

Параллельная многокубитная эволюция в протоколе квантового неразрушающего взаимодействия

© Е.Н. Башмакова, Е.А. Вашукевич, Т.Ю. Голубева

Санкт-Петербургский государственный университет,
199034 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: bashmakova.elizaveta@mail.ru

Поступила в редакцию 23.04.2023 г.

В окончательной редакции 23.04.2023 г.

Принята к публикации 10.05.2023 г.

На сегодняшний день двухкубитные логические квантовые вентили стали неотъемлемой частью квантовых вычислений, поэтому исследование методов их реализации представляется важной практической проблемой для различных квантово-оптических и информационных приложений. В настоящей работе рассмотрен протокол многомодового квантового неразрушающего взаимодействия между атомным ансамблем и светом с орбитальным угловым моментом с целью анализа применимости этого протокола в вычислениях в дискретных переменных. Построен многомодовый гамильтониан взаимодействия и проанализирована динамика полевых и атомных переменных в зависимости от структуры управляющего поля. Подробно обсуждена процедура выделения кубитных невзаимодействующих подсистем на множестве атомных и полевых мод для различных значений орбитального момента управляющего поля. Такая процедура помогает свести рассматриваемый протокол к параллельной эволюции двухкубитных замкнутых систем.

Ключевые слова: квантовое неразрушающее взаимодействие, моды Лагерра-Гаусса, орбитальный угловой момент, кубиты, дискретные переменные.

DOI: 10.21883/OS.2023.07.56130.4902-23

1. Введение

На сегодняшний день предложены различные схемы квантовых вычислений как для дискретных [1], так и для непрерывных переменных [2], многие из которых были успешно реализованы экспериментально [3,4]. Работа с квантовыми системами на языке непрерывных переменных обладает как рядом неоспоримых достоинств [5], так и недостатков, к числу которых можно отнести конечный ресурс сжатия реальных квантовых осцилляторов [6] и сложность экспериментальной реализации негауссова преобразования для проведения произвольной вычислительной операции [7]. Вычисления на языке дискретных переменных лишены этих сложностей, однако также имеют ключевой фактор, ограничивающий их применение, а именно, принципиально вероятностный характер успешной вычислительной операции, что при масштабировании вычислительной схемы очевидно приведёт к увеличению времени вычислений и потере квантового превосходства. Поэтому усилия многих научных групп направлены на исследование различных физических систем и процессов, таких, чтобы выполнение операций на них было бы наиболее эффективно. Для построения универсальных квантовых вычислений в дискретных переменных должен существовать способ реализации универсального набора квантовых логических операций [8]. Другими словами, любая допустимая последовательность вентилей из универсального набора. В нашей предыдущей работе [9] мы предложили метод

реализации квантовых однокубитных вентилей, а также обобщили кубитные протоколы на системы более высокой размерности — кудиты. В настоящей работе мы исследуем перспективы многомодового квантового неразрушающего взаимодействия для построения двухкубитного логического преобразования, в дальнейшем планируя также расширить анализ на системы более высокой размерности.

Одним из многообещающих ресурсов для квантовых вычислений в дискретных переменных является свет с орбитальным угловым моментом (ОУМ) [10], поскольку проекция ОУМ может принимать любые целочисленные значения, что дает возможность работать в гильбертовом пространстве высокой размерности [11]. Моды Лагерра-Гаусса, обладающие орбитальным моментом, также имеют высокую устойчивость при распространении в турбулентной атмосфере, то есть показывают сравнительно высокое время декогеренции [12]. Поскольку речь идет о хорошо локализованных пространственных модах, в настоящее время существуют надежно зарекомендовавшие себя методы генерации, разделения и детектирования такого многомодового излучения, основанные на применении фазовых голограмм [13], q-пластин [14] и систем цилиндрических линз [15]. Однако для выполнения эффективных преобразований над модами с разными ОУМ с помощью таких оптических элементов необходимо изменять параметры системы специфически для каждой моды, что не может быть удовлетворительным для схем квантовых вычислений. Потенциал высокоразмерного гильбертова пространства

для вычислений в дискретных переменных можно оценивать дуально: мы можем либо ввести на множестве физических состояний несколько кубитных систем, либо работать с меньшим числом объектов более высокой размерности — кудитами. Преимущества того или иного подхода остаются открытым вопросом, так как работа с множеством кубитов может вызвать сложности с инициацией входного многокубитного состояния, тогда как работая с кудитами, сложнее в некоторых случаях обеспечить когерентность преобразования различных кудитных состояний [9]. Были проделаны успешные попытки построения одномодовых квантовых логических вентилях над одиночными фотонами, обладающими ОУМ [9,16,17]. В то же время построение двумодовых вентилях над такими системами является нетривиальной задачей в силу отсутствия прямого (без посредников) взаимодействия между световыми состояниями.

В нашей работе мы построили многомодовый гамильтониан квантового неразрушающего взаимодействия и проанализировали динамику полевых и атомных переменных. Мы подробно обсуждаем процедуру выделения кубитных невзаимодействующих подсистем на множестве атомных и полевых мод. Мы показываем, что методы кодирования кубитов, при которых систему можно сепарировать на невзаимодействующие части, оказываются различными для различных режимов взаимодействия, переключение между которыми возможно сменой пространственного профиля управляющего поля. Корректная процедура кодирования логических состояний кубитов помогает свести рассматриваемый протокол к параллельной эволюции нескольких двухкубитных замкнутых подсистем.

2. Квантовое неразрушающее взаимодействие между светом с ОУМ и атомным ансамблем

2.1. Модель и гамильтониан взаимодействия

Мы рассматриваем атомный ансамбль с 4-уровневыми атомами (рис. 1). Мы полагаем, что ансамбль атомов локализован в цилиндрической ячейке площадью S и протяженностью L вдоль оси z . Будем рассматривать нижние энергетические уровни $|1\rangle$ и $|2\rangle$ как долгоживущие, и распадом этих уровней на интересующих нас временах взаимодействия света с атомным ансамблем мы пренебрегаем. Мы полагаем, что атомы изначально приготовлены в состоянии $|1\rangle$, средний коллективный спин которого направлен вдоль оси x , а магнитный спиновый момент равен $m_x = -\frac{1}{2}$. Уровни $|3\rangle$ и $|3'\rangle$ в силу большой отстройки Δ практически не заселяются.

Ансамбль взаимодействует с сильным классическим управляющим полем $\mathbf{E}_d(\mathbf{r}, t)$, представляющим собой квазимонохроматическую волну в парааксиальном приближении на частоте ω_0 , и квантовым полем $\hat{E}_s(\mathbf{r}, t)$ с несущей частотой также ω_0 . Частота ω_0 отстроена на

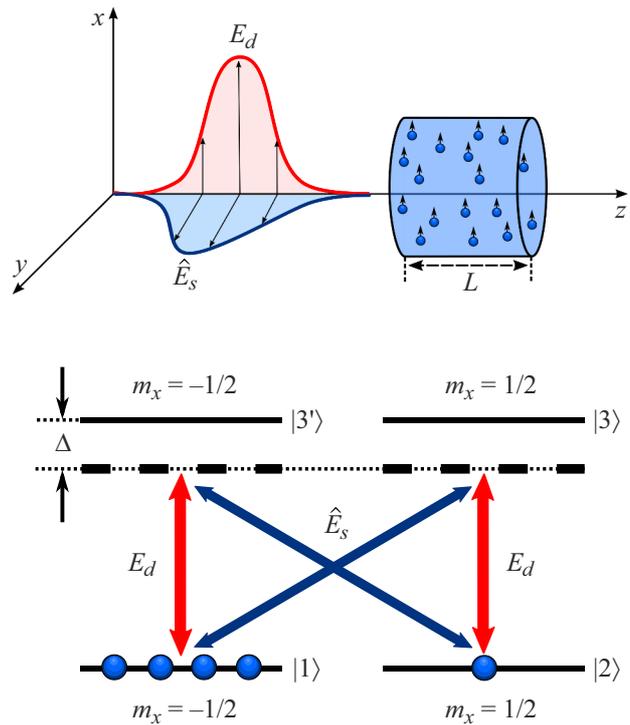


Рис. 1. Геометрия взаимодействия управляющего и квантового полей с атомным ансамблем, а также схематическое изображение атомных уровней.

величину $-\Delta$ от частот атомных переходов $\omega_{13'}$ и ω_{23} соответственно. Квантовое и классическое поля будем рассматривать в виде суперпозиции мод с определённым угловым моментом:

$$\hat{E}_s(\mathbf{r}, t) = \frac{-i\sqrt{\hbar\omega_0}}{\sqrt{8\pi c}} \sum_m \hat{a}_m(z, t) U_m^{(s)}(\boldsymbol{\rho}) e^{ik_0 z - i\omega_0 t} \mathbf{e}_y + H.c., \quad (1)$$

$$\mathbf{E}_d(\mathbf{r}, t) = -i \sum_n E_n(z, t) U_n^{(d)}(\boldsymbol{\rho}) e^{ik_0 z - i\omega_0 t} \mathbf{e}_x + c.c. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ — векторы поляризации, которые подобраны таким образом, чтобы управляющее классическое поле действовало на переходах $|1\rangle - |3'\rangle$ и $|2\rangle - |3\rangle$, а квантовое — на переходах $|1\rangle - |3\rangle$ и $|2\rangle - |3'\rangle$, $U_m^{(s)}(\boldsymbol{\rho}), U_n^{(d)}(\boldsymbol{\rho})$ — функции Лагерра-Гаусса квантового и классического полей соответственно, операторы $\hat{a}_m(z, t)$ имеют смысл операторов уничтожения, действующих в моде с определённой проекцией орбитального углового момента на ось распространения m .

Здесь стоит упомянуть, что, пользуясь результатами работы [18], мы полагаем длину ячейки L достаточно малой по сравнению с релеевским радиусом классического и квантового пучков и пренебрегаем дифракцией на масштабах взаимодействия. В работе [19] было показано, что в плоскости перетяжки поперечный пространственный профиль лаггер-гауссовой моды представляет собой кольцо радиусом $w\sqrt{|l| + 1/2}$, где w — радиус перетяжки пучка, индекс l отвечает за проекцию орбитального

углового момента. Площадь поперечного сечения пучка определяется как $S_l = \pi w^2 \frac{(|l|+1)}{4}$. В рамках рассматриваемого атомно-светового взаимодействия необходимо присутствие и управляющего классического, и квантового сигнального полей для осуществления двухфотонных переходов. Полевые операторы и амплитуда классического поля в свободном пространстве обычно определяются таким образом, что квадрат амплитуды классического поля и оператор числа частиц квантового поля имеют смысл потока фотонов через площадь поперечного сечения моды в единицу времени. Для корректного описания взаимодействия ансамбля атомов с классическими и квантовыми пучками света с разными площадями перенормируем амплитуды, операторы и модовые функции на площадь поперечного сечения моды, таким образом переходя к безразмерным амплитудам и операторам, имеющим одинаковую нормировку вне зависимости от индекса моды.

Для того чтобы обеспечить наилучшее перекрытие поперечных пространственных профилей классического и квантового полей, полагаем перетяжки полей различными, и будем в дальнейшем варьировать отношение этих перетяжек, управляя перекрытием мод и, следовательно, эффективными константами взаимодействия. Тогда функции пространственного распределения амплитуды в поперечной плоскости для квантового и классического полей определяются как нормированные распределения Лагерра-Гаусса:

$$U_l^{(j)}(\boldsymbol{\rho}) = \sqrt{\frac{(|l|+1)}{2|l|!}} \left(\frac{\boldsymbol{\rho}\sqrt{2}}{w^{(j)}}\right)^{|l|} \exp\left(-\frac{\boldsymbol{\rho}^2}{(w^{(j)})^2}\right) e^{il\phi}, \quad (3)$$

$$\sum_l U_l^{(j)}(\boldsymbol{\rho}) U_l^{(j)*}(\boldsymbol{\rho}') = \delta^{(2)}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'), \quad (4)$$

$$\int d\boldsymbol{\rho} U_l^{(j)*}(\boldsymbol{\rho}) U_{l'}^{(j)}(\boldsymbol{\rho}) = \delta_{l,l'} \pi (w^{(j)})^2 \frac{(|l|+1)}{4} = S_l^{(j)}, \quad (5)$$

$j = s, d.$

Здесь $w^{(j)}$ – радиус перетяжки пучка квантового поля при $j = s$ и радиус перетяжки классического поля при $j = d$. Коммутационные соотношения для полевых операторов $\hat{a}_m(z, t)$ из (1) можно записать в виде

$$\left[\hat{a}_m(z, t), \hat{a}_{m'}^\dagger(z', t)\right] = \frac{c\delta_{m,m'}}{S_m^{(s)}} \left(1 - \frac{i}{k_0} \frac{\partial}{\partial z}\right) \delta(z - z'). \quad (6)$$

Для описания атомного ансамбля будем использовать коллективные переменные когерентности и заселенности:

$$\hat{\sigma}_{ij}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^N \hat{\xi}_{ij}^k(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k), \quad (7)$$

$$\hat{N}_i = \hat{\sigma}_{ii}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^N \hat{\xi}_{ii}^k(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \quad (8)$$

(индекс k нумерует атомы, N — суммарное число атомов), операторы $\hat{\xi}_{ij} = |i\rangle\langle j|$ — проекторы состояния

$|j\rangle$ на состояние $|i\rangle$ в момент времени t . Положение k -го атома задается радиусом-вектором \mathbf{r}_k . Коммутационные соотношения для операторов когерентности имеют вид

$$\begin{aligned} [\hat{\sigma}_{ij}(\mathbf{r}, t), \hat{\sigma}_{mn}(\mathbf{r}', t)] &= (\delta_{jm}\hat{\sigma}_{in}(\mathbf{r}, t) - \delta_{ni}\hat{\sigma}_{mj}(\mathbf{r}, t)) \\ &\times \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (9)$$

Согласно [20], гамильтониан квантового неразрушающего (QND — quantum non-demolition) взаимодействия в дипольном приближении имеет вид:

$$\hat{H}_{\text{QND}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{H}_1 - \hat{H}_2), \quad (10)$$

где \hat{H}_1 — часть гамильтониана взаимодействия, описывающая преобразование типа светоделителя, а \hat{H}_2 описывает процесс параметрической генерации. В нашем случае многомодового взаимодействия также удастся выделить две соответствующие части гамильтониана. В приближении вращающейся волны после исключения слагаемых, меняющихся на двойной оптической частоте, гамильтонианы имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= i\hbar \int d^3r \left[g\hat{\sigma}_{13}^\dagger(\mathbf{r}, t) \sum_m \hat{a}_m(z) U_m^{(s)}(\boldsymbol{\rho}) e^{-i\Delta t + ik_0 z} + \right. \\ &\left. + \hat{\sigma}_{23}^\dagger(\mathbf{r}, t) \sum_n \Omega_n(z, t) U_n^{(d)}(\boldsymbol{\rho}) e^{-i\Delta t + ik_0 z} \right] + H.c., \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_2 &= i\hbar \int d^3r \left[g\hat{\sigma}_{23'}^\dagger(\mathbf{r}, t) \sum_m \hat{a}_m(z) U_m^{(s)}(\boldsymbol{\rho}) e^{-i\Delta t + ik_0 z} + \right. \\ &\left. + \hat{\sigma}_{13'}^\dagger(\mathbf{r}, t) \sum_n \Omega_n(z, t) U_n^{(d)}(\boldsymbol{\rho}) e^{-i\Delta t + ik_0 z} \right] + H.c. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь введены обозначения для константы связи атома с полем g и частот Раби $\Omega_n(z, t)$, отнесённых к моде классического поля с номером n :

$$g = \sqrt{\frac{\omega_0}{8\pi\hbar c}} d_{13}, \quad (13)$$

$$\Omega_n(z, t) = \frac{E_n(\mathbf{r}, t) d_{23}}{\hbar}, \quad (14)$$

где d_{ij} — матричные элементы оператора дипольного момента перехода между уровнями $|i\rangle$ и $|j\rangle$, которые будем считать вещественными ($d_{ij} = d_{ji}$).

Поскольку в рамках принятых приближений верхние атомные уровни не заселяются в процессе взаимодействия, мы имеем возможность провести адиабатическое исключение этих уровней. В таком случае в системе происходят только двухфотонные переходы, сопровождающиеся переходом атомов с уровня $|1\rangle$ на уровень $|2\rangle$ и обратно. При этом, поскольку квантовое поле мы считаем достаточно слабым по сравнению с классическим, то такие переходы происходят редко, и заселённость уровня $|1\rangle$ можно считать неизменной и равной N . В таком

случае, как показано в [21], существует возможность воспользоваться приближением Хольштейна-Примакова и заменить операторы спиновой когерентности $\hat{\sigma}_{12}(\mathbf{r}, t)$ на бозонные операторы $\hat{b}(\mathbf{r}, t)$. Гамильтониан взаимодействия можно записать в следующем виде:

$$\hat{H}_1 = -\hbar \int dz \frac{2g\sqrt{N}}{\Delta} \sum_{m,k,l} \Omega_k^* \hat{b}_l^\dagger \hat{a}_m \times \\ \times \int d\rho U_k^{(d)*}(\rho) U_l^{(s)*}(\rho) U_m^{(s)}(\rho) + H.c., \quad (15)$$

$$\hat{H}_2 = -\hbar \int dz \frac{2g\sqrt{N}}{\Delta} \sum_{m,k,l} \Omega_k \hat{b}_l^\dagger \hat{a}_m^\dagger \\ \times \int d\rho U_k^{(d)}(\rho) U_l^{(s)*}(\rho) U_m^{(s)*}(\rho) + H.c. \quad (16)$$

Здесь мы, следуя подходу [20], опустили слагаемые, отвечающие за эффект Штарка от классического и квантового полей. Новые атомные операторы $\hat{b}_l(z, t)$ введены как проекции бозонных операторов $\hat{b}(\mathbf{r}, t)$ на лаггер-гауссов профиль с индексом l :

$$\hat{b}_l(z, t) = \int d\rho \hat{b}(\mathbf{r}, t) U_l^s(\rho), \quad (17)$$

$$[\hat{b}_m(z, t), \hat{b}_{m'}^\dagger(z', t)] = \frac{\delta_{l,l'}}{S_l^{(s)}} \delta(z - z'). \quad (18)$$

Отдельно хочется обсудить интегралы от функций Лагерра-Гаусса, возникающие в (15), (16). Пользуясь явным видом функций $U_l^{(j)}$, заданным выражением (3), можно упростить вид интегралов:

$$\int d\rho U_k^{(d)*}(\rho) U_l^{(s)*}(\rho) U_m^{(s)}(\rho) = \\ = \int d\rho |U_k^{(d)}(\rho)| |U_l^{(s)}(\rho)| |U_m^{(s)}(\rho)| \delta_{k,l-m} \equiv \chi_{l-m}, \quad (19)$$

$$\int d\rho U_k^{(d)}(\rho) U_l^{(s)*}(\rho) U_m^{(s)*}(\rho) = \\ = \int d\rho |U_k^{(d)}(\rho)| |U_l^{(s)}(\rho)| |U_m^{(s)}(\rho)| \delta_{k,l+m} \equiv \chi_{l+m}. \quad (20)$$

Наличие символа Кронекера в выражениях (19), (20) позволяет сформулировать некоторые правила отбора для взаимодействующих мод, которые мы подробнее обсудим ниже. Подставляя выражения для интегралов перекрытия в (15),(16), получим выражения для одномерного многомодового гамильтониана:

$$\hat{H}_{QND} = -\frac{\sqrt{2}\hbar g\sqrt{N}}{\Delta} \int dz \sum_{m,l} \left(\chi_{l-m} \Omega_{l-m} \left[\hat{b}_l^\dagger \hat{a}_m + b_l \hat{a}_m^\dagger \right] \right. \\ \left. - \chi_{l+m} \Omega_{l+m} \left[\hat{b}_l^\dagger \hat{a}_m^\dagger + \hat{b}_l \hat{a}_m \right] \right). \quad (21)$$

Константы взаимодействия χ_k представляют собой интегралы перекрытия поперечных пространственных профилей мод управляющего поля, квантового поля и спиновой когерентности. Мы имеем возможность управлять величиной отдельных констант геометрически, изменяя соотношение перетяжек световых полей [9]. Стоит отметить, что константы взаимодействия инвариантны относительно смены знака индекса: $\chi_{l-m} = \chi_{m-l}$.

2.2. Уравнения Гейзенберга и соотношения входа-выхода

Отметим, что полученное выражение для гамильтониана (21) не позволяет наглядно увидеть, что мы действительно имеем дело с QND-взаимодействием. Продемонстрируем, что гамильтониан (21) обеспечивает квантовое неразрушающее взаимодействие атомной и полевой систем подобно описанному в [20]. Для этого перейдём к другому набору мод, представляющему собой суперпозицию мод с ОУМ:

$$\hat{a}_0 = \hat{a}_0, \quad \hat{b}_0 = \hat{b}_0, \quad (22)$$

$$\hat{a}_m^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_m + \hat{a}_{-m}), \quad (23)$$

$$\hat{a}_m^{(-)} = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\hat{a}_m - \hat{a}_{-m}), \quad (24)$$

$$\hat{b}_m^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{b}_m + \hat{b}_{-m}), \quad (25)$$

$$\hat{b}_m^{(-)} = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\hat{b}_m - \hat{b}_{-m}). \quad (26)$$

Кроме того, для дальнейших целей будет полезно положить накачку симметричной по ОУМ и принять $\Omega_k = \Omega_{-k}$. Чтобы избежать путаницы, далее будем называть одной модой управляющего поля пару мод с моментами k и $-k$, поскольку рассматривается только симметричный спектр. Гамильтониан (21) в новых переменных и с учётом симметричности накачки значительно упрощается:

$$\hat{H}_{QND} = \hat{H}^{(+)} + \hat{H}^{(-)}, \quad (27)$$

$$\hat{H}^{(+)} = \int dz \left[\frac{\kappa_0}{2} \chi_0 \hat{p}_0 \hat{y}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\kappa_k}{\sqrt{2}} \chi_k (\hat{p}_k^{(+)} \hat{y}_0 + \hat{p}_0 \hat{y}_k^{(+)}) \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \kappa_{|m-k|} \chi_{m-k} \hat{p}_k^{(+)} \hat{y}_m^{(+)} \right], \quad (28)$$

$$\hat{H}^{(-)} = \int dz \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \kappa_{|m-k|} \chi_{m-k} \hat{p}_k^{(-)} \hat{y}_m^{(-)}, \quad (29)$$

$$\kappa_k = \frac{4\hbar\sqrt{2}g\sqrt{N}}{\Delta} \Omega_k. \quad (30)$$

Здесь операторы $\{\hat{q}_i^{(\pm)}, \hat{p}_i^{(\pm)}\}$ являются квадратурными компонентами операторов $\hat{b}_i^{(\pm)}$, описывающих атомную

систему, $\{\hat{x}_i^{(\pm)}, \hat{y}_i^{(\pm)}\}$ — квадратурными компонентами операторов $\hat{a}_i^{(\pm)}$, описывающих полеую систему. Можно заметить, что в выбранных нами переменных гамильтониан распадается на две не взаимодействующие части, поскольку операторы с различными верхними индексами коммутируют:

$$[\hat{q}_m^j, \hat{p}_k^i] = [\hat{x}_m^j, \hat{y}_k^i] = \frac{i}{2S_m^{(s)}} \delta_{k,m} \delta_{i,j}, \quad (31)$$

$$k, m \in [1, \infty); i, j = \{(+), (-)\}.$$

Таким образом, гамильтониан $\hat{H}^{(+)}$ обеспечивает взаимодействие атомных и полевых мод с индексами 0 и (+) по типу QND посредством различных мод управляющего поля с ОУМ (на момент управляющего поля указывает нижний индекс у κ_k). Моды с верхним индексом (-) при этом образуют замкнутую подсистему и эволюционируют посредством гамильтониана $\hat{H}^{(-)}$, не взаимодействуя с модами с другими верхними индексами. Для определённости будем далее в контексте построения кубитов следить только за подсистемой, развиваемой гамильтонианом $\hat{H}^{(+)}$, и будем опускать верхний индекс для простоты изложения. Кроме того, ограничимся рассмотрением только тех ситуаций, когда спектр по ОУМ управляющего поля ограничен одной модой с номером k . Это связано с тем, что для случаев многомодового управляющего поля, то есть когда в (28) мы должны суммировать по индексу k , каждая мода атомного ансамбля взаимодействует со многими модами квантового поля. При этом эффективное интегральное время взаимодействия, вычисляемое как $T_k = \int_0^T dt \Omega_k^2(t)/\Delta^2$ различно для разных Ω_k , что приводит к ещё большему усложнению в картине взаимодействия.

Для записи соотношений входа-выхода в присутствии одной моды управляющего поля Ω_k перейдем к интегральным безразмерным операторам квадратур согласно следующим выражениям:

$$\hat{X}_m(z) = \frac{\int_0^T \Omega_k(t) \hat{x}_m^s(z, t) dt}{\sqrt{\int_0^T \Omega_k^2(t) dt}}, \quad (32)$$

$$\hat{Y}_m(z) = \frac{\int_0^T \Omega_k(t) \hat{y}_m^s(z, t) dt}{\sqrt{\int_0^T \Omega_k^2(t) dt}}, \quad (33)$$

$$\hat{Q}_l(t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^L \hat{q}_l^s(z, t) dz, \quad (34)$$

$$\hat{P}_l(t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^L \hat{p}_l^s(z, t) dz. \quad (35)$$

Соотношения входа-выхода для новых операторов квадратур, эволюция которых осуществлялась гамильтонианом (28), можно записать следующим образом:

$$\hat{X}_m^{out} = \hat{X}_m^{in} + \tilde{\chi}_{m-k} \hat{P}_{m-k}^{in}, \quad (36)$$

$$\hat{Q}_{m-k}^{out} = \hat{Q}_{m-k}^{in} + \tilde{\chi}_{m-k} \hat{Y}_m^{in}, \quad (37)$$

$$\hat{Y}_m^{out} = \hat{Y}_m^{in}, \quad (38)$$

$$\hat{P}_{m-k}^{out} = \hat{P}_{m-k}^{in}. \quad (39)$$

Здесь введены верхние индексы *in* и *out* согласно следующему правилу: $\hat{X}_m^{in} = \hat{X}_m(z=0)$, $\hat{X}_m^{out} = \hat{X}_m(z=L)$, $\hat{Y}_m^{in} = \hat{Y}_m(z=0)$, $\hat{Y}_m^{out} = \hat{Y}_m(z=L)$, $\hat{Q}_{m-k}^{in} = \hat{Q}_{m-k}(t=0)$, $\hat{Q}_{m-k}^{out} = \hat{Q}_{m-k}(t=T)$, $\hat{P}_{m-k}^{in} = \hat{P}_{m-k}(t=0)$ и $\hat{P}_{m-k}^{out} = \hat{P}_{m-k}(t=T)$.

Безразмерная константа связи для QND-взаимодействия определяется следующим образом:

$$\tilde{\chi}_{m-k} = \frac{2\sqrt{2}g\sqrt{N}\chi_{m-k}}{\sqrt{S_m^{(s)}S_{m-k}^{(s)}}} \sqrt{\int_0^T \frac{\Omega_k^2(0, t)}{\Delta^2} dt}. \quad (40)$$

Здесь, как мы упоминали ранее, интеграл от квадрата частоты Раби определяет эффективное интегральное время взаимодействия и зависит от длительности импульса управляющего поля T .

В данном разделе был проанализирован гамильтониан взаимодействия многомодового света с ОУМ и атомного ансамбля при сложной структуре управляющего поля. Особенности мод с ОУМ позволили сформулировать правила отбора и показать, что взаимодействие является селективным по ОУМ. В базе суммарных и разностных мод, а также при использовании управляющего поля с симметричным спектром по проекции ОУМ гамильтониан описывает QND-взаимодействие атомных и полевых мод. При этом индексы взаимодействующих мод отличаются на величину ОУМ управляющего поля. В следующем разделе рассмотрим полученное операторное преобразование в терминах взаимодействия двух кубитов, а также обратим внимание на различные способы кодировки кубитов при разных значениях ОУМ управляющего поля.

3. Двухкубитные замкнутые подсистемы и их эволюция

3.1. Взаимодействие при $k = 0$

В рамках данного подраздела положим момент управляющего поля равным 0. Для лучшей наглядности эволюции физических атомно-полевых состояний и логических состояний, обеспечиваемой QND-взаимодействием мод с ОУМ, удобно вначале записать соотношения входа-выхода для полевых и атомных мод в форме преобразования Боголюбова:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{A}}^\dagger \\ \hat{\mathbf{B}}^\dagger \end{pmatrix}^{out} = \begin{pmatrix} \mathcal{Y} & \mathcal{S} \\ \mathcal{S} & \mathcal{Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{A}}^\dagger \\ \hat{\mathbf{B}}^\dagger \end{pmatrix}^{in} + \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathcal{S}^* \\ \mathcal{S}^* & \mathbb{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{A}} \\ \hat{\mathbf{B}} \end{pmatrix}^{in}. \quad (41)$$

Здесь для удобства записи введены следующие обозначения: $\hat{\mathbf{A}} = (\hat{A}_0 \ \hat{A}_1 \ \hat{A}_2 \ \dots)^T$, $\hat{\mathbf{B}} = (\hat{B}_0 \ \hat{B}_1 \ \hat{B}_2 \ \dots)^T$. Операторы \hat{A}_i, \hat{B}_j задаются квадратурными компонентами, определёнными в (32)–(35), как $\hat{A}_i = \hat{X}_i + i\hat{Y}_i$, $\hat{B}_i = \hat{Q}_i + i\hat{P}_i$, нижний индекс, как и прежде, отвечает за ОУМ-моды, \mathcal{Y}, \mathcal{O} — единичная и нулевая матрицы. Матрица \mathcal{S} для управляющего поля с ОУМ, равным 0, является диагональной и определена следующим образом:

$$\mathcal{S}_{k,j} = \frac{-i\tilde{\chi}_{k-1}}{2}\delta_{k,j}, \quad \{k, j\} \in [1, \infty). \quad (42)$$

Поскольку в дальнейшем логические состояния кубитов будут кодироваться посредством физических состояний атомной или полевой систем с единичным возбуждением в суперпозиционном по ОУМ состоянии, будет удобно переписать соотношения входа-выхода (42) только для операторов рождения:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{A}}^\dagger \\ \hat{\mathbf{B}}^\dagger \end{pmatrix}^{in} = \begin{pmatrix} \mathcal{Y} & \mathcal{S}^* \\ \mathcal{S}^* & \mathcal{Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{A}}^\dagger \\ \hat{\mathbf{B}}^\dagger \end{pmatrix}^{out} + F(\hat{\mathbf{A}}^{out}, \hat{\mathbf{B}}^{out}). \quad (43)$$

Здесь $F(\hat{\mathbf{A}}^{out}, \hat{\mathbf{B}}^{out})$ — некоторая матричная функция только от операторов уничтожения на выходе схемы, обеспечивающая сохранение коммутационных соотношений.

Для построения двухкубитного преобразования необходимо выбрать базис физических состояний поля и атомов, кодирующий логический базис в двухкубитном пространстве. Выделим состояния с единичным возбуждением как базисные состояния в физическом пространстве состояний:

$$|1\rangle_{m,L} \equiv \hat{A}_m^\dagger |0\rangle_{m,L}, \quad |1\rangle_{k,A} \equiv \hat{B}_k^\dagger |0\rangle_{k,A}. \quad (44)$$

Индексы m, k отвечают за значение ОУМ, L, A обозначают полеую или атомную систему, верхние индексы in опущены. Мы можем выделить несколько замкнутых подсистем: в рассматриваемом случае взаимодействие происходит только между физическими состояниями с одинаковым моментом. Если мы принимаем во внимание конечное количество состояний с разными ОУМ в силу экспериментальных сложностей с генерацией больших значений ОУМ, то, ограничивая максимальный момент квантового состояния некоторым числом K , можно выделить на множестве физических состояний $K/2$ замкнутых двухкубитных подсистем, определяя состояния кубитов следующим образом:

$$|0\rangle_1^j \equiv |1\rangle_{2(j-1),L}, \quad |1\rangle_1^j \equiv |1\rangle_{2j-1,L}, \quad (45)$$

$$|0\rangle_2^j \equiv |1\rangle_{2(j-1),A}, \quad |1\rangle_2^j \equiv |1\rangle_{2j-1,A}. \quad (46)$$

Индекс $j \in [1, K/2]$ отвечает за номер двухкубитной подсистемы, индекс 1 или 2 нумерует кубиты внутри одной подсистемы. Таким образом, мы положили, что логическое состояние $|0\rangle_1^1$ первого кубита первой подсистемы соответствует физическому состоянию с одним

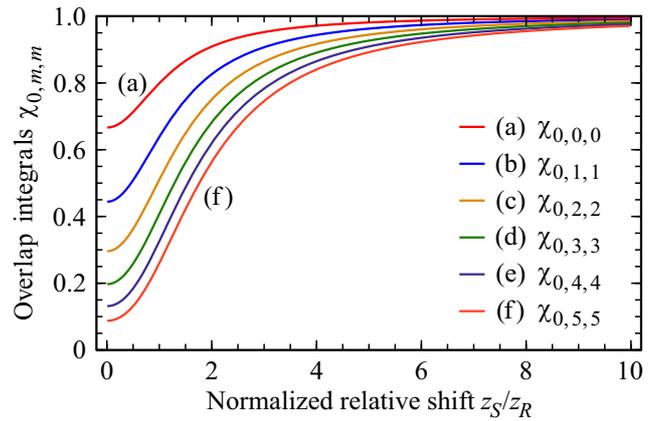


Рис. 2. Зависимость интегралов перекрытия $\chi_{0,m,m}$ от расстояния между перетяжками управляющего и квантового поля в единицах длины Релея. Нетрудно заметить, что все константы асимптотически приближаются к единице при больших расстояниях между перетяжками, т.е. в пределе, когда управляющее поле представляет собой плоскую волну.

фотоном в моде с ОУМ, равным 0, а такое же состояние второго кубита — с одним возбуждением в атомной моде с ОУМ, равным 0. Состояние $|1\rangle_1^1$ можно ассоциировать с возбуждением в полевой моде с ОУМ, равным 1, и так далее. То есть, на каждую пару кубитов приходится два возбуждения — одно в световых модах и одно в атомных. Логические состояния второй двухкубитной подсистемы в используемой нотации будут кодироваться через возбуждения в атомных и полевых модах с ОУМ 2 и 3.

Таким образом, рассматриваемая система содержит в себе множество двухкубитных подсистем, каждая из которых эволюционирует независимо от других. Все константы взаимодействия зависят от одной и той же частоты Раби Ω_0 и можно варьировать только интегралы перекрытия $\chi_{m,k,m-k}$ (мы указываем здесь и на рисунках все три индекса для лучшей читаемости). Как было показано в [18], имеется возможность управлять интегралами перекрытия через геометрию полей: варьируя соотношения радиусов перетяжек классического и квантового полей на входе в атомную ячейку (мы используем в качестве параметра расстояние между перетяжками в единицах длины Релея), можем обеспечить разные значения интегралов перекрытия для мод с разными номерами. Из графика на рис. 2 видно, что при значительных сдвигах перетяжки классического поля относительно квантового, т.е. при радиусе перетяжки управляющего пучка много больше радиуса перетяжки квантового (предел плоской волны), все интегралы перекрытия стремятся к единице. Таким образом, мы можем рассматривать систему из $K/2$ двухкубитных подсистем, где все подсистемы взаимодействуют с одинаковыми константами.

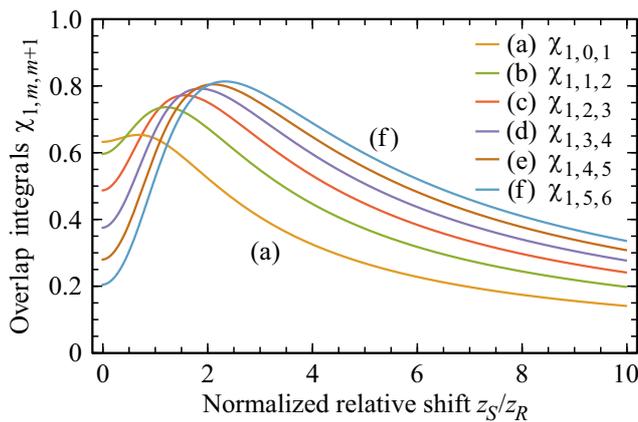


Рис. 3. График зависимости интегралов перекрытия $\chi_{1,m,m+1}$ от геометрического параметра отношения перетяжек управляющего и квантового полей. В отличие от интегралов $\chi_{0,m,m}$ в данном случае невозможно указать значение геометрического параметра, при котором все интегралы становятся равными по величине.

3.2. Взаимодействие при $k = 1$

В случае, если управляющее поле имеет ОУМ, равный 1, картина взаимодействия существенно усложняется в сравнении с ситуацией, рассмотренной в предыдущем подразделе. Можно заметить, что выделение замкнутых двухкубитных подсистем уже не является тривиальной задачей, поскольку состояния взаимодействуют не попарно. Континуум полевых состояний с чётными ОУМ взаимодействует с континуумом атомных состояний с нечётными номерами и наоборот, при этом константы взаимодействия для различных состояний также отличаются (рис. 3).

Возникает вопрос, каким образом можно построить такой базис физических состояний системы, что становится возможным выделение невзаимодействующих подсистем?

Соотношения входа-выхода для операторов рождения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{A}}^\dagger \\ \hat{\mathbf{B}}^\dagger \end{pmatrix}^{in} &= \begin{pmatrix} \mathcal{Y} & \mathcal{H}^* \\ \mathcal{H}^* & \mathcal{Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{A}}^\dagger \\ \hat{\mathbf{B}}^\dagger \end{pmatrix}^{out} + F(\hat{\mathbf{A}}^{out}, \hat{\mathbf{B}}^{out}) = \\ &= \mathcal{M} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{A}}^\dagger \\ \hat{\mathbf{B}}^\dagger \end{pmatrix}^{out} + F(\hat{\mathbf{A}}^{out}, \hat{\mathbf{B}}^{out}). \end{aligned} \quad (47)$$

Здесь $F(\hat{\mathbf{A}}^{out}, \hat{\mathbf{B}}^{out})$, как и ранее, обозначает некоторую матричную функцию только от операторов уничтожения на выходе схемы, обеспечивающую сохранение коммутационных соотношений. Матрица \mathcal{H} определена через следующие матричные элементы:

$$\mathcal{H}_{k,j} = -i \frac{\tilde{\chi}_k \delta_{k+1,j} + \tilde{\chi}_{k-1} \delta_{k-1,j}}{2}, \quad \{k, j\} \in [1, \infty). \quad (48)$$

Матрица \mathcal{H} здесь содержит константы взаимодействия и в отличие от \mathcal{S} не является диагональной: ненулевые

элементы расположены на двух диагоналях, параллельных главной. Для идентификации замкнутых подсистем мы обратимся к свойствам матрицы \mathcal{M} . Определим базис собственных векторов матрицы \mathcal{M} , диагонализующих эту матрицу:

$$\mathcal{M}_{i,j} = \sum_n \lambda_n m_{n,i} m_{n,j}, \quad (49)$$

где λ_n — собственные числа, зависящие от всех констант взаимодействия $\tilde{\chi}_k$, $m_{n,i}$ — i -й элемент n -го собственного вектора матрицы \mathcal{M} . Зная элементы собственных векторов, определим набор собственных операторов $\hat{\mathcal{E}}_n^\dagger$ преобразования входа-выхода (47) следующим образом:

$$\hat{\mathcal{E}}_n^\dagger = \sum_{i=1}^K m_{n,i} \hat{\mathbf{A}}_{i-1}^\dagger + \sum_{i=K+1}^{2K} m_{n,i} \hat{\mathbf{B}}_{i-1}^\dagger. \quad (50)$$

Индексы in и out здесь и далее опущены и будут указываться только там, где это необходимо. Для удобства записи мы также ограничиваем размерность матрицы \mathcal{M} некоторым числом $2K$, однако пока считаем $2K$ в общем стремлящимся к бесконечности.

Операторы $\hat{\mathcal{E}}_n^\dagger$ являются собственными для преобразования входа-выхода, задаваемого соотношением (47), то есть после преобразования просто умножаются на собственные числа λ_n . Анализ показывает, что операторы $\hat{\mathcal{E}}_n^\dagger$ обладают интересным свойством: в линейной комбинации (50) будут одновременно присутствовать либо только полевые операторы с чётными индексами и атомные операторы с нечётными, либо наоборот — полевые операторы с нечётными индексами и атомные с чётными индексами. При этом в спектре матрицы \mathcal{M} размерности $2K$ существует всего $K/2$ отличных друг от друга по модулю собственных чисел. Проследим, какие операторы $\hat{\mathcal{E}}_n^\dagger$ отвечают равным по модулю собственным числам.

1. Пара равных собственных чисел λ_1, λ_2 будет соответствовать такой паре собственных операторов $\hat{\mathcal{E}}_1^\dagger, \hat{\mathcal{E}}_2^\dagger$, что:

$$\begin{cases} m_{1,s} = m_{2,s+K} \\ m_{1,s+K} = m_{2,s} \end{cases} \quad \forall s \in (1, K/2] \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2. \quad (51)$$

То есть, если в некоторый оператор $\hat{\mathcal{E}}_1^\dagger$ входят только полевые операторы с нечётными ОУМ с коэффициентами $m_{1,s}$ и атомные операторы с чётным ОУМ с коэффициентами $m_{1,s+K}$, то в оператор $\hat{\mathcal{E}}_2^\dagger$ будут входить только нечётные атомные операторы с весами $m_{1,s}$ и чётные полевые с весами $m_{1,s+K}$.

2. Пара комплексно сопряжённых собственных чисел λ_1, λ_3 будет соответствовать такой паре собственных операторов $\hat{\mathcal{E}}_1^\dagger, \hat{\mathcal{E}}_3^\dagger$, что:

$$m_{1,s} = -m_{3,s} \quad \forall s \in (1, K] \Leftrightarrow \lambda_1^* = \lambda_3. \quad (52)$$

То есть для каждого собственного оператора $\hat{\mathcal{E}}_1^\dagger$ найдётся оператор $\hat{\mathcal{E}}_3^\dagger$ такой, что линейная комбинация $\frac{\hat{\mathcal{E}}_1^\dagger + \hat{\mathcal{E}}_3^\dagger}{\sqrt{2}}$ выражается только через атомные операторы, а $\frac{\hat{\mathcal{E}}_1^\dagger - \hat{\mathcal{E}}_3^\dagger}{\sqrt{2}}$ зависит только от полевых операторов.

Матрица \mathcal{M} , записанная для комбинаций собственных операторов $\frac{\hat{\mathcal{E}}_i^\dagger \pm \hat{\mathcal{E}}_{i+2}^\dagger}{\sqrt{2}}$, $\frac{\hat{\mathcal{E}}_{i+1}^\dagger \pm \hat{\mathcal{E}}_{i+3}^\dagger}{\sqrt{2}}$, является блочно-диагональной с блоком \mathcal{U}_i с размерностью 4×4 :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_1 & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \cdots & \mathcal{U}_{2K} \end{pmatrix}, \quad (53)$$

$$\mathcal{U}_i = \begin{pmatrix} 1 & \Im[\lambda_i] & 0 & 0 \\ \Im[\lambda_i] & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Im[\lambda_i] \\ 0 & 0 & \Im[\lambda_i] & 1 \end{pmatrix}, \quad (54)$$

$i = 1, 5, 9, \dots, 2K - 3.$

Такое разделение спектра матрицы \mathcal{M} на тетрады собственных чисел ($\lambda_i = \lambda_{i+1} = \lambda_{i+2}^* = \lambda_{i+3}^*$) позволяет определить группы физических состояний, образующих замкнутую систему относительно эволюции посредством QND-взаимодействия, описываемой одним блоком \mathcal{U}_i . Например, первые 4 состояния, отвечающие наибольшему собственному числу λ_1 , можно записать в следующем виде:

$$|1\rangle_{A,o} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathcal{E}}_1^\dagger + \hat{\mathcal{E}}_3^\dagger)|0\rangle_{A,o}, \quad (55)$$

$$|1\rangle_{L,e} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathcal{E}}_1^\dagger - \hat{\mathcal{E}}_3^\dagger)|0\rangle_{L,e}, \quad (56)$$

$$|1\rangle_{A,e} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathcal{E}}_2^\dagger + \hat{\mathcal{E}}_4^\dagger)|0\rangle_{A,e}, \quad (57)$$

$$|1\rangle_{L,o} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathcal{E}}_2^\dagger - \hat{\mathcal{E}}_4^\dagger)|0\rangle_{L,o}. \quad (58)$$

Нижние индексы o, e являются сокращениями от *odd* и *even*. Состояние, определённое равенством (55), является состоянием поля с одним возбуждением, распределённым по суперпозиции мод с чётным ОУМ. Амплитуда вероятности обнаружить фотон в моде с конкретным ОУМ, равным, например, 4, определяется через пятый элемент первого собственного вектора матрицы \mathcal{M} как $\sqrt{2}m_{1,5}$ (50). Аналогично можно описать и остальные состояния.

Как и в предыдущем подразделе, мы можем выделить на пространстве физических состояний $K/2$ замкнутых двухкубитных подсистем, определяя состояния кубитов следующим образом:

$$|0\rangle_1^j \equiv |1\rangle_{L,o}^{(4j-3)}, \quad |1\rangle_1^j \equiv |1\rangle_{A,e}^{(4j-3)}, \quad (59)$$

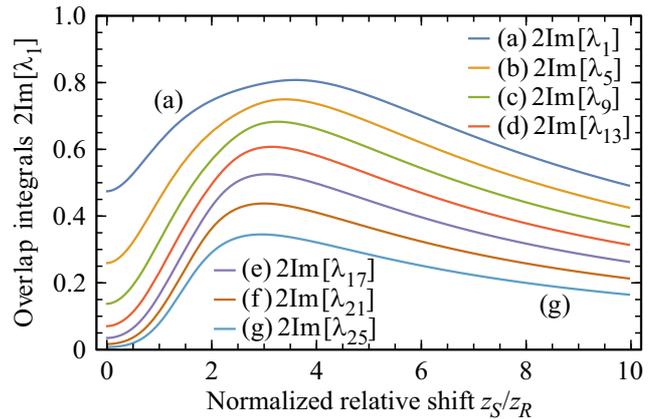


Рис. 4. График зависимости величин $2\Im[\lambda_i]$ для первых 7 различных собственных чисел от геометрического параметра отношения перетяжек управляющего и квантового полей.

$$|0\rangle_2^j \equiv |1\rangle_{L,e}^{(4j-3)}, \quad |1\rangle_2^j \equiv |1\rangle_{A,o}^{(4j-3)}. \quad (60)$$

Индекс $j \in [1, K/2]$ отвечает за номер двухкубитной подсистемы, индекс 1 или 2 нумерует кубиты внутри одной подсистемы. На рис. 4 представлен численный расчёт величин $2\Im[\lambda_i]$ (эффективных констант взаимодействия между кубитными состояниями) для первых 7 различных собственных чисел. В рамках расчёта мы приняли для простоты $\tilde{\chi}_m = \chi_m$, т.е. положили в выражении (40) все сочетание параметров, не относящихся к интегралам перекрытия χ_m , равным единице, держа, однако, в уме, что константы $\tilde{\chi}_m$ можно варьировать изменением интегрального времени взаимодействия, т.е. график на рис. 4 можно масштабировать и обеспечить требуемое значение констант взаимодействия выбором интегрального времени. Величины $2\Im[\lambda_i]$ являются функциями от интегралов перекрытия и, следовательно, зависят от геометрического параметра отношения перетяжек управляющего и квантового полей. Важно отметить, что в рассматриваемом случае уже не удаётся обеспечить одинаковые константы взаимодействия для всех двухкубитных подсистем.

4. Заключение

В настоящей работе рассмотрено квантовое неразрушающее взаимодействие многомодового квантового поля, обладающего орбитальным угловым моментом, с атомным ансамблем в присутствии классического поля, также обладающего ОУМ. В рассматриваемой системе удаётся записать многомодовый гамильтониан QND-взаимодействия, при этом индексы взаимодействующих мод отличаются на значение ОУМ управляющего поля. Константы взаимодействия включают в себя интегралы перекрытия поперечных пространственных профилей мод, что позволяет осуществлять управление константами через варьирование геометрии полей.

При попытке рассматривать эволюцию атомно-полевой системы на языке дискретных переменных встает вопрос о кодировании логических состояний кубитов через физические состояния системы. Анализ показал, что различные режимы взаимодействия (определяемые ОУМ управляющего поля) требуют специфического кодирования. Так, при эволюции с управляющим полем Ω_0 взаимодействуют атомные и полевые моды с одинаковым ОУМ, а кодирование можно осуществлять „напрямую“, отождествляя состояния с единичным возбуждением в моде с определённым ОУМ с логическим состоянием кубита. Система распадается на замкнутые двухкубитные подсистемы, и в пределе плоской волны управляющего поля константы взаимодействия для всех двухкубитных систем становятся равными. Это позволяет говорить о параллельной эволюции многих систем и даёт надежду в дальнейшем построить протокол параллельной многокубитной логической операции.

Однако при рассмотрении режима с Ω_1 выделить взаимодействующие подсистемы оказывается не так просто, и эффективно взаимодействующими состояниями оказываются линейные комбинации состояний с определённым ОУМ. Такая процедура гарантирует равенство констант взаимодействия внутри каждой двухкубитной системы. Константы взаимодействия для разных подсистем оказываются различны при любых значениях геометрического параметра отношения перетяжек классического и квантового полей, что может затруднить проведение множества параллельных двухкубитных операций. В дальнейшем мы планируем разработать протоколы различных логических двухкубитных операций, осуществляемых в рамках рассматриваемой системы, а также проделать попытку построения преобразований в дискретных переменных для объектов высоких размерностей (кудитов).

Финансирование работы

Работа была выполнена при поддержке гранта 22-1-4-20-1 Фонда развития теоретической физики и математики „Базис“.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] R. Raussendorf, D.E. Browne, H.J. Briegel. *Phys. Rev. A*, **68**, 022312 (2003). DOI: 10.1103/PhysRevA.68.022312
- [2] R. Ukai, N. Iwata, Y. Shimokawa, S.C. Armstrong, A. Politi, J. Yoshikawa, P. van Loock, A. Furusawa. *Phys. Rev. Lett.*, **106** (24), 240504 (2011). DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.240504
- [3] P. Walther, K. J. Resch, T. Rudolph, E. Schenck, H. Weinfurter, V. Vedral, M. Aspelmeyer, A. Zeilinger. *Nature*, **434**, 169-176 (2005). DOI: 10.1038/nature03347
- [4] R. Kaltenbaek, J. Lavoie, B. Zeng, S.D. Bartlett, K.J. Resch. *Nat. Phys.*, **6**(11), 850-854 (2010). DOI: 10.1038/nphys1777
- [5] S.L. Braunstein, P. van Loock. *Rev. Mod. Phys.*, **77**, 513–577 (2005). DOI: 10.1103/RevModPhys.77.513
- [6] N.C. Menicucci. *Phys. Rev. Lett.*, **112**, 120504 (2014). DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.120504
- [7] H. Vahlbruch, M. Mehmet, K. Danzmann, R. Schnabel. *Phys. Rev. Lett.*, **117**, 110801 (2016). DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.110801
- [8] R.K. Brylinski, G. Chen. *Mathematics of Quantum Computation* (CRC Press, Inc., New York, 2002), 448. DOI: 10.1201/9781420035377
- [9] E.A. Vashukevich, E.N. Bashmakova, T.Yu. Golubeva, Yu.M. Golubev. *Laser Physics Letters*, **19**(2), 025202 (2022). DOI: 10.1088/1612-202x/ac45b2
- [10] L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw, J.P. Woerdman. *Phys. Rev. A*, **45**, 8185 (1992). DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185
- [11] S. Franke-Arnold, S.M. Barnett, M.J. Padgett, L. Allen. *Phys. Rev. A*, **65**, 033823 (2002). DOI: 10.1103/PhysRevA.65.033823
- [12] S. Li, S. Chen, C. Gao, A.E. Willner, J. Wang. *Opt. Commun.*, **408**, 68 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevA.99.023805
- [13] N.R. Heckenberg, R. McDuff, C.P. Smith, A.G. White. *Opt. Lett.*, **17**, 221 (1992). DOI: 10.1364/ol.17.000221
- [14] E. Karimi, B. Piccirillo, E. Nagali, L. Marrucci, E. Santamato. *Appl. Phys. Lett.*, **94**, 231124 (2009). DOI: 10.1063/1.3154549
- [15] M. Beijersbergen, L. Allen, H. van der Veen, J. Woerdman. *Opt. Commun.*, **96**, 123 (1993). DOI: 10.1016/0030-4018(93)90535-D
- [16] A. Babazadeh, M. Erhard, F. Wang, M. Malik, R. Nouroozi, M. Krenn, A. Zeilinger. *Phys. Rev. Lett.*, **119**, 180510 (2017). DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.180510
- [17] X. Gao, M. Krenn, J. Kysela, A. Zeilinger. *Phys. Rev. A*, **99**, 023825 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevA.99.023825
- [18] E.A. Vashukevich, T.Y. Golubeva, Y.M. Golubev. *Phys. Rev. A*, **101**(3), 033830 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevA.101.033830
- [19] R.L. Phillips, L.C. Andrews. *Appl. Opt.*, **22**(5), 643–644 (1983). DOI: 10.1364/ao.22.000643
- [20] K. Hammerer, A.S. Sorensen, E.S. Polzik. *Rev. Mod. Phys.*, **82**, 1041–1093 (2010). DOI: 10.1103/RevModPhys.82.1041
- [21] T. Holstein, H. Primakoff. *Phys. Rev.*, **58**, 1098 (1940). DOI: 10.1103/PhysRev.58.1098