\hat{\phi} - \phi_{LO})} \approx \frac{1}{2\sqrt{n_{LO}(\hat{n} + 1)}} (\hat{N}_- - i\hat{N}'_-). \quad (6)$$

Из (5) непосредственно следует, что средние тригонометрических операторов относительной фазы поля в этом приближении удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \langle \cos(\hat{\phi} - \phi_{LO}) \rangle &\approx \frac{\langle \hat{N}_- \rangle}{2n_{LO} \langle (\hat{n} + 1)^{1/2} \rangle}, \\ \langle \sin(\hat{\phi} - \phi_{LO}) \rangle &\approx -\frac{\langle \hat{N}'_- \rangle}{2n_{LO} \langle (\hat{n} + 1)^{1/2} \rangle}. \end{aligned} \quad (7)$$

Второе предположение, сделанное нами, состоит в возможности замены оператора  $(\hat{n} + 1)^{1/2}$  на  $(\langle \hat{n} \rangle + 1)^{1/2}$  в выражениях (6) и (7). В рамках такого приближения

$$(\hat{n} + 1)^{1/2} \approx (\langle \hat{n} \rangle + 1)^{1/2}, \quad (8)$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} \langle \cos(\hat{\phi} - \phi_{LO}) \rangle &\approx \frac{\langle \hat{N}_- \rangle}{2n_{LO} (\langle \hat{n} \rangle + 1)^{1/2}}, \\ \langle \sin(\hat{\phi} - \phi_{LO}) \rangle &\approx -\frac{\langle \hat{N}'_- \rangle}{2n_{LO} (\langle \hat{n} \rangle + 1)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

### 3. Сравнение измеряемых средних с теорией эрмитового оператора фазы поля

Согласно теории эрмитова оператора фазы поля  $\hat{\phi}$  [8–14], средние квантово-механические значения операторов поля для любого квантового состояния поля имеют вид

$$\begin{aligned} \langle \hat{a} \rangle_x &= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} \langle x|n \rangle \langle n+1|x \rangle, \\ \langle \hat{a}^+ \rangle_x &= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} \langle x|n+1 \rangle \langle n|x \rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

Используя теорию эрмитова фазового оператора Пегга-Барнетта [8–14] для средних значений операторов  $e^{i\hat{\varphi}}$  и  $\sqrt{\hat{n}+1}$  для произвольного состояния поля находим

$$\langle e^{i\hat{\varphi}} \rangle_x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x|n\rangle \langle n+1|x\rangle, \quad \langle \sqrt{\hat{n}+1} \rangle_x = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} |\langle n|x\rangle|^2. \quad (11)$$

Из (10) и (11) следует, что тригонометрические операторы фазы есть

$$\begin{aligned} \langle e^{i\hat{\varphi}} \rangle_x &= \langle \cos \hat{\varphi} \rangle_x + i \langle \sin \hat{\varphi} \rangle_x, \\ \langle \cos \hat{\varphi} \rangle_x &= \text{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \langle x|n\rangle \langle n+1|x\rangle, \\ \langle \sin \hat{\varphi} \rangle_x &= \text{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \langle x|n\rangle \langle n+1|x\rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

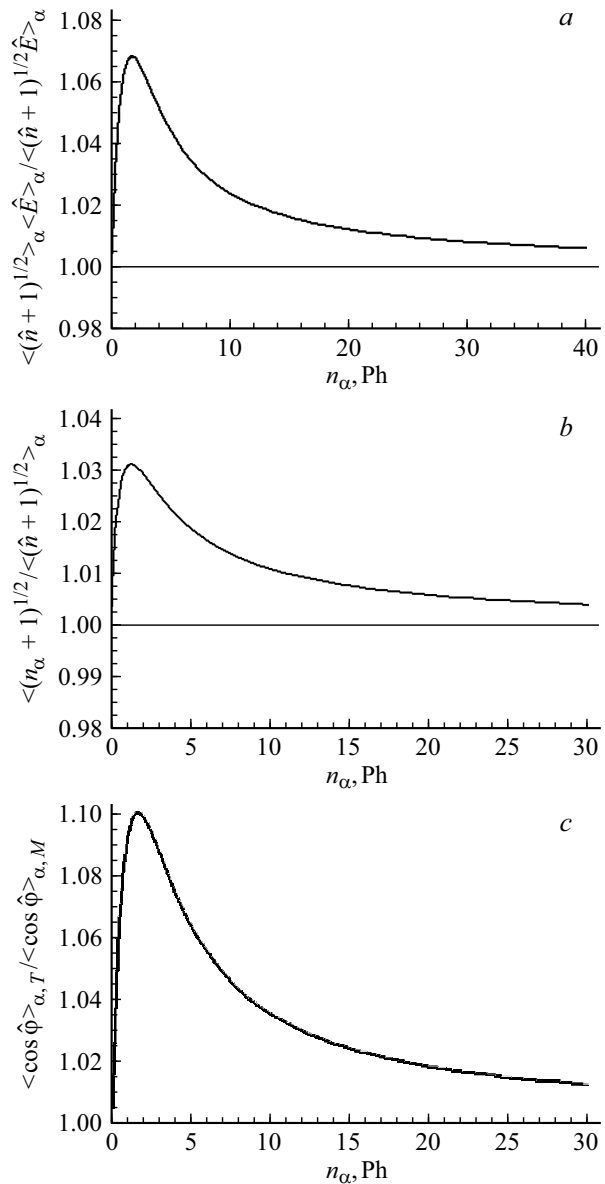
Принимая в дальнейшем для фазы локального осциллятора (классического поля) значение  $\varphi_{LO} = 0$  и используя формулы (7), проведем сравнение результатов квантовой теории Пегга-Барнетта (ПБ) с результатами предлагаемой схемы измерения средних значений тригонометрических операторов фазы поля, проводимых методом балансного оптического гомодинирования. Для этого рассмотрим в качестве квантового состояния измеряемого поля когерентное состояние

$$|\alpha\rangle = e^{-n_\alpha/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad \alpha = \sqrt{n_\alpha} e^{i\varphi_\alpha}, \quad n_\alpha \equiv |\alpha|^2.$$

Исследуем справедливость сделанных нами предположений (5) и (8), служащих для определения измеряемых квантовых средних значений тригонометрических операторов относительной фазы (9), для когерентного состояния поля  $|x\rangle = |\alpha\rangle$ . На рис. 1, *a* показано отношение величины  $\langle \sqrt{\hat{n}+1} \rangle_\alpha \langle e^{i\hat{\varphi}} \rangle_\alpha$  к величине  $\langle \hat{a} \rangle_\alpha = \langle \sqrt{\hat{n}+1} e^{i\hat{\varphi}} \rangle_\alpha$  в зависимости от среднего числа фотонов когерентного состояния:  $0 \leq n_\alpha \leq 10$  для любого значения фазового угла когерентного состояния  $\varphi_\alpha$ . На рисунке видно, что корреляция  $\langle \sqrt{\hat{n}+1} e^{i\hat{\varphi}} \rangle_\alpha$  заметно отличается от произведения средних  $\langle \sqrt{\hat{n}+1} \rangle_\alpha \langle e^{i\hat{\varphi}} \rangle_\alpha$  лишь для малых значений  $n_\alpha$  вблизи 2, и отличие этих двух величин не превышает 7%. При  $n_\alpha > 5$  предположение о слабости корреляции для данных операторов выполняется практически точно для когерентного состояния поля и отличие произведения средних от корреляции составляет менее 1%.

Отношение  $\sqrt{\langle \hat{n} \rangle_\alpha + 1} / \langle \sqrt{\hat{n}+1} \rangle_\alpha$  для тех же значений параметров когерентного состояния поля приведено на рис. 1, *b*. Как видно на рисунке, приближение (8), используемое нами, выполняется с высокой точностью и погрешность не превышает 3% при всех значениях  $n_\alpha$ . Максимальная погрешность наблюдается при  $n_\alpha \approx 1$ .

Таким образом, проведенные расчеты показали, что предположения и приближения, сделанные нами, справедливы для случая когерентного состояния измеряемого поля с высокой точностью. Это означает, что



**Рис. 1.** (а) Зависимость отношения  $\langle \sqrt{\hat{n}+1} e^{i\hat{\varphi}} \rangle_\alpha / \langle \sqrt{\hat{n}+1} \rangle_\alpha \langle e^{i\hat{\varphi}} \rangle_\alpha$  для полей в когерентных состояниях от средних значений числа фотонов  $n_\alpha$  для любого значения фазового угла  $\varphi_\alpha$  когерентного состояния  $|\alpha\rangle$ . (б) Отношение средних значений для  $\langle \sqrt{\hat{n}+1} \rangle_\alpha / \langle \sqrt{\hat{n}+1} \rangle_\alpha + 1$  поля в когерентных состояниях в зависимости от среднего значения числа фотонов  $n_\alpha$  для любого значения фазового угла  $\varphi_\alpha$  когерентного состояния  $|\alpha\rangle$ . (в) Зависимость отношения среднего значения оператора косинуса разности фаз теории ПБ к среднему значению измеряемого оператора фазы  $r(n_\alpha) \equiv \langle \cos \hat{\varphi} \rangle_{\alpha,T} / \langle \cos \hat{\varphi} \rangle_{\alpha,M}$  для когерентного состояния поля  $|\alpha\rangle$  от средних значений числа фотонов  $n_\alpha$  для любого значения фазового угла  $\varphi_\alpha$  когерентного состояния и  $\varphi_{LO} = 0$ . Средние значения измеряемых тригонометрических операторов фазы согласно (9) и (3) есть  $\langle \cos(\hat{\varphi} - \varphi_{LO}) \rangle_{\alpha,M} \equiv \frac{\text{Re}(\hat{a})_\alpha}{(\langle \hat{n} \rangle_\alpha + 1)^{1/2}}$ ,  $\langle \sin(\hat{\varphi} - \varphi_{LO}) \rangle_{\alpha,M} \equiv \frac{\text{Im}(\hat{a})_\alpha}{(\langle \hat{n} \rangle_\alpha + 1)^{1/2}}$ .

измерение средних значений тригонометрических операторов относительных фаз поля хорошо согласуется

с квантовой теорией эрмитова оператора фазы для микроскопических когерентных квантовых полей. На рис. 1, с показана зависимость отношения теоретических значений оператора косинуса фазы к измеряемым средним значениям  $r(n_\alpha) \equiv \langle \cos \hat{\varphi} \rangle_{\alpha, T} / \langle \cos \hat{\varphi} \rangle_{\alpha, M}$  от среднего числа фотонов когерентного состояния поля. Отличие теоретических значений от измеряемых не превышает 10%, максимальное отличие достигается при  $n_\alpha \approx 2.5$ .

Рассмотрим случай, когда измеряемое поле находится в состоянии Фока  $|n\rangle$ . Нетрудно убедиться, что для такого состояния средние значения (10) равны  $\langle \hat{a} \rangle_{n, T} = \langle \hat{a}^+ \rangle_{n, T} = 0$ . Из этого следует, что измеряемые значения средних тригонометрических операторов относительной фазы (9) также равны нулю:  $\langle \cos(\hat{\varphi} - \varphi_{LO}) \rangle_{n, M} = \langle \sin(\hat{\varphi} - \varphi_{LO}) \rangle_{n, M} = 0$ , что соответствует равномерному распределению случайных значений фазы поля от 0 до  $2\pi$ .

С другой стороны, теория ПБ оператора фазы, из которой следуют выражения для средних тригонометрических операторов (12), также указывает на равенство 0 этих квантово-механических средних:  $\langle \cos(\hat{\varphi} - \varphi_{LO}) \rangle_{n, T} = \langle \sin(\hat{\varphi} - \varphi_{LO}) \rangle_{n, T} = 0$ .

В условиях, когда измеряемое поле находится в состояниях „шредингеровского кота“ (SC)  $|\psi_{SC, \pm}\rangle = N_{SC, \pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)$ , можно показать, что  $\langle \hat{a} \rangle_{SC \pm} = \langle \hat{a}^+ \rangle_{SC \pm} = 0$  и измеряемые значения средних операторов косинуса и синуса фазы равны нулю:  $\langle \cos(\hat{\varphi} - \varphi_{LO}) \rangle_{SC \pm, M} = \langle \sin(\hat{\varphi} - \varphi_{LO}) \rangle_{SC \pm, M} = 0$ . Результаты квантовой теории ПБ в рассматриваемом случае точно согласуются с теорией измеряемых тригонометрических операторов, поскольку из формул (12) следует, что  $\langle \cos(\hat{\varphi} - \varphi_{LO}) \rangle_{SC \pm, T} = \langle \sin(\hat{\varphi} - \varphi_{LO}) \rangle_{SC \pm, T} = 0$ .

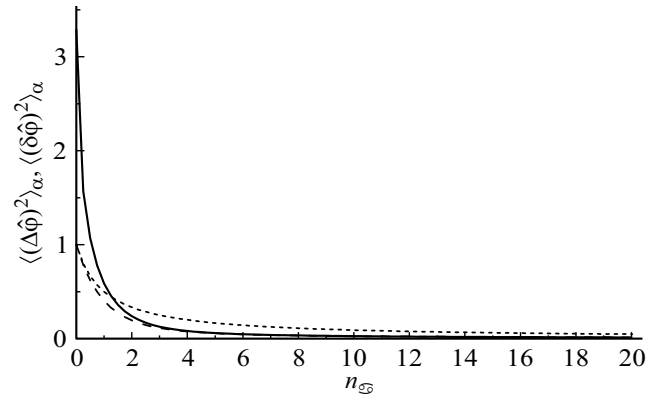
Таким образом, показано, что измерение средних значений тригонометрических операторов фазы, проводимых в рамках рассматриваемой нами схемы балансного гомодинирования света, точно согласуется с теорией ПБ эрмитова оператора фазы в случае состояний Фока, а также состояний „шредингеровского кота“ ЭМ поля.

#### 4. Измерение неопределенностей фазы поля

Предложенная в работе [4] и применяемая в работах [1–3, 5, 6] для интерпретации экспериментальных данных мера неопределенности квантовой фазы (дисперсии оператора фазы) вида

$$\langle (\delta\hat{\varphi})^2 \rangle = 1 - |\langle e^{i\hat{\varphi}} \rangle|^2 = 1 - \langle \cos \hat{\varphi} \rangle^2 - \langle \sin \hat{\varphi} \rangle^2 \quad (13)$$

принимает значение, равное 1, в случаях полной неопределенности фазы в рассматриваемом квантовом состоянии поля и равна 0 для квантовых состояний поля с точно определенной фазой или в классическом пределе близких к 0 флуктуаций (дисперсии) фазы поля. Нетрудно видеть, что величина  $\langle (\delta\hat{\varphi})^2 \rangle$  может служить для оценки неопределенности абсолютной фазы, а также для оценки неопределенности относительной фазы, так



**Рис. 2.** Зависимость меры неопределенности фазы поля  $\langle (\delta\hat{\varphi})^2 \rangle_\alpha$  и дисперсии оператора фазы ПБ  $\langle (\Delta\hat{\varphi})^2 \rangle_\alpha$  для ЭМ поля в когерентном состоянии от среднего числа фотонов  $n_\alpha$  для любого значения фазового угла  $\varphi_\alpha$  когерентного состояния  $|\alpha\rangle$  и  $\varphi_{LO} = 0$ . Штриховая кривая — в формуле (13) для вычисления  $\langle (\delta\hat{\varphi})^2 \rangle_\alpha$  использованы средние измеряемых операторов синуса и косинуса (14); пунктирная кривая — в формуле (13) для вычисления  $\langle (\delta\hat{\varphi})^2 \rangle_\alpha$  использованы средние значения тригонометрических операторов теории ПБ синуса и косинуса (12); сплошная кривая — результаты расчета дисперсии оператора фазы ПБ для поля в когерентном состоянии  $|\alpha\rangle$ .

как не зависит от фазы локального осциллятора  $\varphi_{LO}$ :  $\langle (\delta(\hat{\varphi} - \varphi_{LO}))^2 \rangle = \langle (\delta\hat{\varphi})^2 \rangle$ .

Результаты вычислений дисперсии фазы поля для когерентного состояния поля  $\langle (\Delta\hat{\varphi})^2 \rangle$ , полученные в рамках теории ПБ [8–10], сравниваются нами с мерой неопределенности фазы  $\langle (\delta\hat{\varphi})^2 \rangle$  (13), полученной с помощью формул для средних значений тригонометрических операторов фазы, входящих в (13), и следующих из квантовых теорий ПБ и Сасскинда-Глоговера [11]. Сравнение  $\langle (\delta\hat{\varphi})^2 \rangle$  с теоретическими  $\langle (\Delta\hat{\varphi})^2 \rangle$ , следующих из указанных теорий, проводится нами, в свою очередь, также с использованием соответствующих приближенных значений для средних измеряемых операторов вида (7). На рис. 2 показаны зависимости меры неопределенности фазы поля  $\langle (\delta\hat{\varphi})^2 \rangle_\alpha$  и дисперсии оператора фазы ПБ  $\langle (\Delta\hat{\varphi})^2 \rangle_\alpha$  для ЭМ поля в когерентном состоянии от среднего числа фотонов  $n_\alpha$  для любого значения фазового угла  $\varphi_\alpha$  когерентного состояния  $|\alpha\rangle$  и  $\varphi_{LO} = 0$ . На рисунке видно, что дисперсия фазы в теории ПБ [15, 16] количественно отличается от меры неопределенности  $\langle (\delta\hat{\varphi})^2 \rangle_\alpha$  [4] для малых  $n_\alpha \sim 1$  как для средних тригонометрических операторов фазы (12), входящих в (11), так и для средних измеряемых тригонометрических операторов

$$\langle \cos \hat{\varphi} \rangle_{\alpha, M} \equiv \frac{\text{Re} \langle \hat{a} \rangle_\alpha}{(\langle \hat{n} \rangle_\alpha + 1)^{1/2}}, \quad \langle \sin \hat{\varphi} \rangle_{\alpha, M} \equiv \frac{\text{Im} \langle \hat{a} \rangle_\alpha}{(\langle \hat{n} \rangle_\alpha + 1)^{1/2}}. \quad (14)$$

Отметим, что при  $n_\alpha \gg 1$  флуктуации (дисперсия) и мера неопределенности фазы стремятся к 0. Для состояний ЭМ поля „шредингеровского кота“ мера неопределенности фазы поля  $\langle (\delta\hat{\varphi})^2 \rangle_{SC}$  принимает свое

максимальное значение (как и в случае фоковского состояния поля), равно 1 (11), для любых значений среднего числа фотонов. В то же время, как показано в работе [15], дисперсия фазы поля в состоянии „шредингеровского кота“ убывает с ростом среднего значения числа фотонов  $n_\alpha$  когерентного состояния  $|\alpha\rangle$  и заметно уменьшается от значения  $\langle(\Delta\hat{\varphi})^2\rangle_{SC} = \frac{\pi^2}{3}$  при  $n_\alpha = 0$  до  $\langle(\Delta\hat{\varphi})^2\rangle_{SC} = \frac{\pi^2}{4}$  при  $n_\alpha \gg 1$ . Таким образом, мера неопределенности  $\langle(\delta\hat{\varphi})^2\rangle_{SC}$  может служить лишь для качественной оценки флуктуаций фазы ЭМ поля, находящегося в квантовых состояниях „шредингеровского кота“  $|\psi_{SC,\pm}\rangle = N_{SC,\pm}(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)$ .

## 5. Заключение

Описана процедура измерения среднего значения комплексной амплитуды квантового ЭМ поля. В рамках сделанных приближений показана возможность количественного измерения средних квантово-механических значений тригонометрических операторов фазы поля с использованием схемы балансного оптического гомодинирования, основанного на измерении среднего значения амплитуды ЭМ поля. Исследованы пределы применимости предложенного метода для микроскопических полей в различных квантовых состояниях. Показано, что квантово-механические средние измеряемых тригонометрических операторов фазы с высокой точностью согласуются с теорией эрмитового оператора фазы поля ПБ для когерентного состояния поля и точно совпадают с результатами теории оператора фазы для состояний Фока и состояний „шредингеровского кота“.

## Список литературы

- [1] H. Gerhardt, U. Buhler, G. Lifting. Phys. Lett. A, **49**, 119 (1974).
- [2] H. Gerhardt, H. Welling, D. Frolich. Appl. Phys., **2**, 91 (1973).
- [3] H. Gerhardt, V. Bodecker, H. Welling. Z. Ungew. Physik, **31**, 11 (1971).
- [4] A. Bandilla, H. Paul. Ann. Phys. Lpz., **23**, 323 (1969).
- [5] J.W. Noh, A. Fougères, L. Mandel. Phys. Rev. A, **45**(1), 424 (1992).
- [6] J.W. Noh, A. Fougères, L. Mandel. Phys. Rev. A, **46**(5), 2840 (1992).
- [7] U. Leonhardt, H. Paul. Phys. Rev. A, **47**(4), R2460 (1993).
- [8] S.M. Barnett, D.T. Pegg. J. Mod. Opt., **36**, 7 (1989).
- [9] D.T. Pegg, S.M. Barnett. Phys. Rev. A, **39**, 1665 (1989).
- [10] S.M. Barnett, D.T. Pegg. J. Phys. A, **19**(18), 3849 (1986).
- [11] P. Carruthers, M.M. Nieto. Rev. Mod. Phys., **40**, 411 (1968).
- [12] В.Н. Попов, В.С. Ярунин. Вестник ЛГУ, Сер. Физ., хим., **22**, 7 (1973).
- [13] V.N. Popov, V.S. Yarunin. J. Mod. Opt., **39**(7), 1525 (1992).
- [14] Ю.И. Воронцов. УФН, **172**(8), 907 (2002).
- [15] A.V. Kozlovskii. J. Mod. Opt., **66**(5), 463 (2019).
- [16] A.B. Козловский. Опт. и спектр., **128**(3), 355 (2020). [A.V. Kozlovskii. Opt. Spectr., **128**(3), 368 (2020)].