

03.2;01.1

Восстановление модели теплового процесса по зашумленным данным

© Т.А. Андреева^{1,2}, Н.Ю. Быков^{1,2}, А.К. Климова², А.Я. Лукин¹¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия² Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: nbykov2006@yandex.ru

Поступило в Редакцию 11 апреля 2023 г.

В окончательной редакции 25 мая 2023 г.

Принято к публикации 25 мая 2023 г.

Предложена модификация алгоритма генеративного дизайна модели в виде дифференциального уравнения в частных производных для работы с зашумленными данными. С использованием алгоритма выполнено восстановление модели процесса тепломассообмена по синтетическим данным, полученным методами математического моделирования, и оригинальным экспериментальным данным о нагреве среды затопленным источником тепла. Определены теплофизические параметры среды, показана возможность использования алгоритма для индикации процесса конвекции на основе данных о пространственно-временном распределении температуры.

Ключевые слова: метод генеративного дизайна, управляемая данными модель, уравнение теплопроводности, конвекция.

DOI: 10.21883/PJTF.2023.15.55858.19588

Разработанные к настоящему времени алгоритмы решения обратных задач (ОЗ) в теории теплообмена позволяют восстанавливать по имеющимся данным теплофизические параметры среды (коэффициенты ОЗ), граничные условия (граничные ОЗ), распределения температур в пространственной области в предшествующие моменты времени (ретроспективные ОЗ), вид и параметры функции, описывающей мощность внутренних источников тепла [1,2]. Отдельным направлением решения обратных задач являются методы генеративного дизайна модели (ГДМ) [3]. Методы ГДМ позволяют восстановить структуру математической модели в виде дифференциального уравнения, описывающего физический процесс. Алгоритм ГДМ предполагает, безусловно, и определение значений коэффициентов при производных, а при необходимости и восстановление дополнительных слагаемых дифференциального уравнения. С точки зрения тепловых задач структура классического уравнения теплопроводности хорошо известна. Однако в общем случае уравнение теплопроводности может содержать вторую производную по времени, а также конвективные слагаемые, учитывающие перенос тепла движущейся средой [1,4,5]. Методы ГДМ представляют интерес с точки зрения развития технологий искусственного интеллекта [6], задачей которого может быть восстановление и анализ математической модели теплового процесса по экспериментальным данным, предусматривающий, в частности, выявление скрытых процессов в среде, таких как фазовые переходы и химические реакции, индикацию смены режимов нагрева и пр.

В работах [3,7] предложен алгоритм ГДМ для восстановления модели теплового процесса, основанный на применении процедуры отбора оптимального подмножества элементов [8]. Для синтетических данных без шума указанный подход позволил точно восстановить модель процесса нагрева металла импульсом лазерного излучения. В процессе генерации модели были определены теплофизические параметры среды, в том числе для случая их зависимости от температуры [7]. Однако для данных, содержащих случайную погрешность, предложенный подход не был верифицирован.

Целью настоящей работы является развитие алгоритма ГДМ для работы с зашумленными данными, а также его верификация на синтетических и экспериментальных данных, для чего проведен эксперимент по импульсному нагреву среды затопленным источником тепла и получены оригинальные данные об исследуемом тепловом процессе.

Объектом для восстановления модели в предлагаемой работе является нестационарный процесс нагрева глицерина затопленной константовой проволокой диаметром 0.1 mm, нагреваемой постоянным электрическим током. Экспериментальные и синтетические данные получены для импульса нагрева длительностью 30 s, расстояние до центра проволоки изменялось от 0.6 до 3.1 mm с шагом 0.5 mm. Периодичность получения данных с термопары — 2 ms, случайная погрешность имеет вид аддитивного белого гауссова шума со стандартным отклонением 0.025 K. Измерения проводились для двух значений объемной мощности тепловыделения в проволоке: 0.38 и 1.83 W/mm³.

Процесс нагрева среды в общем случае описывается уравнением вида [1]:

$$c\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T\right) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + Q_V, \quad (1)$$

где t — время, T — температура, ρ , c , λ — плотность, теплоемкость и коэффициент теплопроводности, \mathbf{v} — скорость среды, Q_V — объемные источники тепла. При генерации синтетических данных предполагалось, что конвективное движение среды отсутствует ($\mathbf{v} = 0$) и задача сводится к одномерной постановке. Для глицерина такое предположение справедливо на начальном этапе процесса при условии малого перегрева среды [9]. В исследуемом температурном диапазоне коэффициент температуропроводности глицерина изменяется слабо (в пределах 1.5%). Теплофизические параметры константа и глицерина [10–12] полагались постоянными.

Расчет выполнен методом конечных разностей с использованием схемы Кранка–Николсона с шагом по времени $\tau = 2$ ms. Перегрев среды $T_p = T - T_0$ (T_0 — начальная температура среды) для мощности теплового источника $Q_V = 0.38$ W/mm³ приведен на рис. 1. При подготовке синтетических данных для применения алгоритма ГДМ к результатам расчета добавлялся гауссов шум со среднеквадратическим отклонением $\sigma = 0.025$ K и границами розыгрыша значения (-3σ ; $+3\sigma$). Следует отметить, что уровень шума достаточно высокий: примерно 1% от величины максимального перегрева для локации 0.6 mm и 7% для локации 3.1 mm.

В экспериментальной установке константовая проволока диаметром 0.1 mm и длиной 46 mm располагалась в заполненной глицерином кювете. Измерение температуры производилось вдоль вертикальной линии, проходящей через центр проволоки, с помощью термопары, установленной на кронштейне устройства позиционирования. Сигнал термопары считывался с помощью специализированного аналого-цифрового преобразователя ADS1220 производства Texas Instruments и передавался на компьютер с периодом опроса 2 ms.

Экспериментальные данные приведены на рис. 2. Максимальный перегрев в точке 0.6 mm составляет около 2.5 K для 0.38 W/mm³ и 11 K для 1.83 W/mm³. В первом случае процесс конвекции является слабым, что подтверждает выводы работы [9]. Во втором наблюдается существенное расхождение измеренных температур среды снизу и сверху от проволоки, что свидетельствует о развитом процессе конвекции.

В алгоритме ГДМ [3,7] восстановление неизвестной структуры уравнения по имеющимся данным начинается с полного возможного шаблона искомого уравнения. Для одномерной задачи прогрева среды с постоянными теплофизическими параметрами шаблон уравнения энергии в цилиндрической системе координат записывается как [1]:

$$a_0 \frac{\partial T}{\partial t} + a_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + a_2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + a_3 \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0. \quad (2)$$

По сравнению с (1) в данном шаблоне присутствует вторая производная температуры по времени, появление которой возможно при протекании высокоинтенсивных нестационарных процессов. Коэффициенты a_i в уравнении можно отождествить со следующими параметрами уравнения (1): $a_0 = -1$, $a_1 = -\tau_{rx}$ (τ_{rx} — время релаксации), $a_2 = a_t = \lambda/(c\rho)$ (a_t — коэффициент температуропроводности), при отсутствии конвекции $a_2 = a_t$. При наличии конвективного движения среды задача уже не может рассматриваться в одномерной постановке. Ввиду симметрии вдоль вертикали, для которой получены экспериментальные данные, конвективное слагаемое имеет только радиальную компоненту $a_3(r, v_r) = a_t - r v_r$ (v_r — радиальная составляющая скорости среды). Теплопроводность в поперечном направлении присутствует, но ее возможный вклад в уравнение (2) $\frac{a_t}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}$ (здесь φ — азимутальный угол) значительно меньше, чем у остальных слагаемых. Рассматриваемый шаблон не содержит внутреннего источника тепла, так как данные для восстановления не включают локацию проволоки. Наличие шума в данных, замена производных в уравнении (2) конечными разностями и конвекция, имевшая место в реальном эксперименте, приводят к появлению в правой части уравнения (2) дополнительного постоянного слагаемого α , играющего роль интегральной невязки.

Следует отметить, что работа преследует цель восстановления уравнения процесса по минимальному количеству данных. При наличии полных данных о пространственном распределении температур среды $T(r, \varphi)$ и поля скоростей для случая преобладающей конвекции предложенный подход можно использовать для восстановления полной системы уравнений движения среды, включая уравнение сохранения импульса с учетом наличия силы гравитации.

После формирования возможного потенциального шаблона уравнения в предложенном подходе по исходным синтетическим или экспериментальным данным вычисляются векторы, содержащие конечно-разностные шаблоны членов уравнения (2). Затем применяется процедура отбора оптимального подмножества членов уравнения (2) [8], позволяющая отсеять малозначимые слагаемые и определить необходимые коэффициенты. Оптимальная модель выбирается с использованием информационного критерия Байеса (BIC) [8,13].

Применение алгоритма [7] требует задания пространственного и временного шагов численного дифференцирования. Пространственный шаг численного дифференцирования соответствует расстоянию между точками для измерения температуры, во всех экспериментах он был равен 0.5 mm. Данный шаг существенно превышает шаг, используемый при генерации синтетических данных. Шаг по времени в экспериментах равен 2 ms. Результаты применения метода ГДМ при выборе такого шага для численного дифференцирования приведены в таблице. И для синтетических, и

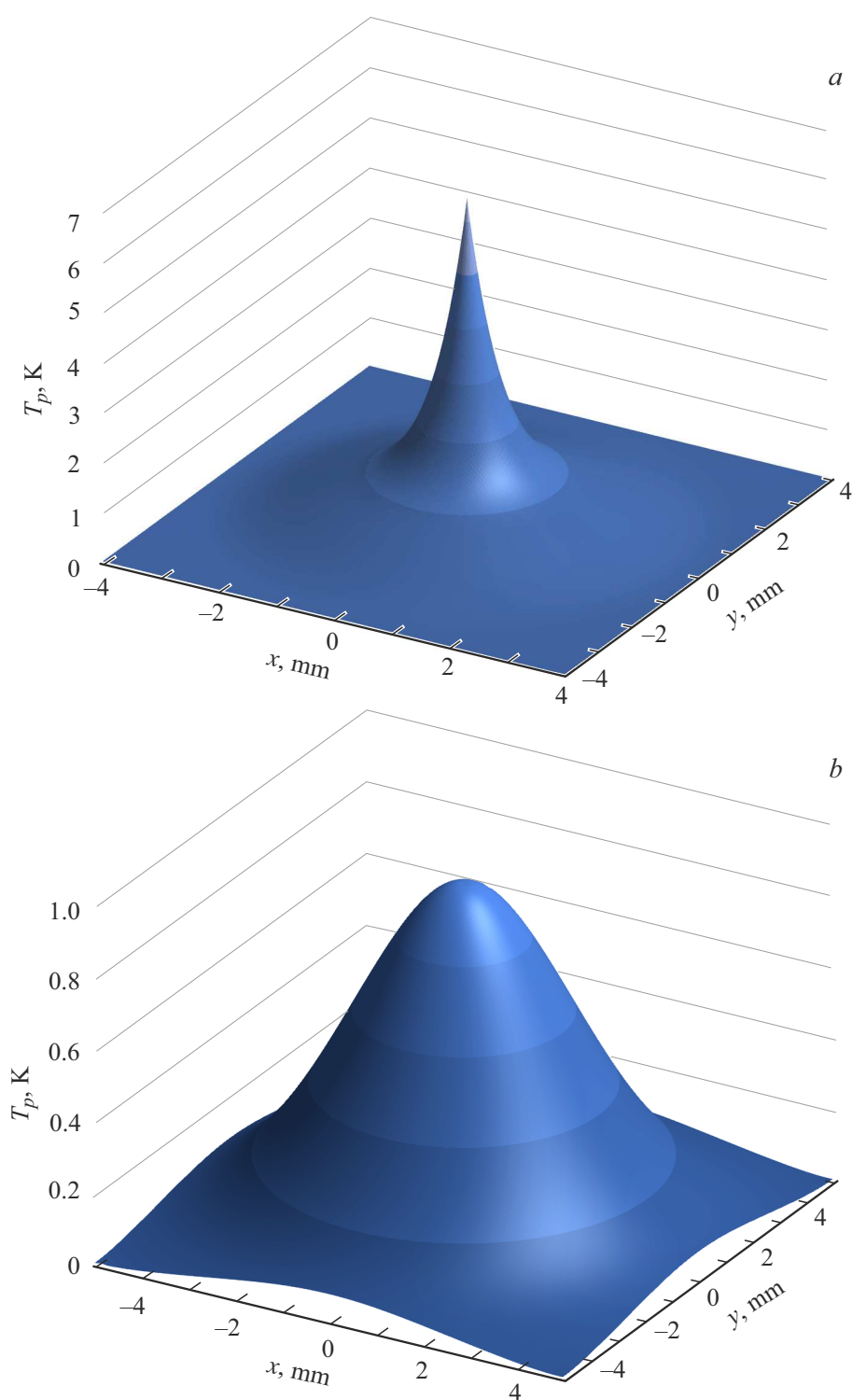


Рис. 1. Распределение температуры для момента окончания нагрева (a) и спустя 15 s (b). $Q_V = 0.38 \text{ W/mm}^3$. Проволока расположена вдоль оси z .

для экспериментальных данных алгоритм неправильно восстанавливает структуру уравнения, которая должна включать первую производную температуры по радиальной координате. Значение коэффициента температуропроводности a_t для случая малой мощно-

сти нагрева восстанавливается с погрешностью более 50%.

С целью регуляризации работы алгоритма предлагается увеличить величину временного шага для численного дифференцирования. Приблизительно необходимую вели-

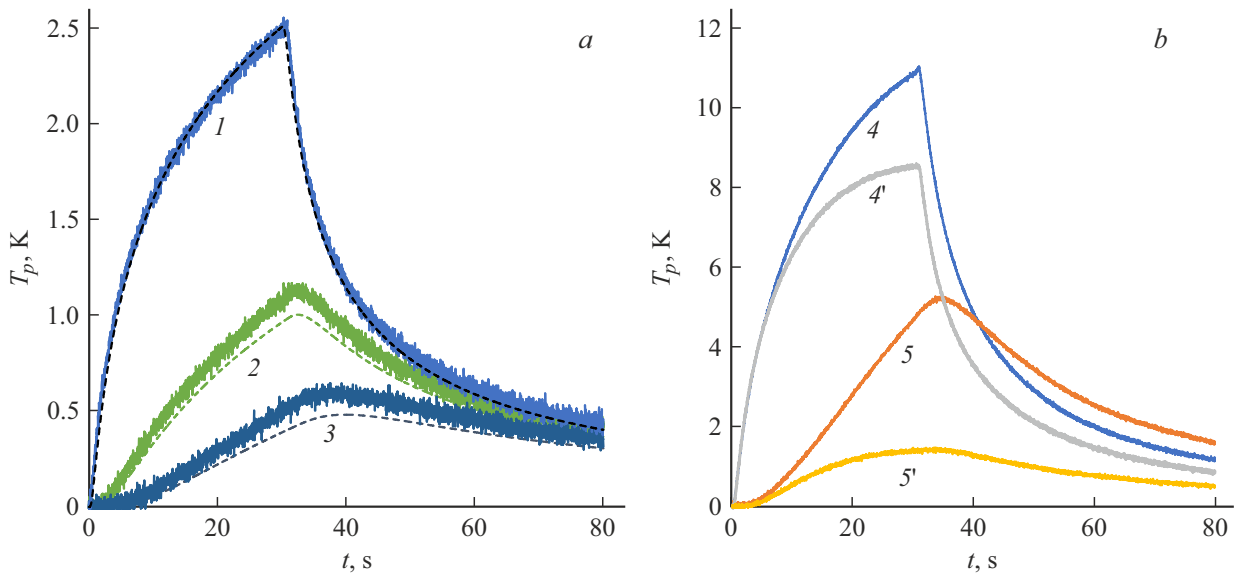


Рис. 2. Экспериментальные зависимости температуры от времени в точках $r = 0.6$ (1), 1.6 (2), 2.6 mm (3) над проволокой для $Q_V = 0.38$ W/mm³ (a) и $r = 0.6$ (4, 4') и 2.6 mm (5, 5') для $Q_V = 1.83$ W/mm³ над (4, 5) и под (4', 5') проволокой (b). Штриховые линии — расчет без учета конвекции, $t = 0$ соответствует началу нагрева.

чину временного шага можно оценить согласно [2]:

$$\tau_{reg,1} = \frac{2\sigma}{\varepsilon_1}, \quad \tau_{reg,2} = \left(\frac{4\sigma}{\varepsilon_2}\right)^{1/2}. \quad (3)$$

Здесь ε_1 и ε_2 — абсолютные погрешности первой и второй производных температуры по времени. Предполагается, что шаг должен быть больше $\tau_{reg,1}$ и $\tau_{reg,2}$, но при этом много меньше характерного времени процесса. Кроме того, необходимо учитывать увеличение погрешности при численном дифференцировании с ростом шага.

Результаты вычисления первой и второй производных по времени для точек 0.6 и 2.1 mm показывают, что максимальное значение производной $D_{1,T} = (dT/dt)_{\max}$ составляет 0.33 K/s. Полагая $\varepsilon_1 = \delta_1 D_{1,T}$ и выбирая относительную погрешность $\delta_1 = 0.1$, из (3) получаем для $\sigma = 0.025$ K $\tau_{reg,1} \approx 1.5$ s. Максимальное значение производной $D_{2,T} = (d^2T/dt^2)_{\max}$ составляет 0.85 K/s². Полагая $\varepsilon_2 = \delta_2 D_{2,T}$ и $\delta_2 = 0.1$, получаем $\tau_{reg,2} \approx 1.1$ s. Меньшие значения погрешности ε_1 и ε_2 приводят к большим значениям τ_{reg} .

Регуляризация позволяет существенно улучшить результаты работы алгоритма (см. таблицу). Начиная с величины временного шага 0.2 s правильно воспроизводится структура уравнения, которая не включает вторую производную температуры по времени и включает первую производную по радиальной координате. Для синтетических данных оптимальной величиной временного шага является 5 s. Коэффициент температуропроводности a_t восстанавливается с погрешностью 12% .

Для экспериментальных данных с $Q_V = 0.38$ W/mm³ увеличение временного шага также ведет к правильному восстановлению структуры модели. Для шага $\tau_{reg} = 5$ s

погрешность восстановления a_t составляет 20% . Для эксперимента с $Q_V = 1.83$ W/mm³ величина перегрева в 4 раза выше, а относительная погрешность определения температуры в 4 раза меньше, поэтому a_t восстанавливается с меньшей погрешностью. Минимальная погрешность 5% соответствует временным шагам численного дифференцирования 0.2 и 1 s.

„Одномерная“ модель, сгенерированная по данным о распределении температуры вдоль вертикальной линии, включающей центр проволоки (линии симметрии), может использоваться для индикации наличия конвекции в среде. Для синтетических данных коэффициенты a_2 и a_3 отличаются мало, а интегральная невязка α мала. В эксперименте с $Q_V = 0.38$ W/mm³ присутствует слабая конвекция, и восстановленные коэффициенты a_2 и a_3 отличаются на 35% , α мало отличается от случая без конвекции. Для $Q_V = 1.83$ W/mm³ значения a_2 и a_3 отличаются в 6 раз, а интегральная невязка возрастает на порядок. Можно утверждать, что в данном случае конвекция играет существенную роль. Следует отметить, что выводы относительно наличия и интенсивности конвекции могут быть сделаны без измерений поля скорости среды на основе применения метода ГДМ к данным о пространственном распределении температуры.

Таким образом, предложенный ранее алгоритм ГДМ развит для работы с зашумленными данными. В рассмотренной модификации алгоритма временной и пространственной шага при численном дифференцировании подбираются в зависимости от уровня шума исходных данных. Для апробации алгоритма проведены эксперименты с нагревом среды затопленным источником тепла. На примере работы с зашумленными синтетическими и

Результаты восстановления модели по зашумленным данным

Вариант	τ_{reg}, s	$\alpha \cdot 10^3, K/s$	$a_2 \cdot 10^2, mm^2/s$	$\delta a_2, \%$	$a_3 \cdot 10^2, mm^2/s$
Теория					
		0	9.263	0	9.263
Результаты восстановления модели по синтетическим данным					
1	0.002	-6.025	3.457	62.6	—
2	0.02	-6.568	3.584	61.3	—
3	0.2	-1.542	6.886	25.7	6.188
4	1	-1.467	7.057	23.8	6.446
5	2	-1.849	6.799	26.9	6.0523
6	5	-1.451	8.171	11.8	8.072
7	10	-5.373	6.880	25.7	—
Результаты восстановления модели по экспериментальным данным (0.38 W/mm ³)					
8	0.002	-6.283	4.547	50.9	—
9	0.02	-6.700	4.590	50.4	—
10	0.2	-2.095	7.131	23.0	4.608
11	1	-2.190	6.832	26.2	4.374
12	2	-2.312	7.000	24.4	4.502
13	5	-1.863	7.261	21.6	4.809
14	10	1.568	8.984	3.0	7.674
Результаты восстановления модели по экспериментальным данным (1.83 W/mm ³)					
15	0.002	-43.47	8.054	13.0	—
16	0.02	-42.89	8.005	13.6	—
17	0.2	-40.29	8.818	4.8	1.354
18	1	-39.90	8.813	4.9	1.425
19	2	-44.59	8.074	12.8	—
20	5	-44.14	7.951	14.2	—
21	10	-47.00	7.846	15.3	—

Примечание. Коэффициент при второй производной по времени $a_1 = 0$ во всех случаях и в таблице не приводится.

экспериментальными данными показана эффективность применения алгоритма ГДМ для восстановления структуры модели в виде дифференциального уравнения в частных производных и определения теплофизических параметров среды. Продемонстрирована возможность применения метода ГДМ для индикации наличия специальных режимов теплообмена.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00296 (<https://rscf.ru/project/21-11-00296/>).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич, *Вычислительная теплопередача* (Едиториал УРСС, М., 2003). [A.A. Samarskii, P.N. Vabishevich, *Computational heat transfer* (Wiley, Chichester, 1995).]
- [2] А.О. Вагудьян, *Коэффициентные обратные задачи механики* (Физматлит, М., 2019).
- [3] Н.Ю. Быков, А.А. Хватов, А.В. Калужная, А.В. Бухановский, Письма в ЖТФ, **47** (24), 9 (2021). DOI: 10.21883/PJTF.2021.24.51790.18967 [N.Y. Bykov, A.A. Hvatov, A.V. Kalyuzhnaya, A.V. Boukhanovsky, *Tech. Phys. Lett.*, **48** (15), 50 (2022). DOI: 10.21883/TPL.2022.15.55281.18967].
- [4] А.В. Лыков, *Теория теплопроводности* (Высш. шк., М., 1967).
- [5] А.И. Жмакин, ЖТФ, **91** (1), 5 (2021). DOI: 10.21883/JTF.2021.01.50267.207-20 [A.I. Zhmakin, *Tech. Phys.*, **66** (1), 1 (2021). DOI: 10.1134/S1063784221010242].
- [6] F. Hutter, L. Kotthoff, J. Vanschoren, *Automated machine learning. Methods, systems, challenges* (Springer, Cham, Switzerland, 2019). DOI: 10.1007/978-3-030-05318-5
- [7] Н.Ю. Быков, Науч.-техн. ведомости СПбГПУ. Физ.-мат. науки, **15** (3), 83 (2022). DOI: 10.18721/JPM.15307
- [8] Г. Джеймс, Д. Уиттон, Т. Хасты, Р. Тибширани, *Введение в статистическое обучение с примерами на языке R* (ДМК Пресс, М., 2017). [G. James, D. Witten, T. Hastie, R. Tibshirani, *An introduction to statistical learning: with applications in R* (Springer, N.Y., 2013). DOI: 10.1007/978-1-4614-7138-7].

- [9] Б.Г. Манухин, М.Е. Гусев, Д.А. Кучер, С.А. Чивилихин, О.В. Андреева, *Оптика и спектроскопия*, **119** (3), 418 (2015). [B.G. Manukhin, M.E. Gusev, D.A. Kucher, S.A. Chivilikhin, O.V. Andreeva, *Opt. Spectrosc.*, **119** (3), 392 (2015). DOI: 10.1134/S0030400X15090180].
- [10] Н.Б. Варгафтик, *Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей* (Наука, М., 1972). [N.B. Vargaftik, *Handbook of physical properties of liquids and gases* (Springer, Berlin–Heidelberg, 1975).
- [11] В.А. Рабинович, З.Я. Хавин, *Краткий химический справочник* (Химия, Л., 1972).
- [12] *Физические величины: справочник*, под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова (Энергоатомиздат, М., 1991).
- [13] М.В. Priestley, *Spectral analysis and time series* (Academic Press, London, 1981).