

05

Сравнение параметров генерации лазера в режиме когерентной и некогерентной синхронизации мод

© Р.М. Архипов^{1,2}, М.В. Архипов², О.О. Дьячкова^{1,2}, А.В. Пахомов¹, Н.Н. Розанов²

¹ Санкт-Петербургский государственный университет,
199034 Санкт-Петербург, Россия

² ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия

e-mail: arhipovrostislav@gmail.com, m.arkhipov@klnran.ru,
o.o.dyachkova@gmail.com, antpakhom@gmail.com, nnrosanov@mail.ru

Поступила в редакцию 17.04.2023 г.

В окончательной редакции 17.04.2023 г.

Принята к публикации 10.05.2023 г.

На основе численного моделирования проведено сравнение эффективности генерации коротких импульсов при когерентной и стандартной пассивной (некогерентной) синхронизации мод с насыщающимся поглотителем, которое показывает преимущество когерентной синхронизации мод по сравнению с режимом стандартной синхронизации мод в лазерах с насыщающимся поглотителем. Когерентная синхронизация мод в двухсекционных лазерах возникает за счет когерентного взаимодействия излучения с поглощающей и усиливающей средами и позволяет генерировать ультракороткие лазерные импульсы длительностью короче времени релаксации поляризации T_2 поглощающей и усиливающей сред. В обычных лазерах со стандартной (некогерентной) пассивной синхронизацией мод с насыщающимся поглотителем взаимодействие лазерных импульсов с поглощающей и усиливающей средами некогерентное и длительность генерируемых импульсов всегда ограничена временем релаксации поляризации T_2 поглотителя и усилителя.

Ключевые слова: пассивная синхронизация мод, когерентная синхронизация мод, самоиндуцированная прозрачность.

DOI: 10.21883/OS.2023.07.56128.4881-23

Введение

В двухсекционных лазерах, содержащих секцию с усиливающей и поглощающей средами, возможно возникновение режима пассивной синхронизации мод (ПСМ), при котором происходит генерация ультракоротких импульсов с частотой повторения, близкой к частоте обхода пустого резонатора [1–3]. Ультракороткие лазерные импульсы с длительностью в фемтосекундном и пикосекундном диапазонах находят многочисленные применения в управлении сверхбыстрыми процессами в веществе, системах обработки изображений, медицине и других приложениях [4,5]. В обычных лазерных системах с ПСМ (лазер с насыщающимся поглотителем) возникновение коротких импульсов происходит за счет некогерентного насыщения усиления в усиливающей и насыщения поглощения в поглощающей средах [1–5]. При этом взаимодействие лазерных импульсов со средой некогерентное и длительность лазерных импульсов τ не может быть короче времени релаксации поляризации лазерных сред T_2 .

Изучение способов получения ультракоротких лазерных импульсов уже в начале лазерной эры привело к открытию Мак-Колом и Ханом явления самоиндуцированной прозрачности (СИП) [6–8]. Данное явление возникает, когда взаимодействие лазерного излучения с резонансно поглощающей средой когерентное, т.е.

длительность импульса короче времени релаксации поляризации среды T_2 . Явление СИП заключается в том, что короткий импульс с определенной начальной амплитудой и длительностью может распространяться в резонансной среде без потерь. Важной характеристикой лазерных импульсов в теории когерентного взаимодействия излучения с веществом является площадь импульса $\Theta(z, t)$ (pulse area), определяемая [6–8] как интеграл от медленной огибающей импульса $A(z, t)$:

$$\Theta(z, t) = \frac{d_{12}}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} A(z, t) dt. \quad (1)$$

Здесь d_{12} — дипольный момент перехода, \hbar — приведенная постоянная Планка, z — продольная координата, t — время. Площадь импульса СИП равна 2π . Самоиндуцированная прозрачность — довольно эффективное явление нелинейной оптики, долгое время оно вызывало чисто академический интерес и возможность его практического применения для генерации коротких импульсов не рассматривалась (см. историю вопроса в обзоре [9]).

Впоследствии в работах [10–22] теоретически была показана возможность использования явления СИП для получения режима ПСМ в двухсекционных лазерах. При двукратной разнице дипольных моментов перехода в поглощающей и усиливающей средах в поглощающей среде происходит формирование 2π -импульса СИП, а

в усиливающей среде формируется π -импульс, снимающий инверсию в среде, в результате чего среда становится поглощающей. Данный режим ПСМ, возникающий за счет явления СИП в поглощающей среде, называется режимом когерентной синхронизации мод (КСМ, „coherent mode-locking“ или „self-induced transparency mode-locking“) [10–22]. Экспериментально он был обнаружен совсем недавно в лазере с когерентным поглотителем [23–26]. С помощью КСМ можно получать короткие импульсы с длительностью гораздо короче времени релаксации поляризации T_2 усиливающей и поглощающей сред. Данный режим, как показывают результаты теоретических исследований, в принципе позволяет получать короткие импульсы с длительностью в несколько циклов колебаний, вплоть до одного цикла в лазере с ультракоротким резонатором [19].

В обычных лазерах с ПСМ, в которых имеется насыщающийся поглотитель, взаимодействие импульсов с усиливающей и поглощающей средами некогерентное. И при теоретическом анализе режимов ПСМ, например, в полупроводниковых лазерах, поляризация среды адиабатически исключается из уравнений модели [27–34]. Это приводит к исключению из рассмотрения когерентных эффектов во взаимодействии генерируемых импульсов с усилителем и поглотителем. Однако на сегодняшний день стало возможно получение коротких импульсов с длительностью в сотни фемтосекунд, например, в волоконных лазерах [35–37] и в полупроводниковых лазерах на квантовых точках [38–40]. Данная длительность импульсов уже может быть сравнима со временем релаксации поляризации T_2 в подобных системах. Поэтому при таких длительностях импульсов по нашему мнению необходимо применять во внимание когерентные эффекты при теоретическом анализе режимов ПСМ в данных лазерных системах. Более того, получение фемтосекундных импульсов (например, в титан-сапфировом лазере [41]) на сегодняшний день требует гораздо более сложных установок и дополнительных систем компрессии [42]. В то же время режим КСМ представляется привлекательным для получения одноклоновых импульсов в компактных лазерных источниках [13,14,19].

По нашим сведениям впервые на возможность сокращения длительности импульсов в режиме КСМ с ростом отношения дипольных моментов поглощающей и усиливающей сред кратко обращалось внимание в работах [15–17]. Остались не рассмотренными вопросы сравнения генерации в режиме КСМ и в обычном режиме ПСМ с насыщающимся поглотителем при заданных параметрах усиливающей среды и резонатора.

В настоящей работе на основе численного решения системы уравнений Максвелла-Блоха проводится сравнение возможностей сокращения длительности генерации в лазере с кольцевым резонатором в режимах КСМ и ПСМ за счет использования насыщающегося поглотителя. Проведено сравнение эффективности генерации

коротких импульсов в режиме КСМ и ПСМ с насыщающимся поглотителем, которое показывает преимущество КСМ.

Физический механизм сокращения длительности импульсов в лазере за счет режима КСМ

Предваряя основное содержание, целесообразным кажется еще раз подробно рассмотреть физическую идею, на которой основано сокращение длительности импульсов в режиме КСМ [15–17]. При когерентном распространении ультракоротких импульсов с резонансно усиливающей и поглощающей средами площадь импульса (1) удовлетворяет теореме площадей Мак-Кола и Хана [6–8]. Данная теорема использует уравнение, описывающее эволюцию по координате площади импульса в резонансной среде с неоднородным уширением линии резонансного перехода:

$$\frac{d}{dz} \Theta(z) = |\alpha| \sin \Theta(z), \quad (2)$$

α — коэффициент линейного поглощения (усиления) на единицу длины.

В работах [16,18,21] был предложен диаграммный подход для теоретического описания режима КСМ, основанный на решениях уравнения (2), в двухсекционном лазере с кольцевым резонатором. Согласно этому подходу эволюция площади импульса в усилителе и поглотителе описывается на основе теоремы площадей. Как показывают результаты теоретических исследований, при использовании такого подхода в системе существуют устойчивые предельные циклы, когда в поглотителе формируется 2π -импульс СИП, а в усилителе — π -импульс.

Подход позволяет качественно предсказать динамику системы. Например, ветви решения уравнения (2) теоремы площадей для двух разных начальных значений площади импульса $\Theta_0 = 1.1\pi$ и $\Theta_0 = 2.9\pi$ приведены на рис. 1 (нижняя кривая и верхняя кривая соответственно). Согласно рис. 1, если площадь начального импульса чуть больше π или чуть меньше 3π , то площадь импульса по мере распространения стремится к стационарному значению 2π . Это приводит к формированию режима СИП в поглощающей среде. При этом, как показывают результаты численных расчетов, в первом случае (нижняя ветвь на рис. 1) распространение импульса сопровождается увеличением его длительности, так как его площадь увеличивается [6–8].

Однако во втором случае (верхняя ветвь на рис. 1) площадь импульса уменьшается, что приводит к сокращению его длительности [6–8]. Данное обстоятельство возможности сокращения длительности импульса с начальной площадью чуть меньше 3π за счет явления СИП — было обнаружено экспериментально в работе [43] и теоретически в лазере с КСМ [15–17].

Данные соображения могут быть использованы для сокращения длительности импульсов в лазерах при КСМ, если взять соотношение дипольных моментов поглощающей и усиливающей сред равным 3 (или близким к этому значению) [15–17]. Действительно, в этом случае при распространении импульса в поглощающей среде в режиме СИП его площадь будет стремиться к 2π , а длительность уменьшаться. В усиливающей среде площадь данного импульса будет стремиться к π , и его длительность также будет уменьшаться. Таким образом, совместное действие усиливающей и поглощающей среды, как будет показано ниже, может приводить к генерации фемтосекундных импульсов на основе режима КСМ.

Упомянутые выше вариации дипольного момента кажутся сложно реализуемыми в эксперименте. Однако на практике изменение дипольного момента поглотителя вовсе не обязательно. Как было отмечено еще в работе [10], важно изменение площади импульса. Это, действительно, можно реализовать за счет изменения дипольного момента или изменения сечения пучка в поглотителе, что следует из формулы (1).

Последнее важное замечание. Разобранные диаграммы описывают поведение площади огибающей и не показывают основную особенность КСМ. Оно заключается в сокращении длительности импульса при росте мощности генерации. Энергия импульса, т.е. амплитуда поля растет. Но площадь остается постоянной. Это значит, что длительность сокращается. Данный факт был продемонстрирован экспериментально в работах [25,26].

Теоретическая модель

Численное моделирование проводилось для двухсекционного лазера, содержащего усиливающую и поглощающую среды, размещенные в кольцевом резонаторе, в котором реализуется режим однонаправленной генерации (рис. 2). Зеркала 1, 3, 4 полностью отражают излучение, а зеркало 2 имеет отличный от единицы коэффициент отражения. Усиливающая и поглощающая

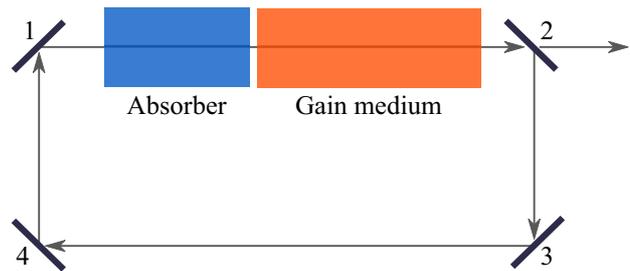


Рис. 2. Моделируемая система. Двухсекционный лазер с кольцевым резонатором, содержащий усиливающую и поглощающую среды, в котором реализуется однонаправленное распространение (элементы, обеспечивающие этот режим, не показаны). 1–4 — зеркала резонатора.

среды моделировались в двухуровневом приближении. Уширение перехода считалось однородным. Численные расчеты проводились на основе решения системы уравнений Максвелла-Блоха для медленно меняющейся амплитуды электрического поля $A(z, t)$, медленно меняющихся амплитуды мнимой части недиагонального элемента матрицы плотности двухуровневой среды $P_s(z, t)$ и разности населенностей двухуровневой среды (инверсии) $n(z, t) = \rho_{11} - \rho_{22}$. Данная система уравнений имеет следующий вид [8–21]:

$$\frac{\partial}{\partial t} A_{a,g}(z, t) + \frac{\partial}{\partial z} A_{a,g}(z, t) = 4\pi\omega_0 d_{12,a,g} N_{0,a,g} P_{s,a,g}(z, t), \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} P_{s,a,g} = -\frac{P_{s,a,g}(z, t)}{T_{2,a,g}} + \frac{d_{12,a,g}}{2\hbar} n_{a,g}(z, t) A_{a,g}(z, t), \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} n_{a,g}(z, t) = -\frac{n_{a,g}(z, t) - n_{0,a,g}}{T_{1,a,g}} - \frac{2d_{12,a,g}}{\hbar} A_{a,g}(z, t) P_{s,a,g}(z, t). \quad (5)$$

Система уравнений (3)–(5) написана в приближениях медленно меняющихся амплитуд и вращающейся волны. Индекс a относится к поглощающей среде, индекс g — к усиливающей. В этой системе уравнений $T_{1,a,g}$ — время релаксации разности населенностей, $T_{2,a,g}$ — время релаксации поляризации, $d_{12,a,g}$ — дипольный момент перехода, $n_{0,a,g}$ — равновесное значение разности населенностей ($n_{0a} = 1, n_{0g} = -1$), $N_{0,a,g}$ — концентрация частиц, ω_0 — частота резонансного перехода в усилителе и поглотителе. Параметры, использованные при численном расчете, указаны в таблице. Для усилителя и поглотителя взяты одинаковые значения, за исключением длины среды (длина поглощающей среды $L_a = 0.2$ см, усиливающей — $L_g = 0.6$ см) и дипольного момента перехода (дипольный момент перехода поглотителя d_{12a} в 2 раза больше, чем дипольный момент усилителя d_{12g}). Полная длина резонатора составляет $L = 0.8$ см, и тогда период обхода резонатора T равен $L/c = 26.6$ пс.

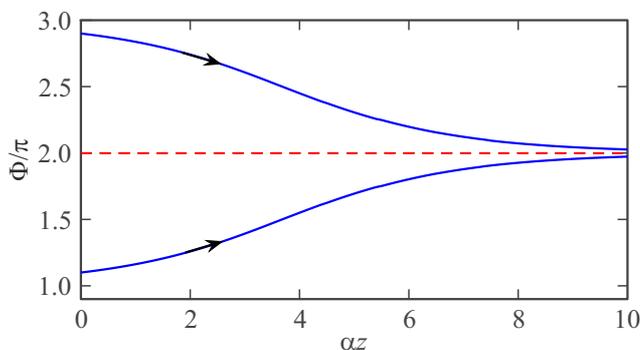


Рис. 1. Ветви решения теоремы площадей уравнения (2) для двух разных начальных значений площади импульса $\Theta_0 = 1.1\pi$ (нижняя кривая) и $\Theta_0 = 2.9\pi$ (верхняя кривая).

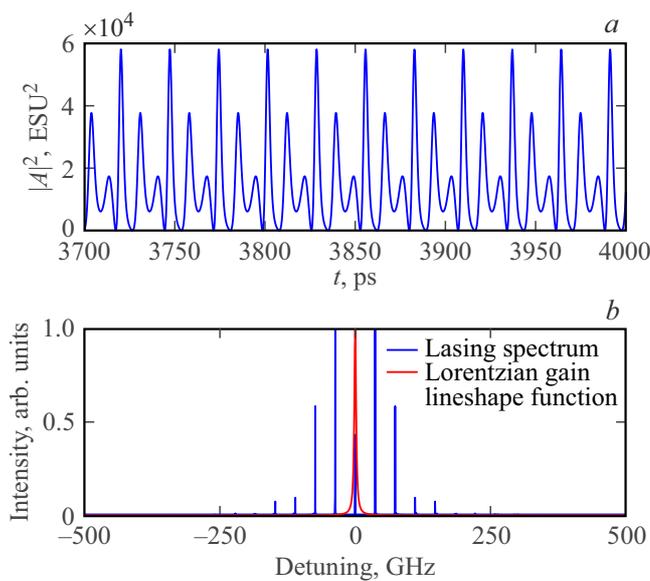


Рис. 3. *a* — временная зависимость квадрата амплитуды электрического поля (интенсивности генерации) от времени на выходе из резонатора; *b* — спектр генерации (синяя кривая), лоренцев контур линии усиления активной среды (красная кривая).

Результаты численного моделирования режима КСМ в односекционном лазере

Для сравнения вначале проведено численное моделирование динамики КСМ в односекционном лазере в отсутствие поглотителя. Результаты расчета временной зависимости интенсивности генерации и ее спектр представлены на рис. 3. Из него видно, что в установившемся режиме наблюдаются периодически повторяющиеся многоимпульсные структуры.

В следующем разделе показано, что для подавления многоимпульсного режима в рассматриваемой ситуации необходимо введение секции поглотителя.

Результаты численного моделирования генерации в двухсекционном лазере

Результаты расчета интенсивности генерации и ее спектр в двухсекционном лазере представлены на рис. 4, *a, b* соответственно. Численные расчеты проводились для случая, когда дипольные моменты усиливающей и поглощающей сред одинаковы, $d_{12_a} = d_{12_g} = 5D$. Остальные параметры указаны в таблице. В этом случае в лазере наблюдается генерация импульсов нулевой площади (0л-импульсы). Это также видно из спектра генерации на рис. 4, *b*, на котором практически отсутствует компонента на частоте резонансного перехода. Форма одиночного 0л-импульса представлена на рис. 4, *c*. Он состоит из двух полуволн огибающей противоположной полярности. Отметим, что ранее в работе [20] при равенстве дипольных моментов усилителя и поглотителя

Параметры, использованные при численном расчете

Длина поглощающей среды, см	L_a	0.2
Длина усиливающей среды, см	L_g	0.6
Полная длина резонатора, см	L	0.8
Амплитудный коэффициент отражения зеркал	R	0.8
Длина волны резонансного перехода усилителя/поглотителя, nm	λ_0	700
Дипольный момент перехода усилителя, D	d_{12_g}	5
Дипольный момент перехода поглотителя, D	d_{12_a}	10
Время релаксации инверсии в усиливающей/поглощающей среде, ns	$T_{1_{g,a}}$	0.16
Время релаксации поляризации в усилителе/поглотителе, ps	$T_{2_{a,g}}$	40
Концентрация усиливающих и поглощающих частиц, cm^{-3}	$N_{0_{a,g}}$	$12.5 \cdot 10^{14}$

наблюдался режим генерации π -импульсов в обеих средах. Причем параметры расчетов отличались незначительно (изменились размеры сред и длина резонатора). Что говорит о чувствительности режима к вариациям характеристик сред и резонатора.

Экспериментально режим синхронизации мод с формированием 0л-импульсов под действием поглотителя наблюдался в лазере на красителе с когерентно поглощающей ячейкой из паров молекулярного йода [23,24].

При соотношении дипольных моментов перехода от 1 до 3 наблюдается сокращение длительности импульсов в соответствии с описанным выше механизмом, что приводит к получению импульсов с длительностью в сотни фемтосекунд [15–17]. Примеры временной динамики интенсивности генерации, ее спектр и форма одиночного импульса генерации при соотношении дипольных моментов 2, 2.5 и 3 представлены на рис. 5–7 соответственно. Как видно из рис. 7, *c*, длительность импульса может достигать значения в 200 fs.

Заметим также, что режим КСМ, представленный на рис. 3–7, является самостартующим, т.е. для создания режима КСМ не требуется затравочного внешнего импульса в отличие от результатов ранних работ [10–14]. В численных расчетах КСМ возникал из очень слабого начального поля, равномерно распределенного по длине резонатора. Длина резонатора в рассмотренных примерах составляла $L = 8 \text{ mm}$, что соответствует частоте следования импульсов порядка $f_0 = 37.5 \text{ GHz}$. Подобные частоты следования импульсов легко реализуются в двухсекционных лазерах на квантовых точках [38–40].

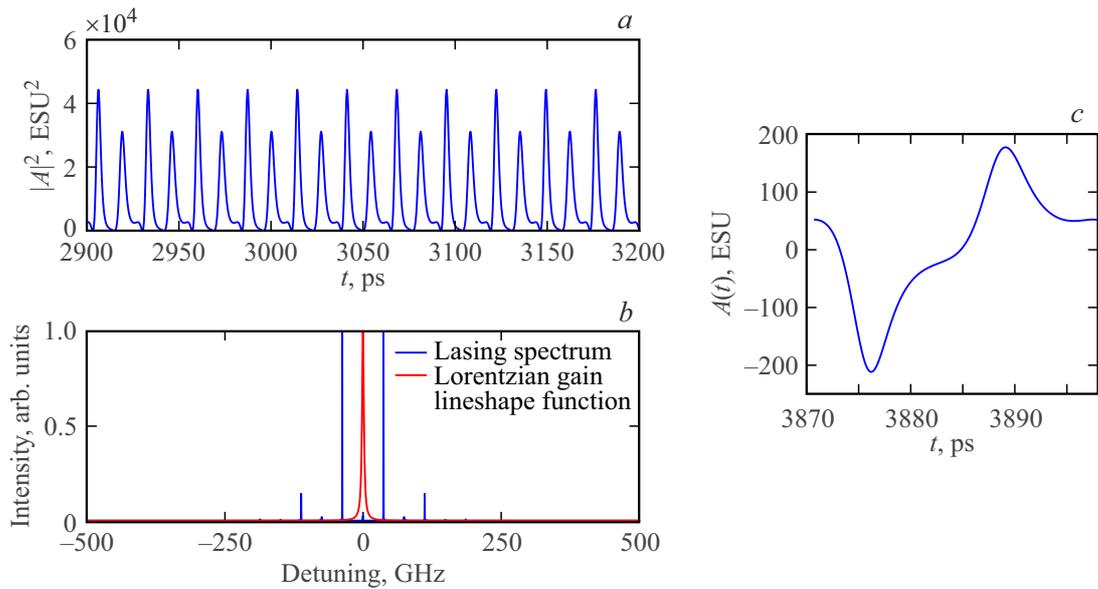


Рис. 4. *a* — временная зависимость квадрата амплитуды электрического поля (интенсивности генерации) от времени на выходе из резонатора; *b* — спектр генерации (синяя кривая), лоренцев контур линии усиления активной среды (красная кривая); *c* — одиночный импульс генерации, когда дипольные моменты в поглотителе и усилителе равны $d_{12_a} = d_{12_g} = 5D$. Остальные параметры указаны в таблице.

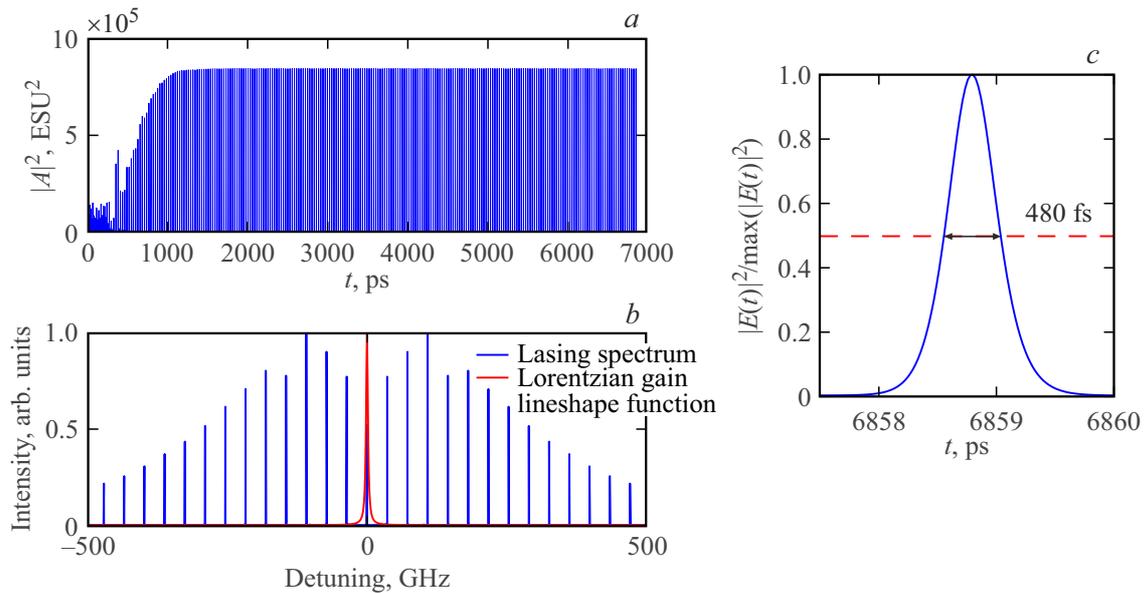


Рис. 5. *a* — временная зависимость квадрата амплитуды электрического поля (интенсивности генерации) от времени на выходе из резонатора; *b* — спектр генерации (синяя кривая), лоренцев контур линии усиления активной среды (красная кривая); *c* — одиночный импульс генерации, когда соотношение дипольных моментов в поглотителе и усилителе равно 2.

Сравнение параметров генерации лазера в режимах когерентной и некогерентной синхронизации мод, когда поглотитель работает в режиме насыщения

Для реализации режима стандартной некогерентной синхронизации мод с насыщающимся поглотителем

необходимо, чтобы времена релаксации в поглотителе были сравнимы с желаемой длительностью импульса [1–5]. При этом время T_2 должно быть меньше длительности импульса. Оставляя неизменными параметры усилителя (таблица), изменив указанным образом времена релаксации поглотителя ($T_1 = 6$ ps, $T_2 = 0.1$ ps), сделав концентрацию частиц в поглотителе $N_0 = 8.5 \cdot 10^{14}$ cm⁻³, не меняя дипольный момент

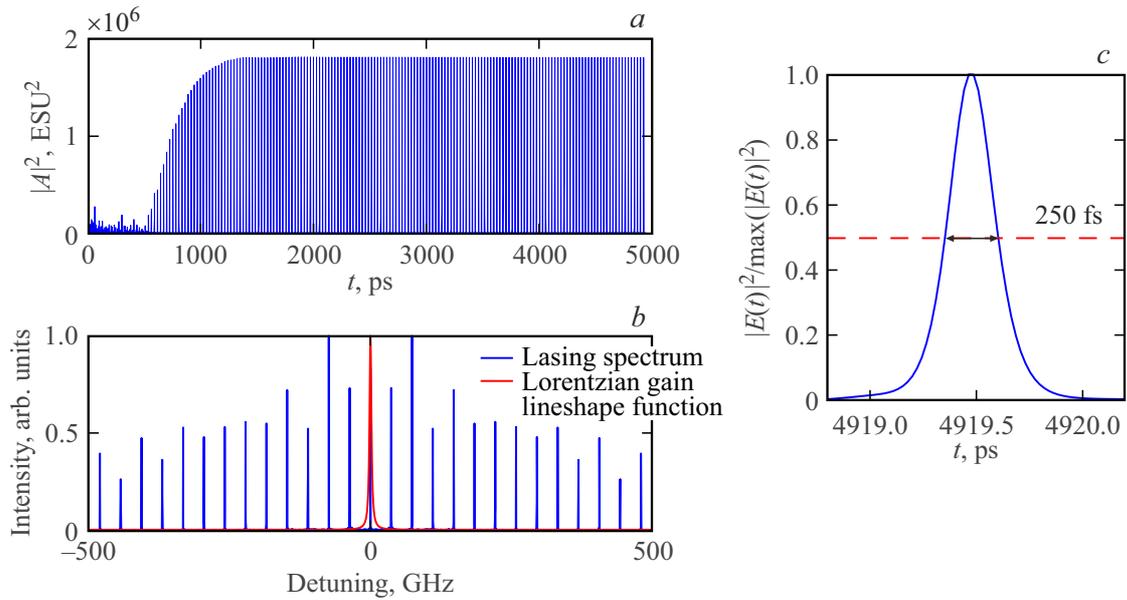


Рис. 6. *a* — временная зависимость квадрата амплитуды электрического поля (интенсивности генерации) от времени на выходе из резонатора; *b* — спектр генерации (синяя кривая), лоренцев контур линии усиления активной среды (красная кривая); *c* — одиночный импульс генерации, когда соотношение дипольных моментов в поглотителе и усилителе равно 2.5.

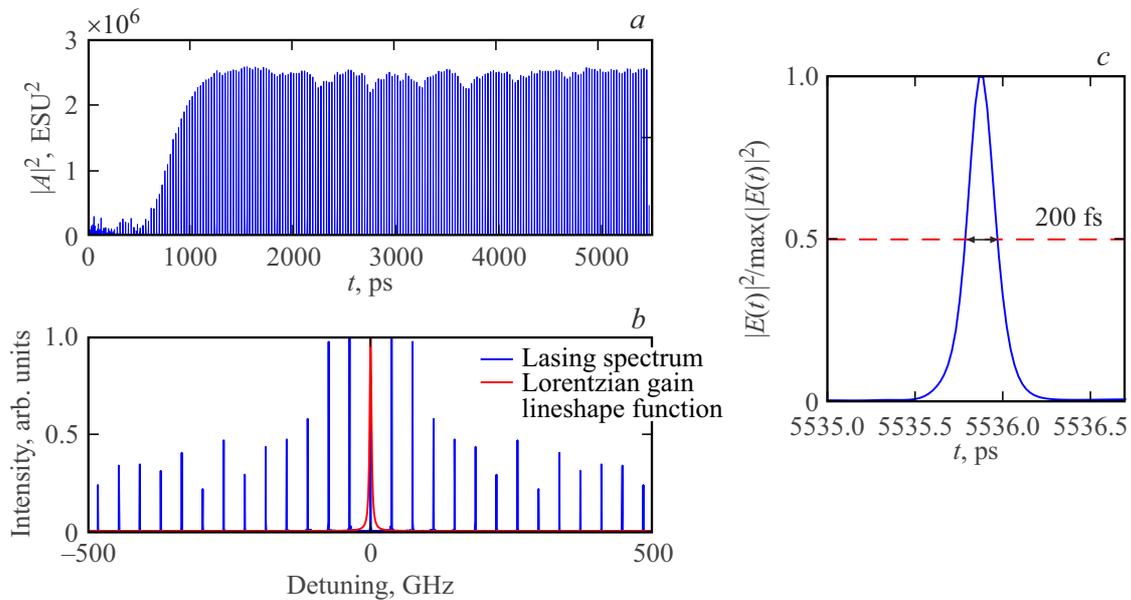


Рис. 7. *a* — временная зависимость квадрата амплитуды электрического поля (интенсивности генерации) от времени на выходе из резонатора; *b* — спектр генерации (синяя кривая), лоренцев контур линии усиления активной среды (красная кривая); *c* — одиночный импульс генерации, когда соотношение дипольных моментов в поглотителе и усилителе равно 3.

(таблица), расчет показал режим синхронизации мод за счет действия поглотителя в некогерентном режиме. Пример импульсов генерации, их спектра, спектров излучения поглотителя и усилителя дан на рис. 8, *a, b* соответственно.

Из рис. 8, *b* видно, что спектр генерации лазера (синие кривые) целиком размещается внутри контура линии

поглощения (зеленая кривая), так как поглотитель работает в некогерентном режиме

Формы одиночных импульсов генерации в данном случае (рис. 8) и для случая КСМ, когда использовались параметры из таблицы (этой ситуации соответствуют результаты расчета, показанные на рис. 5), приведены на рис. 9, *a, b* соответственно. Из этого рисунка видно, что длительность импульса при некогерентной

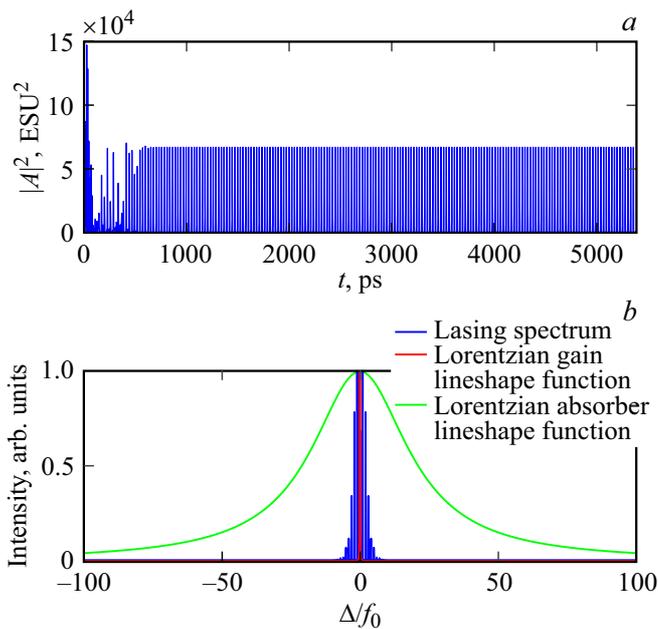


Рис. 8. *a* — временная зависимость квадрата амплитуды электрического поля (интенсивности генерации) от времени на выходе из резонатора, *b* — спектр генерации (синяя кривая), лоренцев контур линии усиления активной среды (красная кривая) и лоренцев контур линии поглощения поглотителя (зеленая кривая). Параметры поглощающей среды: $T_1 = 6$ ps, $T_2 = 0.1$ ps, $N_0 = 8.5 \cdot 10^{14}$ cm $^{-3}$, остальные параметры указаны в таблице.

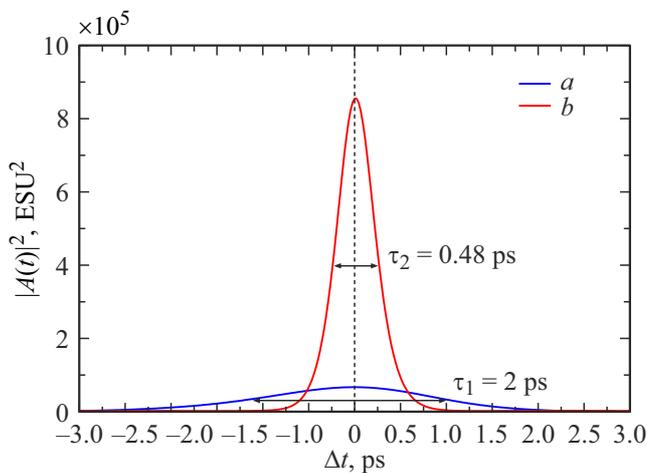


Рис. 9. Форма импульса генерации при (*a*) некогерентной синхронизации мод для ситуации на рис. 8 (синяя кривая), (*b*) когерентной синхронизации мод (красная кривая) для ситуации на рис. 5, параметры расчета указаны в таблице.

синхронизации мод (рис. 9, *a*) увеличилась в 4.2 раза, а пиковая амплитуда уменьшилась в 3.5 раз. Полная энергия импульса уменьшилась в 2.7 раза (почти в три раза).

Приведенный пример иллюстрирует преимущества режима КСМ по отношению к стандартной ПСМ с

насыщающимся поглотителем. Он позволяет получать более короткие импульсы с большей энергией. Причина этого понятна, так как в режиме насыщения часть энергии излучения на этапе поглощения безвозвратно теряется. А при КСМ импульс распространяется в поглотителе в режиме СИП практически без потерь. Также расчеты показали более узкий по сравнению со случаем КСМ диапазон изменения параметров поглотителя и их влияние на длительность импульсов.

Заключение

Детально обсуждены физические механизмы формирования коротких импульсов в режиме КСМ и проиллюстрировано влияние параметров когерентного поглотителя. Проведено сравнение режима КСМ с режимом синхронизации мод, формируемым насыщаемым поглотителем. Показано, что последний менее эффективен — длительность импульсов при этом становится больше, а их энергия меньше. Также расчеты показали, что имеется меньше возможностей влиять на диапазон изменения длительности импульсов при вариациях параметров сред. Численные расчеты также показали стабилизирующую роль поглотителя для получения устойчивого режима КСМ.

Высказанные выше идеи могут лежать в основе удобного способа генерации фемтосекундных импульсов в компактных лазерах с ГГц-частотой повторения, например, в лазерных системах на квантовых точках, значение времени релаксации T_2 в которых можно увеличивать при их охлаждении [44]. Режим КСМ позволяет сократить длительности импульсов генерации в таких системах в несколько раз по сравнению с теми, которые достигаются в них при использовании насыщающегося поглотителя.

Финансирование работы

Работа Р.М. Архипова, А.В. Пахомова и О.О. Дьячковой была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики „БАЗИС“. Исследования М.В. Архипова и Н.Н. Розанова поддержаны Государственным заданием ФТИ им. А.Ф. Иоффе, тема 0040-2019-0017.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] U. Keller. *Nature*, **424**, 831 (2003).
- [2] U. Keller. *Appl. Phys. B*, **100**, 15 (2010).
- [3] E. Rafailov, M. Cataluna, W. Sibbett. *Nature Photon.*, **1**, 395 (2007).
- [4] J.C. Diels, W. Rudolph. *Ultrashort laser pulse phenomena* (Elsevier, 2006).

- [5] П.Г. Крюков. УФН, **183**, 897 (2013). [P.G. Kryukov. Phys. Usp., **56**, 849 (2013)].
- [6] S.L. McCall, E.L. Hahn. Phys. Rev., **183**, 457 (1969).
- [7] П.Г. Крюков, В.С. Летохов. УФН, **99**, 169 (1969). [P.G. Kryukov, V. Letokhov. Sov. Phys. Usp., **12**, 641 (1970)].
- [8] L. Allen, J.H. Eberly. *Optical resonance and two-level atoms* (Wiley, New York, 1975).
- [9] Н.Н. Розанов, И.А. Александров, М.В. Архипов, Р.М. Архипов, И. Бабушкин, Н.А. Веретенев, А.В. Дадеко, Д.А. Тумаков, С.В. Федоров. Квант. Электрон., **51**, 959 (2021). [N.N. Rosanov, I.A. Aleksandrov, M.V. Arkhipov, R.M. Arkhipov, I. Babushkin, N.A. Veretenov, A.V. Dadeko, D.A. Tumakov, S.V. Fedorov. Quantum Electron., **51**, 959 (2021)].
- [10] V.V. Kozlov. Phys. Rev. A, **56**, 1607 (1997).
- [11] C.R. Menyuk, M.A. Talukder. Phys. Rev. Lett., **102**, 023903 (2009).
- [12] M.A. Talukde, C.R. Menyuk. Phys. Rev. A, **79**, 063841 (2009).
- [13] V.V. Kozlov, N.N. Rosanov, S. Wabnitz. Phys. Rev. A, **84**, 053810 (2011).
- [14] V.V. Kozlov, N.N. Rosanov. Phys. Rev. A, **87**, 043836 (2013).
- [15] Р.М. Архипов, М.В. Архипов, И.В. Бабушкин. Письма в ЖЭТФ, **101**, 164 (2015). [R. Arkhipov, M. Arkhipov, I. Babushkin. JETP Lett., **101**, 149 (2015)].
- [16] R. Arkhipov. *Modeling of mode-locking regimes in lasers*. Ph.D. thesis, Humboldt-Universität zu Berlin, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät (2015).
- [17] R. Arkhipov, M. Arkhipov, I. Babushkin. Opt. Commun., **361**, 73 (2016).
- [18] R.M. Arkhipov, M.V. Arkhipov, I. Babushkin, N.N. Rosanov. Opt. Lett., **41**, 737 (2016).
- [19] R. Arkhipov, M. Arkhipov, A. Pakhomov, I. Babushkin, N. Rosanov. Phys. Rev. A, **105**, 013526 (2022).
- [20] A. Pakhomov, M. Arkhipov, N. Rosanov, R. Arkhipov. Phys. Rev. A, **107** (1), 013510 (2023).
- [21] R.M. Arkhipov, A.V. Pakhomov, M.V. Arkhipov, I.V. Babushkin, N.N. Rosanov. Sci. Rep., **11**, 1147 (2021).
- [22] A. Outafat, S. Faci, E. Richalot, S. Protat, C. Algan. Opt. Quant. Electron., **54** (5), 283 (2022).
- [23] М.В. Архипов, Р.М. Архипов, А.А. Шимко, И.В. Бабушкин. Письма в ЖЭТФ, **101**, 250 (2015). [M.V. Arkhipov, R.M. Arkhipov, A.A. Shimko, I. Babushkin. JETP Lett., **101**, 232 (2015)].
- [24] M.V. Arkhipov, A.A. Shimko, R.M. Arkhipov, I. Babushkin, A.A. Kalinichev, A. Demircan, U. Morgner, N.N. Rosanov. Laser Phys. Lett., **15**, 075003 (2018).
- [25] М.В. Архипов, Р.М. Архипов, А.А. Шимко, И. Бабушкин, Н. Н. Розанов. Письма в ЖЭТФ, **109** (10), 657 (2019). [M.V. Arkhipov, R.M. Arkhipov, A.A. Shimko, I. Babushkin, N.N. Rosanov. JETP Lett., **109** (10), 634 (2019)].
- [26] M.V. Arkhipov, A.A. Shimko, N.N. Rosanov, I. Babushkin, R.M. Arkhipov. Phys. Rev. A, **101** (1), 013803 (2020).
- [27] H. Haus. IEEE J. Quantum Electronics, **11** (9), 736 (1975).
- [28] H.A. Haus. J. Appl. Phys., **46** (7), 3049 (1975).
- [29] H.A. Haus. IEEE J. Selected Topics in Quantum Electronics, **6** (6), 1173 (2000).
- [30] G.H.C. New. IEEE J. Quantum Electronics, **10** (2), 115 (1974).
- [31] F.X. Kartner, I.D. Jung, U. Keller. IEEE J. Selected Topics in Quantum Electronics, **2** (3), 540 (1996).
- [32] F.X. Kurtner, J.A. der Au, U. Keller. IEEE J. Selected Topics in Quantum Electronics, **4** (2), 159 (1998).
- [33] R. Paschotta, U. Keller. Appl. Phys. B, **73** (7), 653 (2001).
- [34] A.G. Vladimirov, D. Turaev. Phys. Rev. A, **72** (3), 033808 (2005).
- [35] Y. Song, Z. Wang, C. Wang, K. Panajotov, H. Zhang. Adv. Photon., **2**, 024001 (2020).
- [36] Y. Han, Y. Guo, B. Gao, C. Ma, R. Zhang, H. Zhang. Prog. Quant. Elect., **71**, 100264 (2020).
- [37] J. Liu, J. Wu, H. Chen, Y. Chen, Z. Wang, C. Ma, H. Zhang. Science China Phys., Mech., Astr., **64**, 1 (2021).
- [38] M.G. Thompson, A.R. Rae, M. Xia, R.V. Pentz, I.H. White. IEEE J. Selected Topics in Quantum Electronics, **15** (3), 661 (2009).
- [39] E.U. Rafailov, M.A. Cataluna, W. Sibbett, N.D. Il'inskaya, Y.M. Zadiranov, A.E. Zhukov, V.M. Ustinov, D.A. Livshits, A.R. Kovsh, N.N. Ledentsov. Appl. Phys. Lett., **87**, 081107 (2005).
- [40] A. Yadav, N.B. Chichkov, E.A. Avrutin, A. Gorodetsky, E.U. Rafailov. Prog. Quant. Electron., **87**, 100451 (2023).
- [41] U. Morgner, F.X. Kartner, S.H. Cho, Y. Chen, H.A. Haus, J.G. Fujimoto, E.P. Ippen, V. Scheuer, G. Angelow, T. Tschudi. Opt. Lett., **24**, 411 (1999).
- [42] G. Mourou. Rev. Mod. Phys., **91** (3), 030501 (2019).
- [43] H.M. Gibbs, R.E. Slusher. Appl. Phys. Lett., **18** (11), 505 (1971).
- [44] P. Borri, W. Langbein, S. Schneider, U. Woggon, R. Sellin, D. Ouyang, D. Bimberg. Phys. Rev. B, **66**, 081306 (2002).