

01.5

Возможность количественного определения границы обобщенной синхронизации при помощи методов ближайших соседей и фазовых трубок

© О.И. Москаленко^{1,2}, О.А. Кириллов^{1,2}¹ Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия² Региональный научно-образовательный математический центр „Математика технологий будущего“, Саратов, Россия

E-mail: o.i.moskalenko@gmail.com

Поступило в Редакцию 5 мая 2023 г.

В окончательной редакции 24 июня 2023 г.

Принято к публикации 10 июля 2023 г.

Установлена возможность количественного определения границы обобщенной синхронизации в двух взаимно связанных системах с различной топологией аттрактора при помощи методов ближайших соседей и фазовых трубок. Полученные результаты сопоставлены с результатами расчета спектра показателей Ляпунова для взаимодействующих систем. Проведена оценка точности определения границы обобщенной синхронизации в сравнении с известными методами и подходами. Полученные результаты проиллюстрированы на примере систем Ресслера, осцилляторов Лоренца, генераторов Чуа и Кияшко–Пиковского–Рабиновича.

Ключевые слова: обобщенная синхронизация, взаимно связанные системы, спектр показателей Ляпунова, метод ближайших соседей, метод фазовых трубок.

DOI: 10.21883/PJTF.2023.17.56087.19622

Обобщенная синхронизация является одним из интересных типов синхронного поведения, активно изучаемых в последнее время [1–4]. Изначально этот режим был обнаружен только для однонаправленно связанных систем [5], а позднее понятие обобщенной синхронизации было расширено на взаимно связанные системы и сети связанных нелинейных элементов [6]. Во всех случаях под обобщенной синхронизацией понимают установление функционала между состояниями взаимодействующих систем [7], а для диагностики этого режима используют метод расчета спектра показателей Ляпунова [8], метод вспомогательной системы [9], метод ближайших соседей [5] или метод фазовых трубок [7].

Каждый из перечисленных выше методов обладает своими достоинствами и недостатками. Например, метод вспомогательной системы позволяет довольно точно диагностировать наступление обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах с явно заданным оператором эволюции, а также используется относительно часто для определения характеристик перемежающегося поведения, имеющего место вблизи границы этого режима [2,10]. В то же время он оказывается абсолютно неприменимым для диагностики этого режима в системах с взаимным типом связи [11].

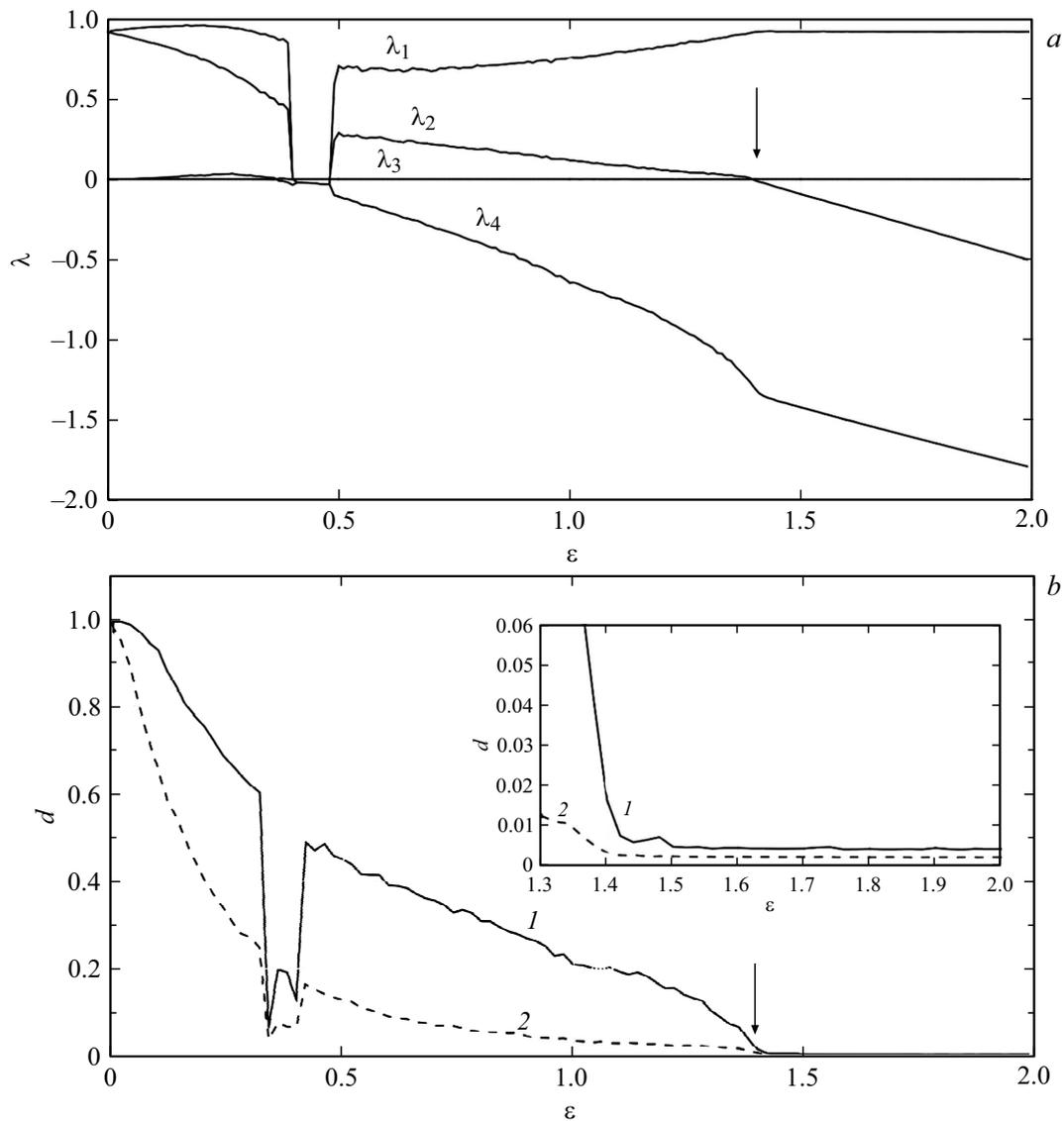
Метод расчета спектра показателей Ляпунова работает одинаково эффективно и в случае однонаправленной, и в случае взаимной связи между системами, но лишь в том случае, если уравнения, описывающие динамику взаимодействующих систем, заданы в явном виде. При неизвестном операторе эволюции (например, в случае анализа экспериментальных временных рядов) оценка показателей Ляпунова, отвечающих за установление

обобщенной синхронизации, оказывается проблематичной [12], так же как и создание идентичной копии временного ряда, соответствующего вспомогательной системе, для диагностики обобщенной синхронизации при помощи метода вспомогательной системы [13].

Два других упомянутых метода (метод ближайших соседей и метод фазовых трубок), напротив, не являются точными, однако они позволяют достаточно легко определить факт наличия обобщенной синхронизации по экспериментальным временным рядам, абсолютно не принимая во внимания тип связи между взаимодействующими системами. Как правило, при диагностике обобщенной синхронизации при помощи метода ближайших соседей задают несколько опорных состояний в фазовом пространстве первой системы, ищут их ближайших соседей и их образы в фазовом пространстве второй системы [5,6]. Если образы ближайших соседей оказываются разбросанными по всему аттрактору второй системы, обобщенная синхронизация между взаимодействующими системами отсутствует. Если же они оказываются сосредоточенными в ограниченных областях аттрактора, сопоставимыми с расположением самих ближайших соседей, то обобщенная синхронизация между системами наблюдается.

Для количественной оценки степени близости состояний взаимодействующих систем традиционно используется следующая характеристика [14]:

$$d = \frac{1}{N\delta} \sum_{k=0}^{N-1} \|u_k - u_{kn}\|, \quad (1)$$



Зависимости четырех старших показателей Ляпунова (*a*) и количественной меры d (*b*) от параметра связи ε , полученные для двух взаимно связанных систем Лоренца. Кривая 1 на части *b* соответствует результатам применения метода ближайших соседей, кривая 2 — методу фазовых трубок (длина фазовой трубки $T = 25$). Стрелкой на обеих частях отмечен порог обобщенной синхронизации. На вставке (часть *b*) показан его увеличенный фрагмент.

где N — число опорных состояний, δ — среднее расстояние между состояниями одной из рассматриваемых систем, x_k — опорные состояния этой системы, x_{kn} — их ближайшие соседи, u_k и u_{kn} — образы x_k и x_{kn} в фазовом пространстве другой системы соответственно. Она близка к единице, если взаимодействующие системы находятся в асинхронном режиме, и принимает значения, близкие к нулю, в режиме обобщенной синхронизации.

Метод фазовых трубок отличается от метода ближайших соседей лишь самой процедурой поиска ближайших соседей. Если в первом случае ближайшими считаются те соседи, которые находятся на расстоянии, не превышающем заданную величину, только в конкретный момент времени, то в методе фазовых трубок близкими считаются только те состояния, которые будут

оставаться близкими в течение определенного интервала времени, называемого длительностью предыстории или длиной фазовой трубки. Принципиальным достоинством этого метода по сравнению с методом ближайших соседей является возможность точного определения наличия функционала между состояниями взаимодействующих систем [7], а также его работоспособность в системах со сложной (двулистной) топологией аттрактора, где диагностика обобщенной синхронизации при помощи метода ближайших соседей приводит к некорректным результатам [15].

Количественная оценка степени близости состояний взаимодействующих систем, полученная при помощи метода фазовых трубок, в литературе, как правило, не рассматривается. В то же время очевидно, что тот

Таблица 1. Уравнения и значения управляющих параметров исследуемых систем

Исследуемая система	Уравнения	Значения параметров
Системы Ресслера	$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= \omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2}) \\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2} \\ \dot{z}_{1,2} &= b + z_{1,2}(x_{1,2} - c) \end{aligned}$	$a = 0.15, b = 0.2, c = 10, \omega_1 = 1.00$ $\omega_2 = 0.98$
Системы Лоренца	$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= \sigma(y_{1,2} - x_{1,2}) \\ \dot{y}_{1,2} &= x_{1,2}(r_{1,2} - z_{1,2}) - y_{1,2} + \varepsilon(y_{2,1} - y_{1,2}) \\ \dot{z}_{1,2} &= x_{1,2}y_{1,2} - bz_{1,2} \end{aligned}$	$\sigma = 10, r_1 = 28.0, r_2 = 28.1, b = 8/3$
Генераторы Чуа	$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= c_1(y_{1,2} - x_{1,2} - g(x_{1,2})) \\ \dot{y}_{1,2} &= c_2(x_{1,2} - y_{1,2} + z_{1,2}) + \varepsilon(y_{2,1} - y_{1,2}) \\ \dot{z}_{1,2} &= -c_3y_{1,2} \end{aligned}$	$c_1 = 15.6, c_2 = 1.0, c_3 = 25.580,$ $g(x) = m_1x + \frac{m_0 - m_1}{2}(x + 1 - x - 1)$
Генераторы Кияшко-Пиковского-Рабиновича	$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= \omega_{1,2}(h(x_{1,2} - \varepsilon(y_{2,1} - y_{1,2})) + y_{1,2} - z_{1,2}) \\ \dot{y}_{1,2} &= -x_{1,2} + \varepsilon(y_{2,1} - y_{1,2}) \\ \dot{z}_{1,2} &= (x_{1,2} - f(z_{1,2}))/m \end{aligned}$	$h = 0.2, m = 0.1, \omega_1 = 1.07, \omega_2 = 1.04,$ $f(x) = -x + 0.002 \sinh(5x - 7.5) + 2.9$

Таблица 2. Границы обобщенной синхронизации, полученные методом расчета спектра показателей Ляпунова, ближайших соседей и фазовых трубок для исследуемых систем

Исследуемая система	Метод расчета спектра показателей Ляпунова	Метод ближайших соседей		Метод фазовых трубок	
		Граница	Точность	Граница	Точность
Системы Ресслера	0.104	0.116	0.115	0.116	0.115
Системы Лоренца	1.4	1.44	0.029	1.4	0
Генераторы Чуа	1.04	0.92	0.115	0.9	0.135
Генераторы Кияшко-Пиковского-Рабиновича	0.06	0.088	0.467	0.08	0.333

же самый критерий (расчет меры d , определяемой выражением (1)) может использоваться и при диагностике обобщенной синхронизации при помощи метода фазовых трубок, за тем лишь исключением, что, как отмечалось выше, алгоритм поиска ближайших соседей в данном случае должен быть другим.

Важно отметить, что методы ближайших соседей и фазовых трубок во многом схожи с методом построения рекуррентных диаграмм (см., например, [16,17]). Этот метод находит применение при анализе экспериментальных временных рядов различной природы, в том числе с точки зрения диагностики по ним различных типов хаотической синхронизации. Для проверки наличия обобщенной синхронизации нужно построить как рекуррентные диаграммы для каждой из взаимодействующих систем, так и совместную рекуррентную диаграмму для обеих систем при каждом значении параметра связи между системами. Вопрос об определении порога возникновения обобщенной синхронизации при помощи этого метода в литературе, как правило, не обсуждается.

В настоящей работе впервые предпринята попытка количественного определения порога обобщенной синхронизации во взаимно связанных системах с различной

топологией аттрактора при помощи методов ближайших соседей и фазовых трубок. В качестве примеров таких систем рассмотрены системы Ресслера и Лоренца, а также генераторы Чуа и Кияшко-Пиковского-Рабиновича, уравнения и значения управляющих параметров которых представлены в табл. 1. Значения управляющих параметров выбраны таким образом, чтобы все взаимодействующие системы находились в хаотическом режиме, при этом в системах Ресслера и генераторах Кияшко-Пиковского-Рабиновича наблюдался режим ленточного хаоса, а в системах Лоренца и генераторах Чуа аттракторы характеризовались двулистной структурой. Для диагностики обобщенной синхронизации наряду с методами ближайших соседей и фазовых трубок использовался также метод расчета спектра показателей Ляпунова.

В качестве иллюстрации на рисунке приведены зависимости четырех старших показателей Ляпунова и количественной меры d от параметра связи ε , полученные для двух взаимно связанных систем Лоренца. Видно, что при $\varepsilon = 1.4$ второй по старшинству показатель Ляпунова переходит в область отрицательных значений, что соответствует установлению обобщенной

синхронизации в исследуемой системе. Примерно при том же значении параметра связи зависимости $d(\varepsilon)$, рассчитанные при помощи метода ближайших соседей и метода фазовых трубок, выходят на уровень насыщения, причем величина этого уровня оказывается достаточно большой для метода ближайших соседей и практически равной нулю при использовании метода фазовых трубок.

Схожие результаты демонстрируют и другие системы. Для иллюстрации этого в табл. 2 приведены границы режима обобщенной синхронизации, рассчитанные для всех названных выше систем упомянутыми методами. Видно, что несмотря на то что численные значения порогов установления синхронного режима немного отличаются друг от друга, эти отличия оказываются незначительными, особенно в случае метода фазовых трубок, что свидетельствует о возможности применения данных подходов не только для качественного, но и для количественного определения границы обобщенной синхронизации.

Финансирование работы

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых и по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (проект № МД-18.2022.1.2).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] N. Frolov, V. Maksimenko, A. Litjohann, A. Koronovskii, A. Hramov, *Chaos*, **29** (9), 091101 (2019). DOI: 10.1063/1.5117263
- [2] A.A. Koronovskii, O.I. Moskalenko, A.A. Pivovarov, V.A. Khanadeev, A.E. Hramov, A.N. Pisarchik, *Phys. Rev. E*, **102** (1), 012205 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevE.102.012205
- [3] J. Liu, G. Chen, X. Zhao, *Fractals*, **29** (04), 2150081 (2021). DOI: 10.1142/S0218348X2150081X
- [4] О.И. Москаленко, А.А. Короновский, А.О. Сельский, Е.В. Евстифеев, *Письма в ЖТФ*, **48** (2), 3 (2022). DOI: 10.21883/PJTF.2022.02.51910.18985 [O.I. Moskalenko, A.A. Koronovskii, A.O. Selskii, E.V. Evstifeev, *Tech. Phys. Lett.*, **48** (1), 45 (2022). DOI: 10.21883/TPL.2022.01.52468.18985].
- [5] N.F. Rulkov, M.M. Sushchik, L.S. Tsimring, H.D.I. Abarbanel, *Phys. Rev. E*, **51** (2), 980 (1995). DOI: 10.1103/PhysRevE.51.980
- [6] O.I. Moskalenko, A.A. Koronovskii, A.E. Hramov, S. Boccaletti, *Phys. Rev. E*, **86** (3), 036216 (2012). DOI: 10.1103/PhysRevE.86.036216
- [7] A.A. Koronovskii, O.I. Moskalenko, A.E. Hramov, *Phys. Rev. E*, **84** (3), 037201 (2011). DOI: 10.1103/PhysRevE.84.037201
- [8] K. Pyragas, *Phys. Rev. E*, **56** (5), 5183 (1997). DOI: 10.1103/PhysRevE.56.5183
- [9] H.D.I. Abarbanel, N.F. Rulkov, M. Sushchik, *Phys. Rev. E*, **53** (5), 4528 (1996). DOI: 10.1103/PhysRevE.53.4528
- [10] A.E. Hramov, A.A. Koronovskii, *Europhys. Lett.*, **70** (2), 169 (2005). DOI: 10.1209/epl/i2004-10488-6
- [11] O.I. Moskalenko, A.A. Koronovskii, A.E. Hramov, *Phys. Rev. E*, **87** (6), 064901 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevE.87.064901
- [12] A. Wolf, J. Swift, H.L. Swinney, J. Vastano, *Physica D*, **16** (3), 285 (1985). DOI: 10.1016/0167-2789(85)90011-9
- [13] A. Uchida, R. McAllister, R. Meucci, R. Roy, *Phys. Rev. Lett.*, **91** (17), 174101 (2003). DOI: 10.1103/PhysRevLett.91.174101
- [14] U. Parlitz, L. Junge, W. Lauterborn, L. Kocarev, *Phys. Rev. E*, **54** (2), 2115 (1996). DOI: 10.1103/PhysRevE.54.2115
- [15] О.И. Москаленко, В.А. Ханадеев, А.А. Короновский, *Письма в ЖТФ*, **44** (19), 87 (2018). DOI: 10.21883/PJTF.2018.19.46687.17391 [O.I. Moskalenko, V.A. Khanadeev, A.A. Koronovskii, *Tech. Phys. Lett.*, **44** (10), 894 (2018). DOI: 10.1134/S1063785018100115].
- [16] N. Marwan, M. Carmen Romano, M. Thiel, J. Kurths, *Phys. Rep.*, **438** (5-6), 237 (2007). DOI: 10.1016/j.physrep.2006.11.001
- [17] V.A. Maksimenko, N.S. Frolov, A.E. Hramov, A.E. Runnova, V.V. Grubov, J. Kurths, A.N. Pisarchik, *Front. Behav. Neurosci.*, **13**, 220 (2019). DOI: 10.3389/fnbeh.2019.00220