

02

## О применимости универсальной функции Линдхарда для описания сечений рассеяния атомных частиц

© П.Ю. Бабенко, А.Н. Зиновьев

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,  
194021 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: babenko@npd.ioffe.ru

Поступило в Редакцию 22 мая 2023 г.

В окончательной редакции 3 июля 2023 г.

Принято к публикации 4 июля 2023 г.

Показано, что применение универсальной функции Линдхарда для расчета сечения рассеяния атомных частиц, как правило, ограничено областью углов рассеяния менее  $20^\circ$ . Проведено сопоставление получаемых результатов для различных популярных потенциалов взаимодействия и имеющихся экспериментальных данных. Показано, что наличие неупругих каналов в рассеянии приводит к появлению дополнительных максимумов в сечении рассеяния. Даются рекомендации по применению универсальной функции Линдхарда для описания квазиупругого рассеяния в области  $\eta = \varepsilon \cdot \sin(\theta/2) > 0.01$ ,  $\varepsilon$  — приведенная энергия соударения,  $\theta$  — угол рассеяния. При больших энергиях рассеяние хорошо описывается экранированными кулоновскими потенциалами, и применение функции Линдхарда обеспечивает точность 10% для расчета сечений рассеяния.

**Ключевые слова:** сечение рассеяния, атомные частицы, потенциалы межатомного взаимодействия, тормозные способности, универсальная функция рассеяния Линдхарда.

DOI: 10.21883/JTF.2023.09.56213.133-23

### Введение

Линдхард, Нильсен и Шарф [1] показали, что сечение рассеяния атомных частиц, зависящее от двух переменных — угла рассеяния  $\theta$  и энергии соударения  $E$ , может быть с хорошей точностью описано функцией только одной переменной  $\eta = \varepsilon \cdot \sin(\theta/2)$ , где

$$\varepsilon = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \frac{a}{Z_1 Z_2 e^2} E, \quad (1)$$

$M_1, M_2, Z_1, Z_2$  — массы и заряды сталкивающихся частиц,  $e$  — заряд электрона,  $a$  — длина экранирования в потенциале. В оригинальной работе используется переменная  $t^{1/2} = \eta$ . В отечественной литературе функция Линдхарда описана в [2].

Сечение рассеяния в системе центра масс  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  связано с функцией  $f(\eta)$ , предложенной в работе [1], соотношением

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{8\varepsilon} \frac{f(\eta)}{\sin^3(\frac{\theta}{2})}. \quad (2)$$

Под сечением рассеяния в настоящей работе понимается дифференциальное сечение упругого рассеяния на определенный угол. Оно может быть рассчитано точно, если известен потенциал рассеяния [3]. В эксперименте измеряется эффективное сечение рассеяния, которое может включать вклад неупругих каналов. При столкновении частиц keV-энергий, которые обсуждаются в настоящей работе, вклад неупругих каналов приводит к появлению особенностей в сечениях квазиупругого рассеяния (см. разд. 3). Расчет сечения рассеяния для

различных каналов проводился, в частности, в работах [4–7].

С использованием функции  $f(\eta)$  удастся описать зависимость сечения рассеяния для различных атомов в случае, когда применимо приближение экранированного кулоновского потенциала:

$$U(R) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R} \Phi\left(\frac{R}{a}\right). \quad (3)$$

Здесь  $\Phi(R/a)$  — функция экранирования. Развитый Линдхардом подход позволил аналитически описать функцию  $f(\eta)$  [8]:

$$f(\eta) = \Lambda \eta^{1-2m} \left[ 1 + (2\Lambda \eta^{2(1-m)})^q \right]^{-1/q}. \quad (4)$$

Параметры  $\Lambda, m, q$  для различных потенциалов приведены в работах [9,10]. Для больших значений  $\eta$ , когда рассеяние описывается формулой Резерфорда,  $f = 1/(2\eta)$ .

С помощью функции  $f(\eta)$  можно сосчитать сечение ядерных тормозных потерь  $S(E)$ :

$$S(E) = 4\pi a \cdot Z_1 Z_2 e^2 \frac{M_1}{M_1 + M_2} s(\varepsilon), \quad (5)$$

где

$$s(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f(\eta) d\eta. \quad (6)$$

В [11,12] ядерные тормозные потери были вычислены для потенциалов, полученных в рамках современных

расчетов с использованием приближения функционала плотности, и было показано, что при наличии притягивающей ямы в зависимости сечения ядерных тормозных потерь от энергии соударения при энергиях в несколько электронвольт в сечении появляется дополнительный максимум.

Универсальная кривая Линдхарда успешно применяется в теории многократных столкновений [13,14], когда доминирует рассеяние под небольшими углами. Подобный подход, в частности, успешно используется для описания угловых зависимостей частиц, прошедших сквозь тонкие пленки.

„Магические формулы“ для описания рассеяния с использованием кривой Линдхарда широко применяются в программах для моделирования прохождения частиц в веществе, в расчетах распыления и рассеяния частиц при бомбардировке пучками атомных частиц твердого тела. В частности, они используются в широко применяемой программе SRIM [15], что позволяет значительно ускорить расчеты. Ниже мы оговорим случаи, когда применение такого подхода не оправдано.

В задачи настоящей работы входило определить область применимости универсальной кривой Линдхарда для расчета сечений рассеяния, рассчитать функциональную форму этой кривой для наиболее популярных моделей потенциалов взаимодействия. Будет проведено сравнение расчетных данных с экспериментом. Подобное сопоставление ранее не проводилось.

Вопрос о применимости различных моделей потенциалов для описания рассеяния атомных частиц до сих пор интенсивно обсуждается. В работе [16] на основе анализа экспериментальных данных по рассеянию для множества систем был предложен потенциал, наилучшим образом описывающий экспериментальные данные. Сравнение потенциалов, полученных из эксперимента, с расчетами в рамках модели функционала плотности показало хорошее согласие результатов [17]. Дальнейшее улучшение [11,18] данных о потенциале было связано с использованием экспериментальных данных о параметрах потенциальной ямы. В работах [19,20] на основе анализа экспериментальных данных об энергетических и угловых спектрах при отражении атома водорода от поверхности золота Au и угловых зависимостях частиц, прошедших тонкие пленки золота, было показано, что наилучшим образом описывает рассеяние потенциал с коррекцией длины экранирования на 10–15%. В работе [21] были предложены аппроксимационные формулы, учитывающие экранировку водородных частиц в металле, которые позволили хорошо описать экспериментальные данные. Из современных работ можно отметить работы по расчету многочастичных потенциалов [22–25] для описания эксперимента методами молекулярной динамики. В работе [26] рассматривалась модель взаимодействия заряженных частиц в неидеальной квазиклассической плазме. Сведения о многочастичных потенциалах необходимы также для расчетов электронно-

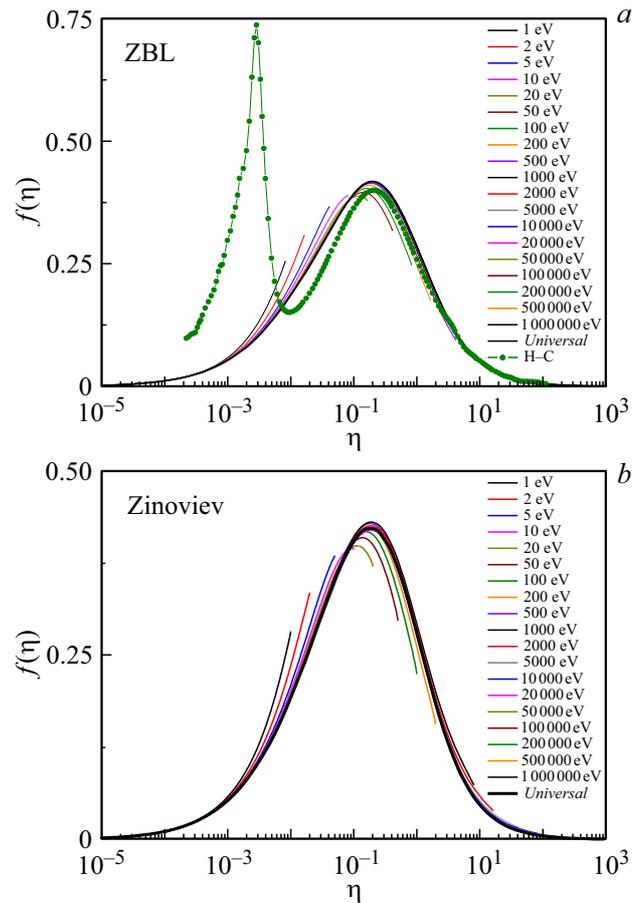


Рис. 1. Сопоставление расчетов функции  $f(\eta)$  для различных энергий соударения и потенциалов: *a* — потенциал ZBL [28], *b* — потенциал Зиновьева [16].

го обмена при взаимодействии ионов с поверхностью металлов [27].

## 1. Ограничение применимости универсальной кривой Линдхарда для описания рассеяния

Уже в первоначальной работе Линдхарда было показано, что расчет для разных энергий соударения при больших углах рассеяния расходится с универсальной кривой. На рис. 1 представлены проведенные нами расчеты для потенциалов ZBL (Ziegler-Biersack-Littmark) [28] и Зиновьева [16].

Для малых энергий расхождение на 10% проявляется при углах 15–20°. С ростом энергии кривые начинают приближаться к универсальной кривой, пересекают ее, и наблюдается более резкий спад сечения, чем предсказывает универсальная кривая. При дальнейшем росте энергии соударения мы переходим к случаю слабо экранированного кулоновского потенциала, и различие уменьшается. Координаты кривой Линдхарда выбраны таким образом, что в случае кулоновского потенциала

единая кривая дает точный результат в соответствии с формулой Резерфорда.

Таким образом, применение универсальных зависимостей и соответствующих „магических формул“ может приводить к большим ошибкам, когда важен вклад рассеяния на большие углы. Так, например, программа SRIM дает неверные результаты при моделировании обратного рассеяния легких атомов от поверхности. В этом случае следует использовать программу TRBS [29] или рассчитывать упругое рассеяние точно, как это делается в наших программах [30,31]. Другим важным случаем является расчет распыления материалов легкими атомами [32,33]. В этом случае доминирует распыление приповерхностных слоев потоком обратно рассеянных частиц, и вместо программы SRIM лучше использовать версию TrimSP [9].

Следует отметить, что универсальная кривая Линдхарда неприменима для потенциалов с притягивающей потенциальной ямой. Пример расчета сечения для системы Н-С приведен на рис. 1. При малых энергиях сечение резко возрастает из-за радужного рассеяния [34]. Как видно из рис. 1, применимость универсальной кривой для систем возможна только при  $\epsilon > 10^{-2}$ , т.е. при достаточно больших энергиях соударения.

## 2. Универсальная кривая Линдхарда для различных потенциалов

На рис. 2 представлены кривые Линдхарда, рассчитанные нами для различных популярных потенциалов. Кривые для потенциалов Томаса-Ферми-Фирсова [35], Бора [36] и Ленца-Йенсена [37,38] совпадают с результатами, полученными ранее в работе [1]. Кривые для потенциалов KrC (krypton-carbon) [39], ZBL [28], Мольера [40], Зиновьева [16] рассчитаны нами. Ранее полученная кривая для потенциала ZBL, приведенная в работе [41], ошибочна.

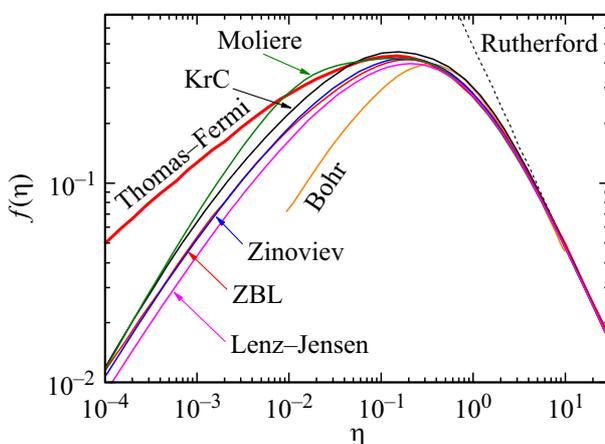


Рис. 2. Универсальная кривая Линдхарда, рассчитанная для различных потенциалов.

Как видно из рис. 2, потенциалы Томаса-Ферми-Фирсова и потенциал Бора сильно отличаются от более современных моделей потенциала. Как известно, потенциал Томаса-Ферми-Фирсова слишком слабо спадает с ростом межъядерного расстояния, в то время как потенциал Бора использует неправильное значение константы экранирования. Отличие результатов для разных потенциалов частично связано с использованием разных длин экранирования. Линдхард [1] предложил длину экранирования в виде

$$a_L = 0.88534 a_B \left( Z_1^{\frac{2}{3}} + Z_2^{\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

где  $a_B = 0.529 \text{ \AA}$ . Длина Линдхарда используется в потенциалах Ленца-Йенсена и Мольера. Фирсов [36] показал, что лучше использовать длину экранирования

$$a_F = 0.88534 a_B \left( Z_1^{\frac{1}{2}} + Z_2^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{2}{3}}. \quad (8)$$

Длина экранирования Фирсова используется в потенциалах KrC и Зиновьева. В потенциале ZBL используется длина экранирования

$$a_U = 0.88534 a_B (Z_1^{0.23} + Z_2^{0.23})^{-1}. \quad (9)$$

При вычислении функции Линдхарда производится нормировка сечения рассеяния на величину  $a$ , и при этом происходит небольшой сдвиг сечений по шкале энергий, так как величина  $a$  входит в параметр  $\epsilon$ .

Как видно из рис. 2, потенциал Мольера превышает функцию  $f(\eta)$  в области  $\eta = 10^{-2} - 10^{-1}$ . Потенциалы ZBL, KrC, Зиновьева, Ленца-Йенсена неплохо группируются: при  $\eta = 10^{-2}$  отличие от средней кривой составляет  $\pm 15\%$ . При  $\eta > 2 \cdot 10^{-1}$  результаты, полученные для разных потенциалов, практически совпадают, а при больших энергиях стремятся к пределу  $f(\eta) = 1/(2\eta)$  для кулоновского потенциала.

Формула, предложенная Винтербоном (4), недостаточно хорошо описывает полученные кривые при небольших  $\eta$ .

Полученные универсальные кривые для различных потенциалов более точно описываются аналитическим выражением:

$$f(\eta) = 10^{P(\eta)},$$

$$P(\eta) = A + x_1 Y + x_2 Y^2 + \dots + x_9 Y^9,$$

$$Y(\eta) = \log(\eta) + 6. \quad (10)$$

Коэффициенты разложения приведены в таблице. Правильные значения функции  $f(\eta)$  получаются только при использовании всех значащих цифр приведенных коэффициентов.

Коэффициенты разложения для описания универсальных функций рассеяния  $f(\eta)$  для потенциалов Мольера, KrC, ZBL, Зиновьева, Ленца-Йенсена

	Мольер	KrC	ZBL	Зиновьев	Ленц-Йенсен
A	-5.98684412936672	-5.82053720043053	-7.17703412724219	-6.15226072871262	-5.68875529012748
$x_1$	7.50063125499793	7.83854186686537	12.0456657417575	8.93339660667167	7.30693956472539
$x_2$	-7.61657292952509	-8.94922982675932	-13.8410830596577	-10.2423305341738	-8.2807933120795
$x_3$	4.6591815428247	6.14898878942264	9.14999917832785	6.93298958572263	5.66766296378632
$x_4$	-1.68747609909724	-2.50957535741541	-3.62096019992075	-2.80346797942105	-2.31913380758875
$x_5$	0.378198705980615	0.632333666374937	0.8932170942933	0.704343990840811	0.589141337053455
$x_6$	-0.0530843539993369	-0.0991082183225724	-0.13812068292567	-0.110565208894203	-0.0933395862970872
$x_7$	0.00452147747872214	0.00937027624986408	0.0129671012835045	0.0105013220905788	0.00892494382361298
$x_8$	$-2.12712010948463 \cdot 10^{-4}$	$-4.88016343584863 \cdot 10^{-4}$	$-6.74180942844774 \cdot 10^{-4}$	$-5.50581075532266 \cdot 10^{-4}$	$-4.69881972632683 \cdot 10^{-4}$
$x_9$	$4.22413852801172 \cdot 10^{-6}$	$1.0739834062033 \cdot 10^{-5}$	$1.48748655175537 \cdot 10^{-5}$	$1.22161192174072 \cdot 10^{-5}$	$1.04457767665109 \cdot 10^{-5}$

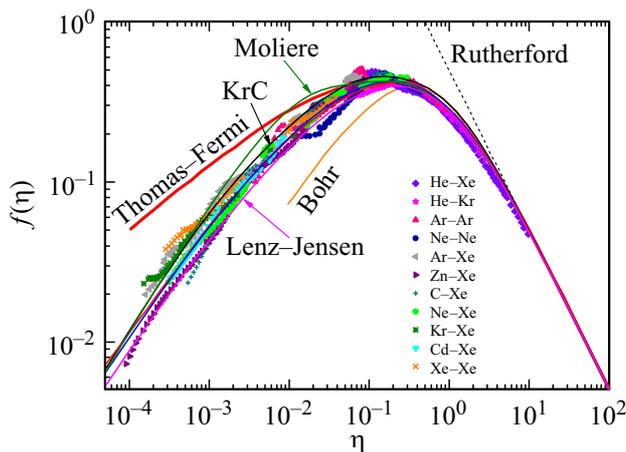


Рис. 3. Сравнение универсальной кривой Линдхарда для различных потенциалов с данными измерений сечений рассеяния. При обработке экспериментальных данных использовалась длина экранирования Линдхарда.

### 3. Сравнение с экспериментом

На рис. 3 представлено сопоставление теоретических расчетов для различных потенциалов с экспериментом [42–46]. Как и ожидалось, кривые, полученные для потенциала Томаса-Ферми-Фирсова и Бора, заметно отличаются от экспериментальных данных. Разброс экспериментальных данных в районе максимума ( $\epsilon = 0.2$ ) не превышает  $\pm 10\%$ . При больших энергиях универсальная кривая неплохо описывает эксперимент. При  $\epsilon = 0.01$  разброс экспериментальных данных составляет  $\pm 15\%$ , что сопоставимо с разбросом данных, предсказанных различными моделями потенциала. При дальнейшем уменьшении энергии соударения разброс может достигать трех раз.

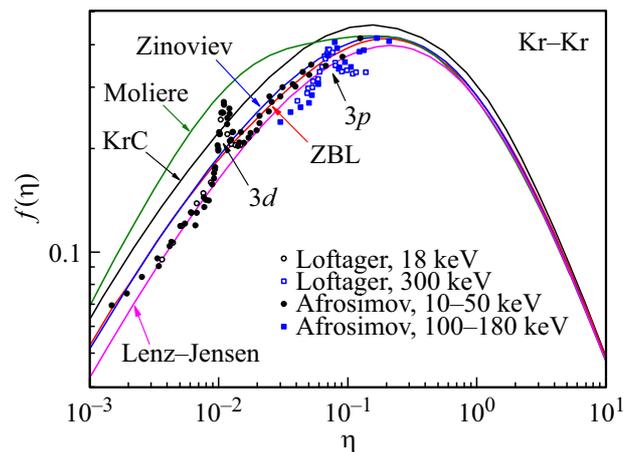
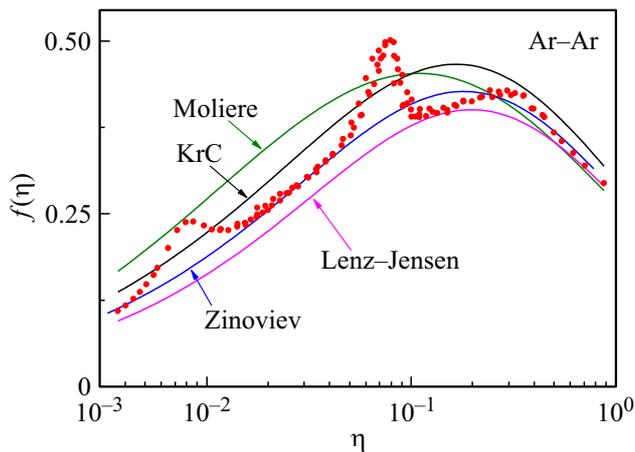


Рис. 4. Сравнение универсальной кривой для различных потенциалов с экспериментальными данными для системы  $Kr^+ - Kr$  [4,46].

Рассмотрим отдельные случаи столкновений атомов инертных газов.

На рис. 4 представлены в универсальных координатах данные измерений Афросимова и др. [4] для диапазона энергий соударений 10–50 keV (темные кружки) и для энергий 100 и 180 keV (синие квадраты), а также данные Лофтагера [46] для энергии соударения 18 и 300 keV (открытые символы). Как видно из рис. 4, данные двух независимых групп неплохо согласуются. Обращает на себя внимание, что данные для диапазона энергий 10–50 keV описываются единой кривой, при этом при  $\eta = 1.1 \cdot 10^{-2}$  наблюдается резкий пик в сечении. Данный пик связан с образованием вакансии в 3d-оболочке Kr. Общий ход подложки кривой лежит между предсказаниями для потенциалов Ленца-Йенсена и Зиновьева и ZBL. При  $\eta = 7.8 \cdot 10^{-2}$  наблюдается



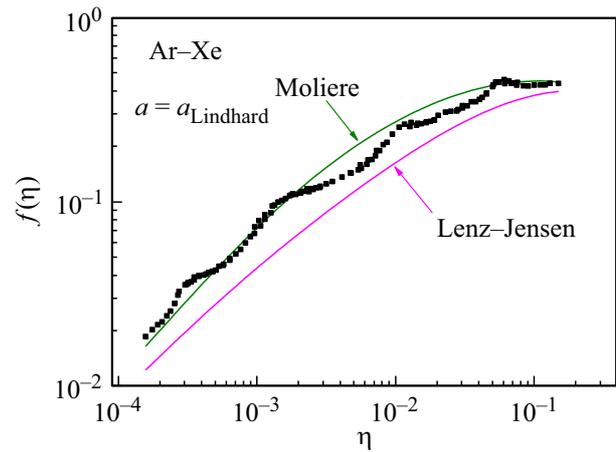
**Рис. 5.** Сравнение универсальной кривой для различных потенциалов с экспериментальными данными для системы  $\text{Ar}^+ - \text{Ar}$  [42].

очередной пик, связанный с возбуждением вакансии в более глубокой  $3p$ -оболочке. Различие двух наборов данных ( $10 - 50 \text{ keV}$  и  $100 - 300 \text{ keV}$ ) характеризует изменение потенциала при значительном росте скорости соударения.

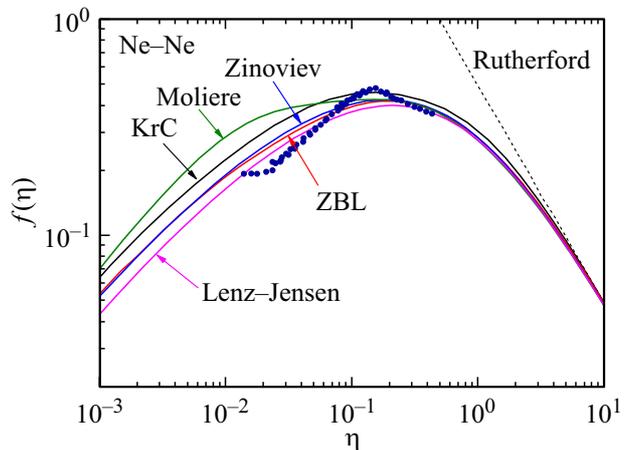
Как видно из рис. 4, на кривых наблюдаются максимумы в сечениях рассеяния. Впервые это явление было обнаружено в работах [47,48]. В дальнейшем это явление было подтверждено в работах Лофтагера [45,46]. В работе [5] появление особенности в сечениях рассеяния объяснялось радужными эффектами при пересечении нескольких квазимолекулярных термов. При резком изменении производной в потенциале при пересечении термов в зависимости угла рассеяния  $\theta$  от параметра удара  $b$  появляется минимум, и в узком диапазоне углов происходит интерференция амплитуд рассеяния, связанная с радужным рассеянием. В работе [4] было показано, что радужные эффекты дают 50% вклад в наблюдаемую особенность. При рассеянии по неупругому каналу угол рассеяния меньше, чем при рассеянии по упругому каналу. В определенном диапазоне углов эти вклады суммируются, что дает дополнительный вклад в появление особенности в сечении рассеяния.

На рис. 5 теоретические кривые сопоставляются с экспериментом для случая  $\text{Ar}^+ - \text{Ar}$ . Средний ход кривой лучше описывается потенциалом Зиновьева. При  $\eta = 8.3 \cdot 10^{-3}$  наблюдается пик, связанный с возбуждением наружных оболочек в  $\text{Ar}$ , а при  $\eta = 7.6 \cdot 10^{-2}$  происходит образование вакансий во внутренней  $2p$ -оболочке аргона. Природа появления пиков связана с наличием квазипересечения упругого и неупругого термов.

На рис. 6 показано, что экспериментальные данные лежат между расчетными кривыми для потенциалов КгС и Ленца-Йенсена. Наблюдаются слабо выраженные пики в сечении, связанные с неупругими переходами.



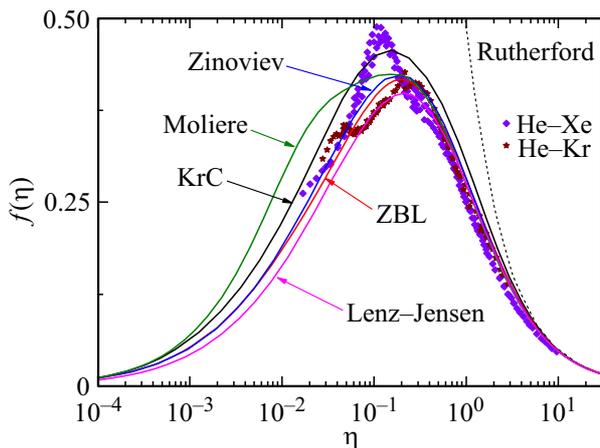
**Рис. 6.** Сравнение универсальной кривой для различных потенциалов с экспериментальными данными для системы  $\text{Ar}^+ - \text{Xe}$  [45].



**Рис. 7.** Сравнение универсальной кривой для различных потенциалов с экспериментальными данными для системы  $\text{Ne}^+ - \text{Ne}$  [43].

Как видно из рис. 7, функциональная зависимость для системы  $\text{Ne} - \text{Ne}$  в диапазоне  $\eta = 0.01 - 0.2$  заметно отличается от зависимости, предсказываемой теоретическим потенциалом. Отличие составляет 25% от расчета с использованием потенциала Зиновьева при  $\eta = 2.5 \cdot 10^{-2}$  и 15% в районе максимума ( $\eta = 0.15$ ). При  $\eta > 0.2$  эксперимент ложится на расчетные кривые.

Случай столкновения легкой частицы с тяжелым атомом представлен на рис. 8. И в этих случаях данные для разных энергий соударения описываются единой кривой для каждой системы. Для системы  $\text{He}^+ - \text{Xe}$  наблюдается пик в сечении при  $\eta = 0.1$ . Кривая для системы  $\text{He}^+ - \text{Kr}$  ведет себя более гладко. Обращает на себя внимание тот факт, что при больших энергиях  $\eta \sim 1$  экспериментальные данные лежат на 8% ниже теоретических кривых, что, по-видимому, связано с ошибками в измерении абсолютных величин сечений.



**Рис. 8.** Сравнение универсальной кривой для различных потенциалов с экспериментальными данными для системы  $\text{He}^+ - \text{Xe}$  и  $\text{He}^+ - \text{Kr}$  [44].

Как показано в работе [5], появление максимумов в сечении проявляется при межъядерных расстояниях, соответствующих ситуации, когда достигается перекрытие взаимодействующих оболочек атомов на 15%.

## Заключение

Проведенный анализ показал, что применение универсальной функции Линдхарда оправдано для расчета сечений рассеяния в диапазоне углов менее  $20^\circ$ . Расхождение с точным расчетом составляет менее 10%.

В случаях, когда важно сечение рассеяния на большие углы, например, для описания отражения частиц от поверхности, а также при расчете распыления материалов легкими атомами нужно использовать точный расчет сечения рассеяния.

Применение универсальной кривой для систем с притягивающей ямой в потенциале ограничено областью  $\eta > 0.01$ .

В целом следует сказать, что в диапазоне энергий  $\eta > 0.01$  расчет с использованием универсальной кривой Линдхарда для потенциалов ZBL, Зиновьева, Ленца-Йенсена позволяет с точностью 20% оценить сечение рассеяния. Следует обратить внимание на появление особенностей (пиков) в сечениях рассеяния, связанных с пересечением упругого и неупругого каналов. Эта поправка может составлять до 100%, как в случае  $\text{Kr}-\text{Kr}$ .

Для оценки предсказания появления особенностей в сечении, связанных с неупругими переходами, можно использовать критерий [44]: появление максимумов в сечении проявляется при достижении межъядерных расстояний, при которых имеет место перекрытие взаимодействующих оболочек атомов на 15%.

Анализ экспериментальных данных показал, что даже в случае неупругого рассеяния сечение для разных энергий для конкретной пары описывается одной универсаль-

ной кривой. Потенциалы ZBL, Зиновьева,  $\text{KrC}$ , Ленца-Йенсена в области  $\eta > 0.01$  дают результаты с точностью 20%. При  $\eta > 0.2$  точность описания эксперимента повышается до 10%. Для повышения точности описания эксперимента рекомендуется использовать индивидуальные потенциалы, рассчитанные в рамках приближения функционала плотности с коррекцией параметров потенциальной ямы на спектроскопические данные, как это сделано в работе [11].

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] J. Lindhard, V. Nielsen, M. Scharff. Pys. Medd. Dan. Vid. Selsk., **38** (10), 1 (1968).
- [2] Ю.В. Готт. *Взаимодействие частиц с веществом в плазменных исследованиях* (Атомиздат, М., 1978)
- [3] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Механика том 1. Теоретическая Физика в 10 томах.* (Физматлит, М., 2004) [L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *Mechanics vol. 1.* (Elsevier, London, 2005)]
- [4] В.В. Афросимов, Ю.С. Гордеев, А.Н. Зиновьев. ЖЭТФ, **66** (6), 1933 (1974). [V.V. Afrosimov, Yu.S. Gordeev, A.N. Zinov'ev. Sov. Phys. JETP, **39** (6), 950 (1974).]
- [5] В.В. Афросимов, Ю.С. Гордеев, В.К. Никулин, А.М. Полянский, А.П. Шергин. ЖЭТФ, **62** (3), 848 (1972). [V.V. Afrosimov, Yu.S. Gordeev, V.K. Nikulin, A.M. Polyanskii, A.P. Shergin. Sov. Phys. JETP, **35** (3), 449 (1972).]
- [6] F.T. Smith, R.P. Marchi, W. Aberth, D.C. Lorents, O. Heinz. Phys. Rev., **161** (1), 31 (1967). DOI: 10.1103/PhysRev.161.31
- [7] В.В. Афросимов, Ю.С. Гордеев, В.М. Лавров. ЖЭТФ, **68** (5), 1715 (1975). [V.V. Afrosimov, Yu.S. Gordeev, V.M. Lavrov. Sov. Phys. JETP, **41** (5), 860 (1975).]
- [8] K.B. Winterbon. Rad. Eff., **13** (3–4), 215 (1972). DOI: 10.1080/00337577208231183
- [9] В. Экштайн. *Компьютерное моделирование взаимодействия частиц с поверхностью твердого тела* (Мир, М., 1995) [W. Eckstein. *Computer Simulation of Ion-Solid Interactions* (Springer, Berlin 1991)]
- [10] U. Littmark, J.F. Ziegler. Phys. Rev. A, **23** (1), 64 (1981). DOI: 10.1103/PhysRevA.23.64
- [11] A.N. Zinoviev, P.Yu. Babenko, K. Nordlund, Nucl. Instr. Meth. B, **508**, 10 (2021). DOI: 10.1016/j.nimb.2021.10.001
- [12] П.Ю. Бабенко, А.Н. Зиновьев. ЖТФ, **91** (12), 1901 (2021). DOI: 10.21883/JTF.2021.12.51754.199-21
- [13] L. Meyer. Phys. Stat. Sol. b, **44** (1), 253 (1971). DOI: 10.1002/pssb.2220440127
- [14] K.B. Winterbon, P. Sigmund, J.B. Sanders. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk, **37** (14), 1 (1970)
- [15] J.F. Ziegler, J.P. Biersack. SRIM. <http://www.srim.org>
- [16] А.Н. Зиновьев. ЖТФ, **78** (1), 15 (2008). [A.N. Zinoviev. Tech. Phys., **53** (1), 13 (2008). DOI: 10.1134/S1063784208010039]
- [17] A.N. Zinoviev, K. Nordlund. Nucl. Instr. Meth. B, **406**, 511 (2017). DOI: 10.1016/j.nimb.2017.03.047

- [18] D.S. Meluzova, P.Yu. Babenko, A.P. Shergin, K. Nordlund, A.N. Zinoviev. Nucl. Instr. Meth. B, **460**, 4 (2019). DOI: 10.1016/j.nimb.2019.03.037
- [19] П.Ю. Бабенко, А.Н. Зиновьев, В.С. Михайлов, Д.С. Тенсин, А.П. Шергин. Письма в ЖТФ, **48** (14), 10 (2022). DOI: 10.21883/PJTF.2022.14.52862.19231 [P.Yu. Babenko, A.N. Zinoviev, V.S. Mikhailov, D.S. Tensin, A.P. Shergin. Tech. Phys. Lett., **48** (7), 50 (2022). DOI: 10.21883/TPL.2022.07.54039.19231]
- [20] П.Ю. Бабенко, А.Н. Зиновьев, Д.С. Тенсин. ЖТФ, **92** (11), 1643 (2022). DOI: 10.21883/JTF.2022.11.53436.151-22 [P.Yu. Babenko, A.N. Zinoviev, D.S. Tensin. Tech. Phys., **67** (11), 1416 (2022). DOI: 10.21883/TP.2022.11.55170.151-22]
- [21] П.Ю. Бабенко, В.С. Михайлов, А.Н. Зиновьев. Письма в ЖЭТФ, **117** (10), 723 (2023). DOI: 10.31857/S1234567823100026
- [22] C. Bjorkas, N. Juslin, H. Timko, K. Vortler, K. Nordlund, K. Henriksson, P. Erhart. J. Phys.: Condens. Matter., **21**, 445002 (2009). DOI: 10.1088/0953-8984/21/44/445002
- [23] М.В. Прокофьев, В.В. Светухин, М.Ю. Тихончев. Изв. Самарского НЦ РАН, **15**, 1024 (2013).
- [24] N. Juslin, P. Erhart, P. Träskelin, J. Nord, K.O.E. Henriksson, K. Nordlund, E. Salonen, K. Albe. J. Appl. Phys., **98**, 123520 (2005). DOI: 10.1063/1.2149492
- [25] H.W. Sheng, M.J. Kramer, A. Cadien, T. Fujita, M.W. Chen. Phys. Rev. B, **83**, 134118 (2011). DOI: 10.1103/PhysRevB.83.134118
- [26] K.N. Dzhumagulova, E.O. Shalenov, G.L. Gabdullina. Phys. Plasmas, **20**, 042702 (2013). DOI: 10.1063/1.4799798
- [27] И.К. Гайнуллин. УФН, **190** (9), 950 (2020). DOI: 10.3367/UFN.2019.11.038691 [I.K. Gainullin. Phys. Usp., **63** (9), 888 (2020). DOI: 10.3367/UFN.2019.11.038691]
- [28] J.F. Ziegler, J.P. Biersack, U. Littmark. *The Stopping and Range of Ions in Solids, The Stopping and Range of Ions in Matter* (Pergamon, NY., 1985), v. 1.
- [29] J.P. Biersack, E. Steinbauer, P. Bauer. Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. B, **61**, 77 (1991). DOI: 10.1016/0168-583X(91)95564-T
- [30] А.Н. Зиновьев, П.Ю. Бабенко. Письма в ЖЭТФ, **115** (9), 603 (2022). DOI: 10.31857/S1234567822090105 [A.N. Zinoviev, P.Yu. Babenko. JETP Lett., **115** (9), 560 (2022). DOI: 10.1134/S0021364022100526]
- [31] В.С. Михайлов, П.Ю. Бабенко, Д.С. Тенсин, А.Н. Зиновьев. Поверхность, **2**, 95 (2023). DOI: 10.31857/S1028096023020061 [V.S. Mikhailov, P.Yu. Babenko, D.S. Tensin, A.N. Zinoviev. J. Surf. Invest.: X-Ray, Synchrotron Neutron Tech., **17** (1), 258 (2023). DOI: 10.1134/S1027451023010330]
- [32] П.Ю. Бабенко, В.С. Михайлов, А.Н. Зиновьев. Письма в ЖТФ, **49** (8), 42 (2023). DOI: 10.21883/PJTF.2023.08.55138.19432
- [33] П.Ю. Бабенко, В.С. Михайлов, А.П. Шергин, А.Н. Зиновьев. ЖТФ, bf 9 (5), 709 (2023). DOI: 10.21883/JTF.2023.05.55467.12-23
- [34] В.М. Галицкий, Е.Е. Никитин, Б.М. Смирнов. *Теория столкновений атомных частиц* (Наука, М., 1981)
- [35] О.Б. Фирсов. ЖЭТФ, **33** (3), 696 (1957). [O.B. Firsov. Sov. Phys. JETP, **6** (3), 534 (1958).]
- [36] N. Bohr. Mat. Fys. Medd. K. Dan. Vid Selsk., **18** (8), 1 (1948).
- [37] W. Lenz. Z. Phys., **77**, 713 (1932). DOI: 10.1007/BF01342150
- [38] H. Jensen. Z. Phys., **77**, 722 (1932). DOI: 10.1007/BF01342151
- [39] W.D. Wilson, L.G. Hagmark, J.P. Biersack. Phys. Rev. B, **15** (5), 2458 (1977). DOI: 10.1103/PhysRevB.15.2458
- [40] G. Moliere. Z. Naturforsch. A, **2**, 133 (1947). DOI: 10.1515/zna-1947-0302
- [41] J.F. Ziegler, J.P. Biersack, M.D. Ziegler. *The Stopping and Range of Ions in Matter* (SRIM Co., Chester, 2008)
- [42] H. Hartung, B. Fricke, W.-D. Sepp, B. Thies, D. Kolb, D. Heinemann, P. Loftager. Phys. Lett. A, **119** (9), 457 (1987). DOI: 10.1016/0375-9601(87)90415-4
- [43] H. Hartung, B. Fricke, W.-D. Sepp, W. Sengler, D. Kolb. J. Phys. B, **18** (13), L433 (1985). DOI: 10.1088/0022-3700/18/13/006
- [44] K. Gartker, K. Hehl. Phys. Stat. Sol. b, **94** (1), 231 (1979). DOI: 10.1002/pssb.2220940126
- [45] P. Loftager, F. Besenbacher, O.S. Jensen, V.S. Sorensen. Phys. Rev. A, **20** (4), 1443 (1979). DOI: 10.1103/PhysRevA.20.1443
- [46] P. Loftager, G. Claussen. *ICPEAC VI* (Cambridge, USA, 1969), p. 518.
- [47] В.В. Афросимов, Ю.С. Гордеев, М.Н. Панов, Н.В. Федоренко. ЖТФ, **36**, 123 (1966).
- [48] V.V. Afrosimov, Yu.S. Gordeev, A.M. Polyansky, A.P. Shergin. *ICPEAC V* (Leningrad, USSR, 1967)