

01

Комптоновское рассеяние двух фотонов атомным ионом

© А.Н. Хоперский, А.М. Надолинский[✉], Р.В. Конеев

Ростовский государственный университет путей сообщения,
344038 Ростов-на-Дону, Россия

[✉]e-mail: amnrnd@mail.ru

Поступила в редакцию 14.05.2023 г.

В окончательной редакции 14.05.2023 г.

Принята к публикации 27.06.2023 г.

Теоретически предсказаны аналитическая структура и абсолютные значения дважды дифференциального сечения комптоновского рассеяния двух рентгеновских фотонов многозарядным неоподобным атомным ионом.

Ключевые слова: комптоновское рассеяние, неоподобный атомный ион, рентгеновский фотон, амплитуда вероятности рассеяния, дважды дифференциальное сечение.

DOI: 10.21883/OS.2023.07.56124.5148-23

1. Введение

Исследованию фундаментального в микромире процесса нелинейного (число поглощаемых фотонов $n \geq 2$) комптоновского рассеяния свободным электроном посвящено большое количество экспериментальных [1–4] и теоретических [5–7] работ. Первые теоретические исследования комптоновского рассеяния двух фотонов атомом проведены в работах авторов [8,9]. Основным результатом этих работ — предсказание области аномального комптоновского рассеяния (ACS) с энергией рассеянного фотона $\eta\omega_c \in (\eta\omega; 2\eta\omega - I_{1s})$ ($\eta\omega$ — энергия падающего фотона, I_{1s} — энергия порога ионизации $1s^2$ -оболочки атома). Экспериментально ACS-эффект двух фотонов рентгеновского лазера на свободных электронах (XFEL) обнаружен для металлического бериллия [10] и поликристаллического алмаза [11]. Насколько нам известно, подобные эксперименты для атомов (атомных ионов) в газовой фазе до сих пор не проведены. Физическая интерпретация результатов эксперимента [10] остается предметом теоретических дискуссий [12,13]. В данной работе мы проводим первое теоретическое исследование комптоновского рассеяния двух рентгеновских фотонов многозарядным атомным ионом. Теория работ [8,9] обобщается, прежде всего, учетом (а) следующих порядков приближения Тамма-Данкова [14] для амплитуд вероятности процесса и (б) ненулевых ширин распада $1s$ -вакансии атомного иона и спектрального разрешения предполагаемого эксперимента. Такие исследования широко востребованы, в частности, для интерпретации фоновых (континуальных) структур наблюдаемых спектров рентгеновской эмиссии многозарядных атомных ионов лабораторной и астрофизической плазмы [15,16]. В качестве объекта исследования взят неоподобный ион атома аргона (Ar^{8+} , заряд ядра иона $Z = 18$, конфигурация и терм основного состояния $[0] = 1s^2 2s^2 2p^6 [^1S_0]$). Выбор обусловлен (а) сферической симметрией основного состояния иона Ar^{8+} ,

(б) его доступностью в газовой фазе для проведения высокоточных экспериментов, например, по поглощению синхротронного излучения ионом, захваченным в „ловушке“ [17], и (с) ярко выраженным присутствием его линий в наблюдаемых спектрах рентгеновской эмиссии от горячих астрофизических объектов [18,19].

2. Теория метода

Рассмотрим процессы комптоновского рассеяния двух фотонов неоподобным атомным ионом:

$$2\omega + [0] \rightarrow [x, \omega] \rightarrow [\varepsilon, \omega_c], \quad (1)$$

$$[x, \omega] = 1sxp(^1P_1) + \omega, \quad (2)$$

$$[\varepsilon, \omega_c] = 1s\varepsilon p(^1P_1) + \omega_c, \quad (3)$$

$$2\omega + [0] \rightarrow [x, \omega] \rightarrow \left\{ \begin{matrix} L_s \\ L_d \end{matrix} \right\} \rightarrow [\varepsilon, \omega_c], \quad (4)$$

$$L_s = 1s y s(^1S_0), \quad L_d = 1s y d(^1D_2). \quad (5)$$

В (1)–(4) и далее принята атомная система единиц ($e = \eta = m_e = 1$), $\omega(\omega_c)$ — энергия падающего (рассеянного) фотона, x, y, ε — энергии электронов сплошного спектра, $x, y \in [0; \infty)$, $\varepsilon = 2\omega - I_{1s} - \omega_c$, I_{1s} — энергия порога ионизации $1s^2$ -оболочки иона. Рассеянию по каналу (1) соответствует (рис. 1, а) поглощение одного ω -фотона (в момент времени t_1) по оператору радиационного перехода:

$$\hat{R} = -\frac{1}{c} \sum_{n=1}^N (\hat{p}_n \hat{A}_n), \quad (6)$$

и локальное (в одной пространственно-временной точке) переизлучение другого ω -фотона в ω_c -фотон ($t_2 > t_1$) по оператору контактного взаимодействия:

$$\hat{C} = \frac{1}{2c^2} \sum_{n=1}^N (\hat{A}_n \hat{A}_n). \quad (7)$$

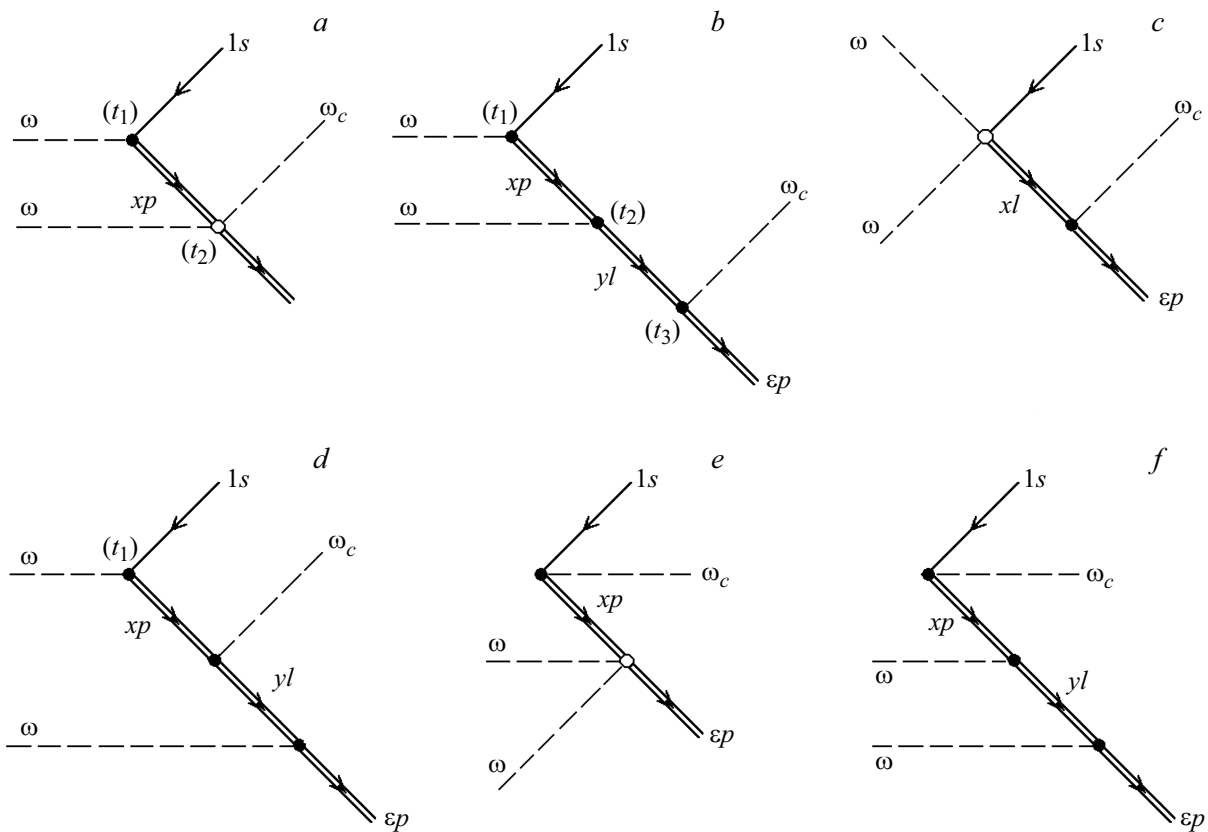


Рис. 1. Амплитуды вероятности комптоновского рассеяния двух фотонов неоподобным атомным ионом (Ar^{8+}) в представлении диаграмм Фейнмана: (a) амплитуда вероятности локального переизлучения, (b) амплитуда вероятности поглощения с последующим излучением, (c) амплитуда вероятности локального поглощения двух фотонов, (d) амплитуда вероятности излучения с последующим поглощением, (e, f) амплитуды спонтанного возбуждения основного состояния атомного иона. Стрелка вправо — электрон ($l = s, d$), стрелка влево — вакансия. Двойная линия — состояние получено в хартри-фокковском поле $1s$ -вакансии. Черный (светлый) кружок — вершина радиационного (контактного) перехода, $\omega(\omega_c)$ — падающий (рассеянный) фотон. Направление времени — слева направо ($t_1 < t_2 < t_3$).

В (6) и (7) \hat{p}_n — оператор импульса n -электрона иона, \hat{A}_n — оператор электромагнитного поля в представлении вторичного квантования, c — скорость света в вакууме, N — число электронов в ионе. Рассеянию по каналу (4) соответствует (рис. 1, b) последовательное поглощение ($t_1 < t_2$) падающих фотонов и излучение ($t_3 > t_2$) ω_c -фотона по \hat{R} -оператору радиационного перехода.

При построении амплитуд вероятности рассеяния приняты (a) третий (по постоянной тонкой структуры) порядок квантово-механической теории возмущений, (b) дипольное приближение ($\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_n)] \cong 1$, \mathbf{k} — волновой вектор фотона, \mathbf{r}_n — радиус-вектор n -электрона иона) для \hat{R} - и \hat{C} -операторов, (c) приближение Тамма-Данкова [14] с максимальным числом „частиц“ (электронов, вакансий и фотонов) в рассеяниях диаграмм Фейнмана $m_{\max} = 4$, (d) приближение игнорирования (при $\omega \geq I_{1s}$; см. далее) вкладов амплитуд вероятности переходов из субвалентной $2s^2$ - и валентной $2p^6$ -оболочек в силу их сильной пространственной и энергетической отдалённости от глубокой $1s^2$ -оболочки [20]. Как результат, например, амплитуда вероятности рассеяния на

рис. 1, c в дипольном приближении для \hat{C} -оператора обращается в нуль ($\langle 1s | \hat{j}_{0,2} | x(s, d) \rangle \rightarrow \langle 1s | x s \rangle = 0$, где \hat{j}_l — сферическая функция Бесселя первого рода l -порядка). Амплитуда вероятности на рис. 1, d отбрасывается, поскольку для неё $m = 5 > m_{\max} = 4$. Амплитуды вероятности спонтанного рождения „частиц“ до момента поглощения фотона (см., например, рис. 1, e, f) в приближении Тамма-Данкова отбрасываются.

Аналитическая структура дважды дифференциального сечения рассеяния по каналам (1) и (4) получена методами алгебры операторов рождения (уничтожения) фотонов, теории неприводимых тензорных операторов и теории неортогональных орбиталей [21] и имеет вид:

$$\frac{d^2\sigma_{\perp}}{d\omega_c d\Omega_c} \equiv \sigma_{\perp}^{(2)} = r_0^2 \mu \frac{\xi \omega_c D Q^2}{(\omega - \omega_c)^2 + (\gamma_{1s} \xi)^2}, \quad (8)$$

$$D = \theta_1 + \frac{\eta_m (2\theta_1 + \eta_m)}{1 + (\gamma_{1s}/\omega)^2}, \quad (9)$$

$$Q = (2 - \omega_c/\omega) N_{1s} G_m, \quad (10)$$

$$N_{1s} = \langle 1s_0 | 1s_+ \rangle \langle 2s_0 | 2s_+ \rangle^2 \langle 2p_0 | 2p_+ \rangle^6, \quad (11)$$

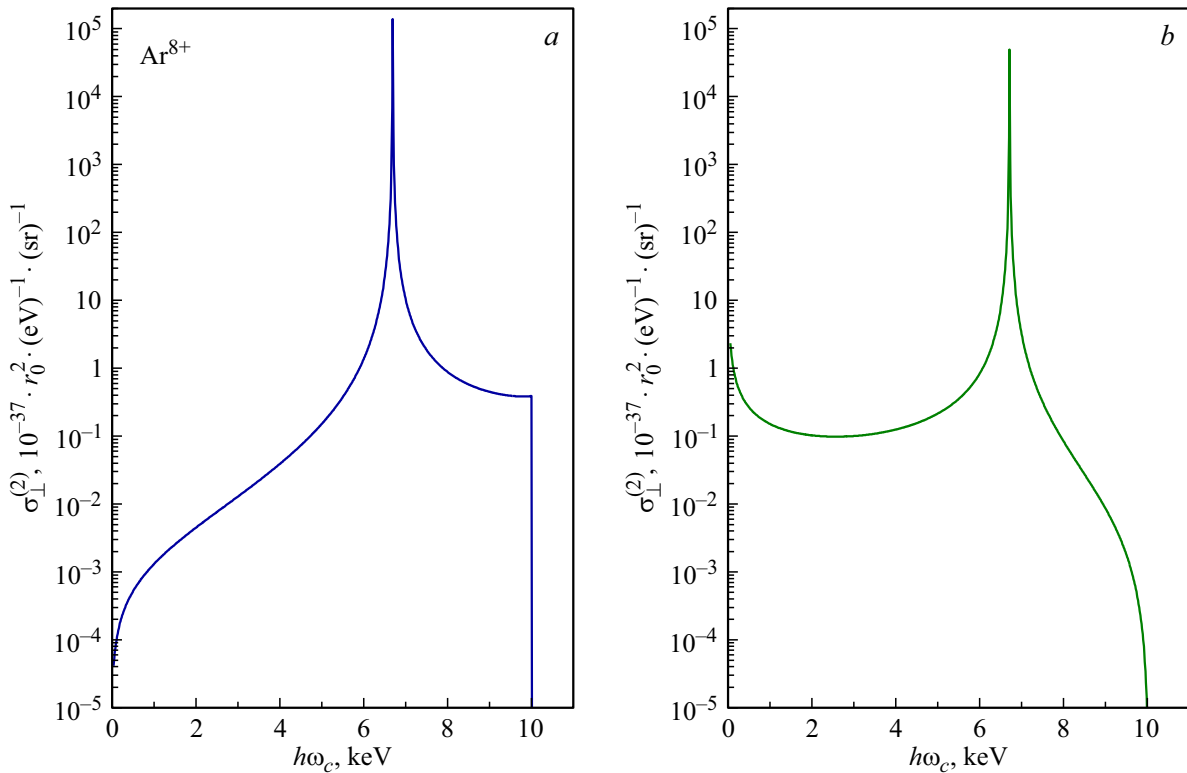


Рис. 2. Парциальные дважды дифференциальные сечения комптоновского рассеяния двух фотонов ионом Ar^{8+} для \perp — схемы эксперимента: (a) — сечение по амплитуде вероятности на рис. 1, a (см. (8) при $\theta_1 = 1, \theta_2 = 0$), (b) — сечение по амплитуде вероятности на рис. 1, b (см. (8) при $\theta_1 = 0, \theta_2 = 1$). Энергия падающего фотона $\hbar\omega = 6.70$ keV, $\hbar\omega_c$ — энергия рассеянного фотона, $\Gamma_{1s} = 0.59$ eV, $\Gamma_{beam} = 0.50$ eV.

$$G_m = \langle 1s_0 | \hat{r} | \varepsilon_m p_+ \rangle - \frac{\langle 1s_0 | \hat{r} | 2p_+ \rangle \langle 2p_0 | \varepsilon_m p_+ \rangle}{\langle 2p_0 | 2p_+ \rangle}. \quad (12)$$

В (8)–(12) Ω_c — пространственный угол вылета рассеянного фотона, r_0 — классический радиус электрона, $\mu = (4/3)\pi\alpha r_0(c\eta)^3/(a_0\epsilon_0 V)$, α — постоянная тонкой структуры, a_0 — радиус Бора, $\epsilon_0 = 27.21$, V — объем квантования электромагнитного поля, $\xi = 1 + (\gamma_b/\gamma_{1s}, \gamma_{b,1s} = \Gamma_{beam,1s}/2, \Gamma_{beam}$ — ширина спектрального разрешения предполагаемого эксперимента, Γ_{1s} — естественная ширина распада $1s$ -вакансии иона, $\eta_m = (6/5)\theta_2(1 - \omega_m/\omega_c)$, $\omega_m = 2\omega - I_{1s}$, $\varepsilon_m = \omega_m - \omega_c$, θ_1, θ_2 — „управляющие“ параметры (рис. 2, 3). Заметим, что в аналитической структуре сечения (8) воспроизводится известный результат Вайскопфа-Вигнера [22]:

$$(y_b/\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\Psi(x)} = \frac{\xi}{\Delta^2 + (\gamma_{1s}\xi)^2}, \quad (13)$$

$$\Psi(x) = (x^2 + \gamma_{1s}^2)[(x - \Delta)^2 + \gamma_b^2]. \quad (14)$$

В (13) $\Delta = \omega - \omega_c$ и второй множитель в (14) определен заменой в „золотом правиле“ Ферми дельта-функции Дирака δ на спектральную функцию Коши-Лоренца:

$$\delta(\varepsilon - \varepsilon_0) \rightarrow (\gamma_b)/\pi, [(\varepsilon - \varepsilon_0)^2 + \gamma_b^2]^{-1}, \quad (15)$$

при интегрировании по ε -энергии электрона сплошного спектра конечного состояния рассеяния, $\varepsilon_0 = 2\omega - I_{1s} - \omega_c$.

Индекс „ \perp “ в (8) соответствует выбору наиболее простой в математическом отношении \perp -схемы предполагаемого компланарного ($\mathbf{k}, \mathbf{k}_c \in P$; $\mathbf{k}(\mathbf{k}_c)$ — волновой вектор падающего (рассеянного) фотона, P — плоскость рассеяния) и аксиально-симметричного (относительно вектора \mathbf{k}) эксперимента — векторы поляризации фотонов перпендикулярны плоскости рассеяния: $\mathbf{e}, \mathbf{e}_c \perp P$. Индексы „0“ и „+“ в (11) и (12) соответствуют радиальным частям волновых функций электронов, полученных решением уравнений самосогласованного поля Хартри-Фока для конфигураций начального ($[0]$) и конечного ($[1s_+ 2s_+^2 2p_+^6]$) состояний иона. Таким образом, множитель $N_{1s}G_m$ в (10) описывает многочастичный эффект радиальной релаксации одноэлектронных волновых функций возбужденного состояния иона в поле $1s$ -вакансии. Сингулярные одноэлектронные амплитуды вероятности поглощения (тормозное поглощение) ω -фотона и излучения (тормозное излучение) ω_c -фотона при переходе из континуума в континуум (рис. 1, b) получены в форме скорости в приближении плоских волн для радиальных частей волновых функций сплошного спектра:

$$(x - y)\langle xp_+ | \hat{r} | yl_+ \rangle \cong i\sqrt{2x}\delta(x - y), \quad (16)$$

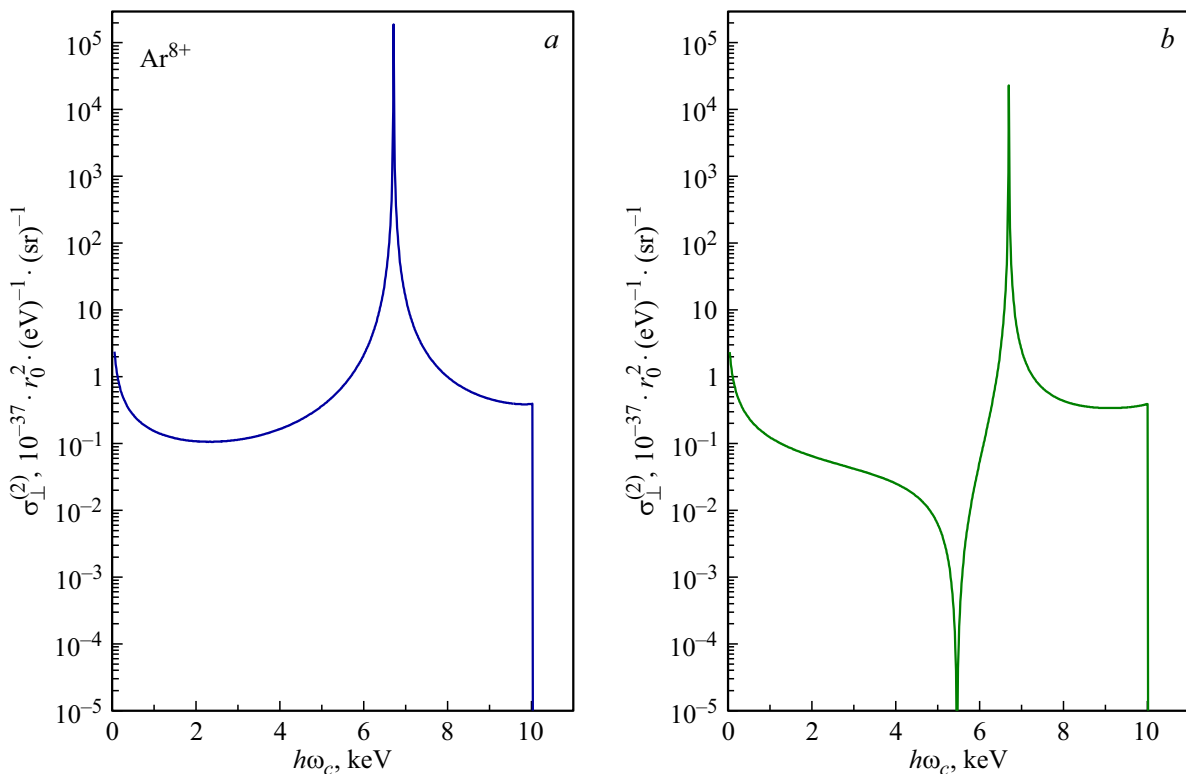


Рис. 3. Полные дважды дифференциальные сечения комптоновского рассеяния двух фотонов ионом Ar^{8+} для \perp -схемы эксперимента: (a) без учета (см. сумму сечений на рис. 2, a, b) и (b) с учетом (см. (8) при $\theta_1 = \theta_2 = 1$) квантовой интерференции амплитуд вероятности на рис. 1, a, b. Энергия падающего фотона $\hbar\omega = 6.70$ keV, $\hbar\omega_c$ — энергия рассеянного фотона, $\Gamma_{1s} = 0.59$ eV, $\Gamma_{beam} = 0.50$ eV.

$$(y - \varepsilon)\langle y l_+ | \hat{r} | \varepsilon p_+ \rangle \cong i\sqrt{2y}\delta(y - \varepsilon), \quad (17)$$

$$|x\rangle \cong \left(\frac{2}{\pi^2 x}\right)^{1/4} \sin(r\sqrt{2x}), \quad (18)$$

$$\langle x l_+ | y l'_+ \rangle = \delta_{ll'}\delta(x - y), \quad (19)$$

где $\delta_{ll'}$ — символ Кронекера-Вейерштрасса и δ — дельта-функция Дирака. Учет $\gamma_{1s} > 0$ в (9) приводит к тому, что формально математически возникающая при $\gamma_{1s} = 0$ „инфракрасная расходимость“ ($\sigma_{\perp}^{(2)} \rightarrow \infty$ при $\omega_c \rightarrow 0$) сечения (8) исчезает. При $\omega \rightarrow \infty$ сечение (8) удовлетворяет асимптотическому условию:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \sigma_{\perp}^{(2)} = 0. \quad (20)$$

При $\varepsilon_m \rightarrow 0$ ($\omega_c \rightarrow \omega_m$) частичное сечение рассеяния по амплитуде вероятности на рис. 1, b (см. (8) при $\theta_1 = 0, \theta_2 = 1$) обращается в нуль. Этот результат воспроизводит таковой для однократного комптоновского рассеяния [23] и тормозного излучения [24]. Для частичного сечения рассеяния по амплитуде вероятности на рис. 1, a (см. (8) при $\theta_1 = 1, \theta_2 = 0$) „инфракрасная расходимость“ отсутствует и при $\varepsilon_m \rightarrow 0$ возникает „обрыв“ сечения.

3. Результаты и обсуждение

Результаты расчета представлены на рис. 2, 3. Для параметров сечения (8) приняты значения $I_{1s} = 3380.83$ eV [25], $\Gamma_{1s} = 0.59$ eV [26] и $\hbar\omega = 6700$ eV (энергия $K\alpha$ -линии эмиссии иона Fe^{24+} [27]). Заметим, что $I_{1s} \gg I_{2s}(I_{2p}) = 500.68(425.33)$ eV [28]. Для ширины спектрального разрешения предполагаемого эксперимента принято значение $\Gamma_{beam} = 0.50$ eV, достигнутое в серии XFEL-экспериментов [29,30]. Значение энергии падающего фотона реализует критерий применимости дипольного приближения для \hat{R} - и \hat{C} -операторов: $\lambda_{\omega}/r_{1s} \gg 1$, где длина волны падающего на ион излучения $\lambda_{\omega} = 1.852$ Å и средний радиус $1s^2$ -оболочки иона Ar^{8+} $r_{1s} = 0.046$ Å. Заметим, что $r_{1s} \ll r_{2s}(r_{2p}) = 0.216(0.196)$ Å (расчет данной работы).

Результат на рис. 2, a демонстрирует лидирующую роль амплитуды вероятности рассеяния на рис. 1, a при возникновении широкой области аномального комптоновского рассеяния для $\omega_c \in (\omega; 2\omega - I_{1s})$ в коротковолновой области от гигантского томсоновского ($\omega_c = \omega$) резонанса. Результат на рис. 2, b демонстрирует лидирующую роль амплитуды вероятности рассеяния на рис. 1, b при $\omega_c \rightarrow 0$ (тенденция к „инфракрасной расходимости“ при $\gamma_{1s} \rightarrow 0$). При этом учет квантовой интерференции L_s - и L_d -каналов рассеяния из (5) прак-

тически в два раза увеличивает теоретические значения сечения, полученные с учетом лишь канала L_s . Сравнение результатов на рис. 3, *a* и рис. 3, *b* демонстрирует эффект деструктивной (гасящей) квантовой интерференции амплитуд вероятности процессов (1) и (4), входящих с разными знаками в полную амплитуду вероятности рассеяния. При этом (а) происходит перераспределение вероятности рассеяния в область энергий $\omega_c \rightarrow 0$ и (б) при $\omega_c \cong 5.3 \text{ keV}$ полное сечение рассеяния практически обращается в нуль. Конечно, анализ вкладов парциальных амплитуд вероятности рассеяния имеет относительный характер, тогда как физический смысл (включая калибровочную инвариантность) обретает лишь полная амплитуда вероятности рассеяния [31]. Рождение в области аномального комптоновского рассеяния фотона с максимальной энергией $\omega_c^{\text{max}} = 2\omega - I_{1s}$ может быть физически интерпретировано как эффект неупругого (ион переходит в возбужденное состояние) слияния двух падающих ω -фотонов в поле атомного иона.

4. Заключение

Построен нерелятивистский вариант квантовой теории процесса комптоновского рассеяния двух рентгеновских фотонов многозарядным атомным ионом. Установлены области доминирования и эффект деструктивной квантовой интерференции парциальных амплитуд вероятности рассеяния. Основной результат теории (рис. 3, *b*) качественно воспроизводит результат работ авторов [8,9] для атома и XFEL-экспериментов [10,11] для твердых тел о возникновении области аномального комптоновского рассеяния с локальным максимумом сечения рассеяния при $\omega_c \rightarrow 2\omega - I_{1s}$ (неупругое слияние фотонов в поле атомного иона). В длинноволновой области от томсоновского резонанса ($\omega_c = \omega$) теория предсказывает глубокий локальный минимум сечения при $\omega_c \cong 5.3 \text{ keV}$ и тенденцию к „инфракрасной расходимости“ сечения при $\omega_c \rightarrow 0$ в приближении $\gamma_{1s} \rightarrow 0$. Выход за рамки дипольного приближения для \hat{C} -оператора и переход к следующим порядкам приближения Тамма-Данкова и другим схемам предполагаемого эксперимента [24] является предметом будущего развития теории. Можно предположить, что экспериментальное обнаружение процесса комптоновского рассеяния двух рентгеновских фотонов атомным ионом возможно, в частности, методами рассеяния синхротронного [32] или XFEL-излучения [33] атомным ионом, захваченным в „ловушке“. Наконец, оценим „наблюдаемое“ сечение рассеяния (рис. 3, *b*) для окрестности локального максимума при $\omega_c^{\text{max}} = 2\omega - I_{1s}$ ($\cong 10 \text{ keV}$) в XFEL-эксперименте. Например, для средней яркости излучения лазера (число фотонов в лазерном импульсе) $N = 10^{20}$ ([34], EuropeanXFEL) имеем:

$$\frac{N!}{2!(N-2)!} \sigma_{\perp}^{(2)} \cong 140 \left(\frac{\text{barn}}{\text{eV} \cdot \text{sr}} \right).$$

Полученное значение вполне доступно измерению. Для максимальной (пиковой) яркости излучения лазера $N = 10^{35}$, достигнутой в работе [35] (PAL-XFEL, Republic of Korea), данная оценка возрастает на 30 порядков величины.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] T.J. Englert, E.A. Rinehart. *Phys. Rev. A*, **28**, 1539 (1983). DOI: 10.1103/PhysRevA.28.1539
- [2] C. Bula, K.T. McDonald, E.J. Prebys, C. Bamber, S. Boege, T. Kotsieroglou, A.C. Melissinos, D.D. Meyerhofer, W. Ragg, D.L. Burke, R.C. Field, G. Horton-Smith, A.C. Odian, J.E. Spencer, D. Walz, S.C. Berridge, W.M. Bugg, K. Shmakov, A.W. Weidemann. *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 3116 (1996). DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.3116
- [3] C. Bamber, S.J. Boege, T. Koffas, T. Kotsieroglou, A.C. Melissinos, D.D. Meyerhofer, D.A. Reis, W. Ragg, C. Bula, K.T. McDonald, E.J. Prebys, D.L. Burke, R.C. Field, G. Horton-Smith, J.E. Spencer, D. Walz, S.C. Berridge, W.M. Bugg, K. Shmakov, A.W. Weidemann. *Phys. Rev. D*, **60**, 092004 (1999). DOI: 10.1103/PhysRevD.60.092004
- [4] M. Iinuma, K. Matsukado, I. Endo, M. Hashida, K. Hayashi, A. Kohara, F. Matsumoto, Y. Nakanishi, S. Sakabe, S. Shimizu, T. Tauchi, K. Yamamoto, T. Takahashi. *Phys. Lett. A*, **346**, 255 (2005). DOI: 10.1016/j.physleta.2005.08.017
- [5] L.S. Brown, T.W.B. Kibble. *Phys. Rev.*, **133**, 705 (1964). DOI: 10.1103/PhysRev.133.A705
- [6] A. Di Piazza, C. Müller, K.Z. Hatsagortsyan, C.H. Keitel. *Rev. Mod. Phys.*, **84**, 1177 (2012). DOI: 10.1103/RevModPhys.84.1177
- [7] F.A. Fedotov, A. Ilderton, F. Karbstein, B. King, D. Seipt, H. Taya, G. Torgrimsson. *Phys. Rep.*, **1010**, 1 (2023). DOI: 10.1016/j.physrep.2023.01.003
- [8] A.N. Hopersky, A.M. Nadolinsky, S.A. Novikov, V.A. Yavna. *Phys. Rev. A*, **91**, 022708 (2015). DOI: 10.1103/PhysRevA.91.022708
- [9] A.N. Hopersky, A.M. Nadolinsky, S.A. Novikov. *Phys. Rev. A*, **92**, 052709 (2015). DOI: 10.1103/PhysRevA.92.052709
- [10] M. Fuchs, M. Trigo, J. Chen, S. Ghimire, S. Shwartz, M. Kozina, M. Jiang, T. Henighan, C. Bray, G. Ndabashimiye, P.H. Bucksbaum, Y. Feng, S. Herrmann, G.A. Carini, J. Pines, P. Hart, C. Kenney, S. Guillet, S. Boutet, G.J. Williams, M. Messerschmidt, M. Marvin Seibert, S. Moeller, J.B. Hastings, D.A. Reis. *Nature Phys.*, **11**, 964 (2015). DOI: 10.1038/nphys3452
- [11] B. Kettle, A. Aquila, S. Boutet, P.H. Bucksbaum, G. Carini, Y. Feng, E. Camba, S. Ghimire, S. Glenzer, P. Hart, J.B. Hastings, T. Henighan, M. Hunter, J. Koglin, M. Kozina, H. Liu, M.J. MacDonald, M. Trigo, D.A. Reis, M. Fuchs. *New J. Phys.*, **23**, 115008 (2021). DOI: 10.1088/1367-2630/ac3553
- [12] D. Krebs, D.A. Reis, R. Santra. *Phys. Rev. A*, **99**, 022120 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevA.99.022120
- [13] A. Venkatesh, F. Robicheaux. *Phys. Rev. A*, **101**, 013409 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevA.101.013409
- [14] A.L. Fetter, J.D. Waleska. *Quantum Theory of Many-Particle System* (McGraw-Hill, NY., 1971). DOI: 10.1063/1.3071096

- [15] P. Beiersdorfer. *J. Phys. B*, **48** (14), 4017 (2015). DOI: 10.1088/0953-4075/48/14/144017
- [16] P. Indelicato. *J. Phys. B*, **52** (23), 2001 (2019). DOI: 10.1088/1361-6455/ab42c9
- [17] M.C. Simon, M. Schwarz, S.W. Epp, C. Beilmann, B.L. Schmitt, Z. Harman, T.A. Baumann, P.H. Mokler, S. Bernitt, R. Ginzel, S.G. Higgins, C.H. Keitel, R. Klawitter, K. Kubiček, V. Mäckel, J. Ullrich, J.P. Crespo López-Urrutia. *J. Phys. B*, **43**, 065003 (2010). DOI: 10.1088/0953-4075/43/6/065003
- [18] A.J.J. Raassen, R. Mewe, M. Audard, M. Güdel, E. Behar, J.S. Kaastra, R.L.J. van der Meer, C.R. Foley, J.-U. Ness. *Astron. Astrophys.*, **389**, 228 (2002). DOI: 10.1051/0004-6361:20020529
- [19] J.K. Lepson, P. Beiersdorfer, E. Behar, S.M. Kahn. *Astrophys. J.*, **590**, 604 (2003). DOI: 10.1086/374980
- [20] M.Ya. Amusia. *Atomic Photoeffect* (Plenum Press, NY., 1990). DOI: 10.1007/978-1-4757-9328-4
- [21] A.N. Hopersky, A.M. Nadolinsky, S.A. Novikov. *Phys. Rev. A*, **98**, 063424 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevA.98.063424
- [22] V. Weisskopf, E. Wigner. *Zs. Physik*, **63**, 54 (1930). DOI: 10.1007/BF01336768
- [23] P.M. Bergstrom, T. Suri., K. Pisk, R.H. Pratt. *Phys. Rev. A*, **48**, 021134 (1993). DOI: 10.1103/PhysRevA.48.1134
- [24] А.Н. Хоперский, А.М. Надолинский. *Письма в ЖЭТФ*, **115** (8), 469 (2022). DOI: 10.31857/S1234567822080110
- [25] A.N. Hopersky, A.M. Nadolinsky, D.V. Dzuba, V.A.Yavna. *J. Phys. B*, **38**, 1507 (2005). DOI: 10.1103/PhysRevA.91.022708
- [26] M.H. Chen, B. Crasemann, K.R. Karim. *Phys. Rev. A*, **24**, 1845 (1981). DOI: 10.1103/PhysRevA.24.1845
- [27] A.V. Malyshev, Y.S. Kozhedub, D.A. Glazov, I.I. Tupitsyn, V.M. Shabaev. *Phys. Rev. A*, **99**, 010501 (R) (2019). DOI: 10.1103/PhysRevA.99.010501
- [28] M. Nrisimhamurty, G. Aravind, P.C. Deshmukh, S.T. Manson. *Phys. Rev. A* **91**, 013404 (2015). DOI: 10.1103/PhysRevA.91.013404
- [29] D. Zhu, M. Cammarata, J.M. Feldkamp, D.M. Fritz, J.B. Hastings, S. Lee, H.T. Lemke, A. Robert, J.L. Turner, Y. Feng. *Appl. Phys. Lett.*, **101**, 034103 (2012). DOI: 10.1063/1.4736725
- [30] R.R. Robles, A. Halavanau, D. Cesar, A. Lutman, G. Stupakov. *Phys. Rev. Accel. Beams*, **26**, 030701 (2023). DOI: 10.1103/PhysRevAccelBeams.26.030701
- [31] R.P. Feynman. *The Theory of Fundamental Processes* (W.A. Benjamin, Inc., NY., 1961). DOI: 10.1201/9780429492501
- [32] J.K. Rudolph, S. Bernitt, S.W. Epp, R. Steinbrgge, C. Beilmann, G.V. Brown, S. Eberle, A. Graf, Z. Harman, N. Hell, M. Leutenegger, A. Müller, K. Schlage, H.-C. Wille, H. Yavas, J. Ullrich, J.R. Crespo López-Urrutia. *Phys. Rev. Lett.*, **111**, 103002 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.103002
- [33] S.W. Epp, J.R. Crespo L.pez-Urrutia, G. Brenner, V. M.ckel, P.H. Mokler, R. Treusch, M. Kuhlmann, M.V. Yurkov, J. Feldhaus, J.R. Schneider, M. Wellh.fer, M. Martins, W. Wurth, J. Ullrich. *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 183001 (2007). DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.183001
- [34] J. Feldhaus, M. Krikunova, M. Meyer, Th. Müller, R. Moshhammer, A. Rudenko, Th. Tschentscher, J. Ullrich. *J. Phys. B*, **46**, 164002 (2013). DOI: 10.1088/0953-4075/46/16/164002
- [35] I. Nam, Ch.-K. Min, B. Oh, G. Kim, D. Na, Y.J. Suh, H. Yang, M.H. Cho, C. Kim, M.-J. Kim, C.H. Shim, J.H. Ko, H. Heo, J. Park, J. Kim, S. Park, G. Park, S. Kim, S.H. Chun, H. Hyun, J.H. Lee, K.S. Kim, I. Eom, S. Rah, D. Shu, K.-J. Kim, S. Terentyev, V. Blank, Y. Shvydko, S.J. Lee, H.-S. Kang. *Nature Photon.*, **15**, 435 (2021). DOI: 10.1038/s41566-021-00777-z