

03

Образование присоединенной каверны с неподвижными точками отрыва при ударе плавающего кругового цилиндра

© М.В. Норкин

Южный федеральный университет,
344090 Ростов-на-Дону, Россия
e-mail: norkinmi@mail.ru

Поступило в Редакцию 27 февраля 2023 г.

В окончательной редакции 28 июля 2023 г.

Принято к публикации 28 июля 2023 г.

Рассмотрена плоская задача о вертикальном и отрывном ударе кругового цилиндра под свободной поверхностью идеальной несжимаемой тяжелой жидкости. Предположено, что после удара цилиндр движется вглубь жидкости с постоянной скоростью. Изучена динамика присоединенной каверны, образующейся позади тела, в предположении, что точки отрыва внутренней свободной границы жидкости неподвижны. Характерные физические величины — число Фруда и давление в каверне — выбраны таким образом, чтобы выполнялось условие Кутты-Жуковского в точках отрыва.

Ключевые слова: круговой цилиндр, отрывной удар, присоединенная каверна, точки отрыва, малые времена.

DOI: 10.61011/JTF.2023.10.56277.33-23

Введение

При изучении кавитации в жидкости, вызванной ударом плавающего тела, важную роль играет классическая модель удара с отрывом [1]. Представляя большой самостоятельный интерес для аналитических исследований, эта модель дает начальные условия для решения более сложной динамической кавитационной задачи. Исследование задач такого плана проводилось ранее при малых временах на основании первых двух членов асимптотики [2,3]. При этом учитывалась динамика точек отрыва внутренней свободной границы жидкости (границы каверны). Положение точек отрыва в каждый момент времени определялось из условия Кутты-Жуковского. Было показано, что в рассматриваемом асимптотическом приближении имеет место линейная зависимость угловых координат этих точек от времени. Нахождение следующих членов асимптотики связано с серьезными техническими трудностями, которые объясняются необходимостью использовать специальную замену переменных, переносящую информацию о динамике точек отрыва в уравнение и краевые условия задачи. По этой причине открытым остается вопрос о возможности нахождения следующих членов асимптотического разложения по степеням малого времени на основании условия Кутты-Жуковского. В настоящей статье предлагается исследовать этот вопрос при дополнительном предположении, что точки отрыва внутренней свободной границы жидкости остаются неподвижными после удара, по крайней мере, в течение некоторого небольшого промежутка времени. Сделанное допущение позволяет проанализировать большее количество членов асимптотики по малому времени, так как в этом случае применяется

прямой асимптотический метод без специальной замены переменных. Однако при этом приходится накладывать серьезные ограничения на выбор характерных физических величин. В настоящей работе показывается, что при движении цилиндра вдоль вектора силы тяжести можно указать такой закон искусственной подачи газа в каверну, при котором решение задачи представимо в виде степенного асимптотического разложения по малому времени (с учетом первых трех членов), удовлетворяющего условию Кутты-Жуковского. В общем случае (без сделанного предположения о неподвижности точек отрыва) необходимо учитывать динамику точек отрыва и принимать во внимание возможность изменения структуры самой асимптотики для ее младших членов, начиная с третьего. Ожидается, что аналогичные выводы можно будет сделать для ряда близких задач (например, при изучении быстрого разгона или быстрого торможения тела в жидкости). Отметим, что, кроме условия Кутты-Жуковского, должно также выполняться другое важное физическое условие — положительности давления на смоченной поверхности тела. Если оба эти условия выполнены, то построенное на малых временах решение задачи корректно и полностью соответствует данной физической ситуации. Условие для давления проверяется уже после решения задачи и, в случае искусственной кавитации (когда давление в каверне порядка атмосферного и выше), как правило, всегда выполняется [3].

Общие принципы кавитационных течений при взаимодействии твердых тел с жидкостью изложены в различных монографиях и статьях (см., например, [4,5]). Обзор работ по близким задачам проникания тел в жидкость с учетом явления отрыва частиц жидкости от их поверх-

ностей дан в [6]. Некоторые результаты, полученные при исследовании подводного старта ракет кавитационным способом, приведены в [7]. Задачи генерации волн при безотрывном ударе и разгоне плавающего кругового цилиндра изучены на малых временах в [8,9]. Последние исследования в этом направлении представлены в [10]. Современные исследования проводятся также и по классической модели безотрывного удара, что свидетельствует о большом интересе к ударной тематике [11–14].

1. Общая постановка задачи

Рассматривается плоская задача о вертикальном и отрывном ударе кругового цилиндра под свободной поверхностью идеальной несжимаемой тяжелой жидкости [1]. Предполагается, что после удара цилиндр движется вглубь жидкости с постоянной скоростью. За цилиндром образуется присоединенная каверна, форма которой зависит от физических и геометрических параметров задачи. Требуется изучить динамику каверны на малых временах при дополнительном предположении, что точки отрыва внутренней свободной границы жидкости остаются неподвижными после удара на некотором начальном этапе движения цилиндра.

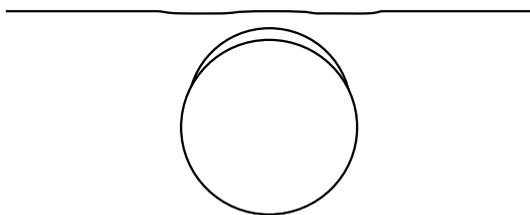


Рис. 1. Форма каверны при $t = 0.1$.

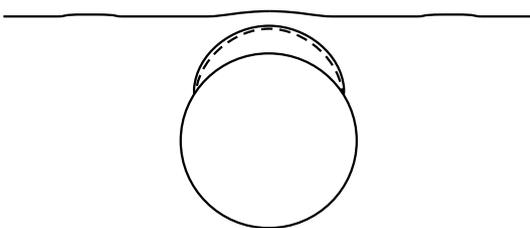


Рис. 2. Форма каверны при $t = 0.2$; штрихом показаны решения для пограничного слоя.

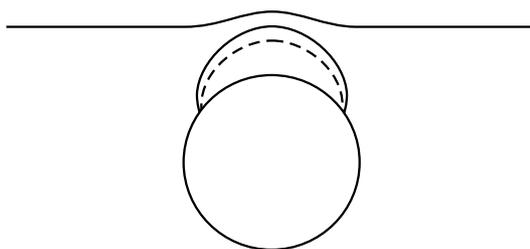


Рис. 3. Форма каверны при $t = 0.3$; штрихом показаны решения для пограничного слоя.

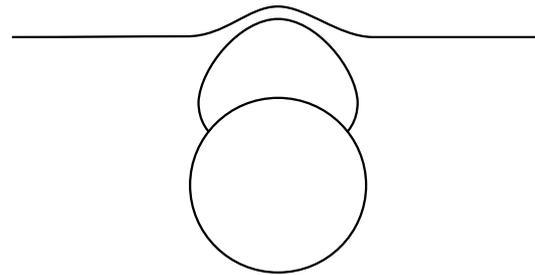


Рис. 4. Форма каверны при $t = 0.4$.

Математическая постановка задачи, записанная в безразмерных переменных в подвижной системе координат, связанной с цилиндром, имеет вид (рис. 1-4):

$$\Delta\Phi = 0, \quad r \in \Omega(t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = -n_y, \quad r \in S_{11}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} + 0.5(\nabla\Phi)^2 + Fr^{-2}(y - t - H) - 0.5\chi = 0, \tag{3}$$

$$r \in S_{12}(t),$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \sin\theta = \frac{\partial\eta}{\partial\theta}\dot{\theta}(t) + \frac{\partial\eta}{\partial t}, \quad r \in S_{12}(t), \tag{4}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} + 0.5(\nabla\Phi)^2 + Fr^{-2}\xi(x, t) = 0, \tag{5}$$

$$r \in S_2(t),$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\xi}{\partial x} \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial t}, \quad r \in S_2(t), \tag{6}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0, \quad y = -H_b + t; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0, \quad x = \pm H_R, \tag{7}$$

$$\Phi(x, y, 0) = \Phi_0(x, y), \quad \xi(x, 0) = 0, \quad \eta(\theta, 0) = 0. \tag{8}$$

Потенциал скоростей $\Phi_0(x, y)$, приобретенных частицами жидкости в момент, непосредственно следующий после удара, и первоначальная зона отрыва находятся на основе решения классической модели удара с отрывом [1]:

$$\Delta\Phi_0 = 0, \quad r \in \Omega(0), \tag{9}$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial n} = -n_y, \quad \Phi_0 \leq 0, \quad r \in S_{11}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial n} \geq -n_y, \quad \Phi_0 = 0, \quad r \in S_{12}(0), \tag{11}$$

$$\Phi_0 = 0, \quad y = H, \tag{12}$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial y} = 0, \quad y = -H_b; \quad \frac{\partial\Phi_0}{\partial x} = 0, \quad x = \pm H_R. \tag{13}$$

В силу неизвестности зоны отрыва $S_{12}(0)$, задача (9)–(13) является нелинейной и относится к классу задач со свободными границами. Согласно [15], ее решение существует и единственно. Обратим внимание на неравенства, которые формулируются в зонах контакта и

отрыва (формулы (10) и (11)). Эти неравенства вполне равносильны условию Кутты-Жуковского в точках отрыва. Неравенство в формуле (10) означает, что импульсивное давление $p_r = -\rho\Phi_0$ должно быть неотрицательным всюду на смоченной поверхности тела (в зоне контакта). Неравенство в формуле (11) запрещает жидким частицам входить внутрь твердого тела, хотя и не препятствует их отрыву от твердой поверхности. Данные неравенства удобно использовать при решении задачи об ударе с отрывом прямыми численными методами. Условие Кутты-Жуковского оказывается эффективным при построении аналитических решений.

Отметим важное свойство регулярности решения задачи (9)–(13), состоящее в том, что функция Φ_0 в окрестности точки раздела краевых условий ведет себя как $r^{1.5}$, где r — радиус-вектор соответствующей точки (в обычной смешанной задаче теории потенциала показатель степени равен 0.5). Это свойство обеспечивает выполнение условия Кутты-Жуковского в начальный момент времени.

Безразмерные переменные вводятся с помощью равенств

$$t' = \frac{a}{V_0}t, \quad x' = ax, \quad y' = ay, \quad \Phi' = aV_0\Phi, \quad p' = \rho V_0^2 p,$$

где штрихами помечаются размерные величины.

Неподвижные координаты X, Y связаны с подвижными x, y соотношениями: $X = x, Y = y + h(t)$, где $h(t)$ — закон движения цилиндра. Предполагается, что ось y направлена против вектора силы тяжести, начало координат находится в центре цилиндра. Картина течения жидкости является симметричной относительно оси y .

Основными характерными величинами в задаче являются число Фруда Fr и безразмерная разность давлений χ :

$$Fr = \frac{V_0}{\sqrt{ga}}, \quad \chi = 2 \frac{p_a - p_c}{\rho V_0^2},$$

где p_a — атмосферное давление; p_c — давление в каверне (при искусственной кавитации допускается зависимость от координат и времени); g — ускорение свободного падения; ρ — плотность жидкости; V_0 — скорость, приобретенная цилиндром в результате удара, a — радиус цилиндра.

В настоящей работе также используются следующие обозначения: Φ — потенциал скоростей абсолютного движения жидкости, записанный относительно подвижной системы координат; $\Omega(t)$ — область течения жидкости; S_{11} — часть поверхности цилиндра, на которой не происходит отрыва частиц жидкости; $S_{12}(t)$ — внутренняя свободная граница (граница каверны); $S_2(t)$ — внешняя свободная поверхность жидкости ($y = H$ — ее невозмущенный уровень); $\theta_s, \pi - \theta_s$ — угловые координаты точек отрыва; $\mathbf{V}_0 = (0, -V_0)$ — вектор скорости цилиндра ($V_0 > 0$), $h(t) = -t$ — его безразмерный закон движения; $y = -H_b$ — дно бассейна; $x = \pm H_r$ —

симметричные боковые стенки; r — радиус-вектор с координатами (x, y) ; r, θ — цилиндрические координаты ($x = R \cos \theta, y = R \sin \theta$).

На неизвестных заранее свободных границах формулируются динамические и кинематические условия. Динамические условия записываются на основании интеграла Коши-Лагранжа в подвижной системе координат. Предполагается, что на внешней свободной границе действует атмосферное давление ($p = p_a$), а распределение давления на внутренней свободной границе зависит от способа искусственной подачи газа в каверну ($p = p_c$). Кинематическое условие состоит в том, что жидкие частицы никогда не покидают свободной границы. Формы внутренней и внешней свободных границ определяются с помощью равенств:

$$R = 1 + \eta(\theta, t); \quad y = H + \xi(x, t) + t.$$

Кинематические уравнения (4), (6) получаются дифференцированием этих равенств по времени вдоль траектории движения жидкой частицы, находящейся на внутренней или внешней свободной границе. При выводе кинематического уравнения внутренней свободной границы жидкости используются полярные координаты R, θ .

В точках пересечения внутренней свободной границы с поверхностью цилиндра (в точках отрыва) ставится условие Кутты-Жуковского, означающее, что скорость жидкости в этих точках должна быть конечной.

2. Асимптотика решения задачи при малых временах

Прежде всего, заметим, что точки отрыва внутренней свободной границы жидкости удаётся удерживать неподвижными после удара, главным образом, благодаря искусственной кавитации. Будем предполагать, что давление газа, поступающего в каверну со стороны тела, имеет линейную зависимость от времени. Вследствие этого χ представляется в виде

$$\chi = \chi_0 + \chi_1 t + f(\theta)t, \quad f(\theta) = \chi_2 f_1(\theta) + \chi_3 f_2(\theta),$$

где $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3$ предполагаются постоянными величинами.

Функции $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$ являются четными относительно точки 0.5π , а их производные имеют в точке отрыва соответственно корневую и логарифмическую особенности (в этом случае коэффициенты χ_1, χ_2, χ_3 можно выбрать таким образом, чтобы третье асимптотическое приближение удовлетворяло условию Кутты-Жуковского).

Термины „корневая особенность“ и „логарифмическая особенность“ у производных означают, что в малой окрестности точки отрыва справедливы асимптотические формулы ($\theta \rightarrow \theta_s + 0$):

$$f_1'(\theta) \sim \text{const} \cdot (\theta - \theta_s)^{-0.5}, \quad f_2'(\theta) \sim \text{const} \cdot \ln(\theta - \theta_s).$$

Далее перейдем к решению основной задачи, которая состоит в построении регулярного асимптотического разложения потенциала скорости по степеням малого времени при специальном выборе данных коэффициентов, а также числа Фруда. Такой выбор параметров оправдывает предположение о неподвижности точек отрыва.

Здесь и в дальнейшем термин „регулярная функция“ означает, что первые производные этой функции должны быть непрерывными в точках отрыва.

Решение задачи (1)–(13) будем искать в виде следующих асимптотических разложений:

$$\Phi = \Phi_0 + t\Phi_1 + t^2\Phi_2 + \dots, \quad (14)$$

$$\eta(\theta, t) = t\eta_0(\theta) + t^2\eta_1(\theta) + t^3\eta_2(\theta) + \dots, \quad (15)$$

$$\xi(x, t) = t\xi_0(x) + t^2\xi_1(x) + t^3\xi_2(x) + \dots, \quad (16)$$

где многоточием обозначены члены более высокого порядка малости по t .

Подставляя разложения (14)–(16) в уравнение и граничные условия задачи (1)–(13), осуществляя с помощью формулы Тейлора перенос краевых условий с возмущенных участков границы области $\Omega(t)$ на первоначально невозмущенный уровень, а затем приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t , приходим для определения функций Φ_1 и Φ_2 к смешанным краевым задачам теории потенциалов в первоначально невозмущенной области $\Omega(0)$. Решения последних задач представляются в виде:

$$\Phi_1 = 0.5\chi_0 u + v, \quad \Phi_2 = 0.25\chi_1 u + w,$$

где функции u, v, w являются гармоническими в области $\Omega(0)$. На смоченной поверхности тела ($r = 1, -\pi - \theta_s < \theta < \theta_s$) и на боковых стенках ($x = \pm H_R$) эти функции удовлетворяют условию равенства нулю нормальной производной. В зоне отрыва ($r = 1, \theta_s < \theta < \pi - \theta_s$) и на внешней границе ($y = H$) для них выполняются краевые условия первого рода (формулы (17), (18) соответствует зоне отрыва):

$$u = 1, \quad v = Fr^{-2}(H - \sin \theta) - \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \sin \theta - 0.5 \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \right)^2, \quad (17)$$

$$w = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \eta_0(\theta) + 0.5 \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} [\eta_0^2(\theta) + \cos^2 \theta] - 0.5 Fr^{-2} [\eta_0(\theta) \sin \theta - 1 - \cos^2 \theta] + 0.25 f(\theta), \quad (18)$$

$$u = 0, \quad v = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial y} - 0.5 \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right)^2,$$

$$w = -0.5 Fr^{-2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}, \quad y = H.$$

Кроме этого, справедливы следующие соотношения на дне:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0.5 \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2}, \quad y = -H_b.$$

Величина $\eta_0(\theta)$, входящая в формулу (18), а также другие коэффициенты разложения (15) представляются в виде:

$$\eta_0(\theta) = a_1 + \sin \theta, \quad 2\eta_1(\theta) = a_4 - a_1\eta_0(\theta) - \eta_0'(\theta) \cos \theta,$$

$$3\eta_2(\theta) = a_6 + (1.5a_1^2 + a_2^2)\eta_0(\theta) - a_4(1.5a_1 + \sin \theta) + a_2 \cos \theta (5.5a_1 + 3 \sin \theta + Fr^{-2}) + a_1(3 \cos^2 \theta - Fr^{-2} \sin \theta) + 0.5a_3(\eta_0^2(\theta) + \cos^2(\theta)) - 0.5a_5 \cos \theta + Fr^{-2} \cos 2\theta.$$

Коэффициенты асимптотической формулы (16) определяются равенствами

$$\xi_0(x) = b_1, \quad 2\xi_1(x) = b_4,$$

$$3\xi_2(x) = (b_1 + 1)(0.5b_3(b_1 + 1) + b_2^2) + b_5.$$

В последних формулах используются следующие обозначения:

$$a_1 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial r}, \quad a_2 = \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r \partial \theta}, \quad a_3 = \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial r \partial \theta^2},$$

$$a_4 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}, \quad a_5 = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial \theta}, \quad a_6 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial r},$$

$$b_1 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}, \quad b_2 = \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y}, \quad b_3 = \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial y \partial x^2},$$

$$b_4 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}, \quad b_5 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial y},$$

где производные по r и θ вычисляются при $r = 1$, а дифференцирование по x и y проводятся при $y = H$.

Дальнейшие рассуждения основываются на утверждении, что производные функций u, v, w по угловой координате θ при $\theta \rightarrow \theta_s - 0$ ($r = 1$) имеют корневые особенности. Это позволяет подобрать коэффициенты χ_0 и χ_1 таким образом, чтобы функции Φ_1 и Φ_2 были регулярными в точках отрыва (зануляются коэффициенты при растущих членах). Проводя аналогию с работами [2,3], в которых регулярность потенциала скорости обеспечивалась за счет выбора положения точек отрыва (при фиксированных физических параметрах задачи), приходим к следующим выражениям для коэффициентов χ_0 и χ_1 :

$$\chi_0 = -\frac{2d_2}{d_1}, \quad \chi_1 = -\frac{4d_3}{d_1}, \quad (19)$$

$$d_1 = \lim_{\theta \rightarrow \theta_s - 0} \frac{\partial u}{\partial \theta} \sqrt{\theta_s - \theta},$$

$$d_2 = \lim_{\theta \rightarrow \theta_s - 0} \frac{\partial v}{\partial \theta} \sqrt{\theta_s - \theta},$$

$$d_3 = \lim_{\theta \rightarrow \theta_s - 0} \frac{\partial w}{\partial \theta} \sqrt{\theta_s - \theta}.$$

Важно отметить, что для справедливости последних формул необходимо потребовать, чтобы граничные функции в (17), (18) были регулярными в точках отрыва (т.е. производные от этих функций по θ должны быть непрерывными в указанных точках). В случае нарушения этого условия особенность у соответствующей производной по θ при $\theta \rightarrow \theta_s - 0$ может не быть корневой, и рассуждения, приводящие к формулам (19), могут оказаться неверными. Эту ситуацию проще всего объяснить на примере смешанной задачи для полуплоскости, где имеется точное решение. Оно может быть получено с помощью формулы Келдыша-Седова или на основе метода парных интегральных уравнений. Анализ этого решения показывает, что если производная граничной функции в условии первого рода имеет корневую особенность, то особенность у соответствующей производной потенциала скорости получается сильнее корневой (коэффициент при корневой особенности имеет вид расходящегося интеграла). В этом случае появляется еще логарифмический множитель. Также приведем физические соображения, которые говорят о необходимости такой регулярности. Так как внутренняя свободная граница подходит к точке отрыва по касательной (это следует из решения (21) для пограничного слоя), можно считать, что в малой окрестности этой точки жидкие частицы, расположенные на свободной границе, фактически лежат на дуге окружности (т.е. на границе тела). Отсюда следует, что нарушение сформулированного выше условия регулярности граничных функций означает неограниченность скоростей жидких частиц, расположенных на внутренней свободной границе вблизи точки отрыва.

Краевое условие для функции v в (17) автоматически удовлетворяет сформулированному требованию. В самом деле, производная функции v по θ ($r = 1$, $\theta_s < \theta < \pi - \theta_s$) имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r \partial \theta} \eta_0(\theta) - \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \cos \theta - Fr^{-2} \cos \theta.$$

Первое слагаемое в этом выражении не имеет особенности в точке отрыва, так как, в силу регулярности решения классической задачи об ударе с отрывом, функция $\eta_0(\theta)$ при $\theta \rightarrow \theta_s + 0$ ведет себя как $const \cdot (\theta - \theta_s)^{0.5}$, а вторая производная функции Φ_0 по r и θ как $const \cdot (\theta - \theta_s)^{-0.5}$. Второе слагаемое также не содержит особенности в силу непрерывности первых производных функции Φ_0 в данной точке. Таким образом, регулярность функции Φ_1 обеспечивается только специальным выбором коэффициента χ_0 (формула (19)). При этом χ_0 зависит от числа Фруда, которое на данном этапе (при учете только первых двух членов асимптотики) можно выбрать произвольным образом.

Теперь проведем анализ краевого условия для функции w (формула (18)). В отличие от (17), его регулярность уже не получается автоматически. Данная функция будет непрерывной в точке отрыва, а ее производная по θ в общем случае будет иметь там корневую и

логарифмическую особенности. Ниже приводится выражение, в котором собраны все слагаемые, содержащие указанные особенности:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r \partial \theta} \left[-2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \sin \theta - \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \right)^2 - 1 + Fr^{-2} \sin \theta \right] \\ & - 0.5 \chi_2 f'_1(\theta), \\ & 2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial \theta} \eta_0(\theta) + 2 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - 0.5 \chi_3 f'_2(\theta). \end{aligned}$$

Наличие корневой особенности в первой формуле следует из свойств решения классической модели удара с отрывом. Поэтому остановимся на объяснении логарифмической особенности во второй формуле. Выясним, как ведет себя нормальная производная функции Φ_1 вблизи точки отрыва. Так как эта проблема локальная, ее можно объяснить на специально подобранном примере, имеющем аналитическое решение. Рассмотрим смешанную краевую задачу теории потенциала в полуплоскости с выброшенным полукругом, где на дуге окружности имеются две симметричные точки раздела краевых условий первого и второго рода (граничные функции здесь такие же, как и для Φ_1). С помощью конформного отображения эта задача сводится к смешанной краевой задаче в полуплоскости, для которой строится точное аналитическое решение. Анализ этого решения показывает, что нормальная производная функции Φ_1 вблизи точки раздела краевых условий (со стороны области задания условия первого рода) имеет следующее представление: вначале идет корневая особенность (которая зануляется в основной задаче за счет выбора параметра χ_0), а затем первый малый член, имеющий вид $const(\theta - \theta_s)^{0.5} \ln(\theta - \theta_s)$. На основании проведенных рассуждений можно утверждать, что первые два члена в последней формуле имеют чисто логарифмические особенности.

Теперь коэффициенты χ_2 , χ_3 можно подобрать таким образом, чтобы граничная функция (18) была непрерывно дифференцируемой в точках отрыва. В результате все члены асимптотического разложения потенциала скорости будут удовлетворять условию Кутты-Жуковского.

Отдельно рассмотрим случай $\chi_2 = 0$, $\chi_3 = 0$ (самый простой закон искусственной кавитации). Здесь корневую особенность в выражении для производной граничной функции можно устранить за счет специального выбора числа Фруда. Для этого необходимо потребовать, чтобы выражение в квадратных скобках стремилось к нулю при $\theta \rightarrow \theta_s + 0$. В результате придем к следующему равенству:

$$Fr^2 = \frac{\sin \theta_s}{\cos^2 \theta_s}. \quad (20)$$

При этом слабая логарифмическая особенность остается. Однако полученное для третьего приближения решение можно с успехом применять в качестве приближенного. В связи с этим отметим, что логарифмический множитель в выражении для нормальной производной функции Φ_1 не удается обнаружить численно.

При этом отношение данной нормальной производной к квадратному корню ведет себя относительно стабильно (с погрешностью всего несколько процентов) в диапазоне $\theta - \theta_s = 0.005 - 0.1$. Это можно объяснить только наличием очень маленького коэффициента перед логарифмом (коэффициент порядка единицы был бы сразу заметен). Провести численные расчеты в меньшей окрестности точки отрыва не удастся. Отметим также, что производную граничной функции, содержащую логарифмическую особенность, можно сгладить в малой окрестности точки отрыва. Оправдать такое сглаживание можно с помощью незначительного изменения закона искусственной кавитации. В результате третье приближение будет строго удовлетворять условию Кутты-Жуковского. При этом практически не будет видна разница между строгим и приближенным решениями.

Теперь остановимся на определении формы внутренней свободной границы жидкости. Анализ асимптотической формулы (15) показывает, что вблизи точки отрыва коэффициенты $\eta_0(\theta)$, $\eta_1(\theta)$, $\eta_2(\theta)$ ведут себя следующим образом:

$$\begin{aligned}\eta_0(\theta) &\sim \beta(\theta - \theta_s)^{0.5}, \\ \eta_1(\theta) &\sim -0.25\beta \cos \theta_s (\theta - \theta_s)^{-0.5}, \\ \eta_2(\theta) &\sim -24^{-1}\beta \cos^2 \theta_s (\theta - \theta_s)^{-1.5},\end{aligned}$$

где β определяется численно на основе первого из этих равенств.

Таким образом, вблизи точки отрыва разложение (15) не применимо. Указанные особенности можно сгладить на малых временах с помощью специального решения для пограничного слоя, которое строится по аналогии с [2,3] (т.е. такого решения, которое эффективно вблизи точки отрыва). Приведем его здесь в окончательном виде:

$$\eta(\theta, t) = \beta t^{1.5} F(\tau) + \dots, \quad \tau = \frac{\theta - \theta_s}{t}, \quad (21)$$

$$F(\tau) = \frac{2}{3 \cos \theta_s} \tau^{1.5}, \quad 0 < \tau < \cos \theta_s,$$

$$F(\tau) = \frac{2}{3 \cos \theta_s} \left[\tau^{1.5} - (\tau - \cos \theta_s)^{1.5} \right], \quad \cos \theta_s < \tau < \infty.$$

Небольшое отличие от работ [2,3] состоит в том, что при $\tau \rightarrow \infty$ согласование с внешним разложением осуществляется на основе первых трех (а не двух) членов асимптотики. Кроме того, методы теории пограничного слоя применяются здесь к исходной, а не к преобразованной задаче.

3. Численная реализация и анализ результатов

Для численного решения классической задачи об ударе с отрывом применяется специальный итерационный метод последовательного уточнения неизвестных заранее зон отрыва и контакта частиц жидкости [2,3].

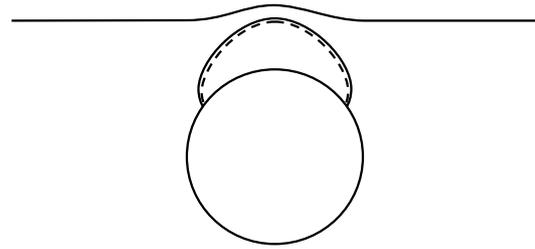


Рис. 5. Форма каверны при $t = 0.3$; штрихом показаны решения, полученные по формуле (21) при $\beta = 2.0$.

Согласно этому методу, нелинейная задача (9)–(13) сводится к последовательному решению линейных краевых задач (с фиксированными точками раздела краевых условий), которые решаются численно методом конечных элементов, с применением пакета FreeFem++ [16]. Линейные краевые задачи, возникающие для функций u , v , w , также решаются с помощью данного пакета.

При рассмотрении конкретных численных примеров фиксировались следующие геометрические параметры задачи: $H = 1.2$, $H_b = 5$, $H_R = 5$, а коэффициенты χ_2 , χ_3 полагались равными нулю (рассматривается самый простой закон искусственной кавитации). Для угловой координаты точки отрыва, а также числа Фруда и коэффициентов χ_0 и χ были получены следующие приближенные значения: $\theta_s = 0.584$, $Fr = 0.89$, $\chi_0 = -2.99$, $\chi_1 = -9.81$.

На рис. 1–4 показана динамика каверны в моменты времени $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$. Рис. 2 демонстрирует хорошее согласование решений для пограничного слоя с внешним разложением практически во всем диапазоне изменения угловой координаты θ . Это позволяет описать форму каверны на малых временах ($0 < t < 0.2$) с помощью простых аналитических формул. Обратим внимание на то, что построенное решение для пограничного слоя не зависит от величин Fr и χ . Следовательно, отмеченное выше хорошее согласование говорит о том, что физические параметры начинают влиять на форму внутренней свободной границы жидкости только при $t > 0.2$. Отметим также, что различие между формами свободных границ, полученных на основе двух и трех членов асимптотики, становится заметным для времен, больших $t = 0.3$. Это является основанием для применения предложенного метода в указанном временном диапазоне.

Обратим внимание на следующий интересный факт, полученный с помощью численных экспериментов. Коэффициент β в формуле (21) можно подобрать таким образом, чтобы при $t = 0.3, 0.4$ решение для пограничного слоя очень хорошо аппроксимировало внешнее разложение во всем диапазоне изменения угловой координаты θ . На рис. 5 показано согласование этих разложений при $t = 0.3$ ($\beta = 2.0$, ср. с рис. 3).

Важно отметить, что численное значение, найденное для величины χ_0 , можно проверить другим способом. С этой целью рассмотрим аналогичную задачу с учетом

динамики точек отрыва. Ранее для угловой координаты точки отрыва была получена следующая асимптотическая формула [3]:

$$\theta_s = \theta_{s0} + c_1 t.$$

Если величина χ_0 найдена правильно, то коэффициент c_1 , определяемый из условия регулярности, должен обратиться в нуль (в силу предположения о неподвижности точки отрыва). Численные расчеты, проведенные с помощью метода, предложенного в [2,3], показывают, что коэффициент $c_1 \approx 0.002$. Учитывая небольшую погрешность, которую дает численная программа, можно считать, что $c_1 = 0$. Аналогичные проверки были выполнены при различных других значениях Fr и $\chi_0 = \chi_0(Fr)$: $\chi_0(0.5) = -7.10$; $\chi_0(1) = -2.38$; $\chi_0(5) = -0.87$; $\chi_0(10) = -0.82$. Отметим, что для получения функциональной зависимости $\chi_0(Fr)$ нужно зафиксировать число Фруда и определить χ_0 по формуле (19).

Укажем еще один способ нахождения коэффициента χ_0 , альтернативный (19):

$$\chi_0 = -\frac{2d_5}{d_4}, \quad d_4 = \lim_{\theta \rightarrow \theta_s + 0} \frac{\partial u}{\partial r} \sqrt{\theta - \theta_s},$$

$$d_5 = \lim_{\theta \rightarrow \theta_s + 0} \frac{\partial v}{\partial r} \sqrt{\theta - \theta_s}, \quad r = 1. \quad (22)$$

В нем χ_0 определяется из условия непрерывности нормальной производной функции Φ_1 при $r = 1$, $\theta = \theta_s$. Другими словами зануляется коэффициент при корневой особенности этой производной при $r = 1$, $\theta \rightarrow \theta_s + 0$. Численные расчеты показали хорошее согласование приближенных значений данного коэффициента, полученных двумя различными способами (по формулам (19) и (22)). Аналогичным образом можно определить и коэффициент χ_1 .

Наконец, заметим, что при произвольном числе Фруда в качестве $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$ можно выбрать следующие функции (производная по r берется при $r = 1$):

$$f_1(\theta) = \eta_0(\theta), \quad f_2(\theta) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \eta_0(\theta).$$

В этом случае коэффициенты χ_2 и χ_3 будут иметь вид

$$\chi_2 = 2Fr^{-2} \sin \theta_s - 2 \cos^2 \theta_s, \quad \chi_3 = 4.$$

Заключение

Исследована плоская задача об ударе с отрывом кругового цилиндра и его последующем движении вглубь жидкости с постоянной скоростью. Предполагается, что после удара точки отрыва внутренней свободной границы жидкости остаются неподвижными, по крайней мере, в течение некоторого небольшого промежутка времени. Показывается, что решение такой задачи можно построить в виде степенного асимптотического разложения

по малому времени (с учетом первых трех членов асимптотики) только при специальном выборе характерных физических величин (числа Фруда и давления в каверне). Проводится асимптотический анализ задачи с учетом решений для пограничного слоя в точках отрыва. Рассматриваются конкретные примеры с численными решениями.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] Л.И. Седов. *Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики* (Наука, М., 1966)
- [2] M. Norkin, A. Korobkin. *J. Engng. Math.*, **70**, 239 (2011). DOI: 10.1007/s10665-010-9416-6
- [3] М.В. Норкин. *Сиб. журн. индустр. матем.*, **19** (4), 81 (2016). DOI: 10.17377/SIBJIM.2016.19.409 [M.V. Norkin. *J. Appl. Ind. Math.*, **10** (4), 538 (2016). DOI: 10.1134/S1990478916040104]
- [4] М.И. Гуревич. *Теория струй идеальной жидкости* (Наука, М., 1979)
- [5] А.Н. Иванов. *Гидродинамика развитых кавитационных течений* (Судостроение, Л., 1980)
- [6] M. Reinhard, A.A. Korobkin, M.J. Cooper. *J. Engng. Math.*, **96** (1), 155 (2016). DOI: 10.1007/s10665-015-9788-8
- [7] В.И. Пегов, И.Ю. Мошкин. *Челябин. физ.-мат. журн.*, **3** (4), 476 (2018). DOI: 10.24411/2500-0101-2018-13408
- [8] P.A. Tyvand, T.V. Miloh. *J. Fluid Mech.*, **286** (10), 67 (1995). DOI: 10.1017/S0022112095000656
- [9] P.A. Tyvand, M. Landrini. *J. Engng. Math.*, **40** (2), 109 (2001). DOI: 10.1023/A:1017527310600
- [10] А.Е. Голиков, Н.И. Макаренко. *Прикл. механ. и техн. физика*, **63** (5), 89 (2022). DOI: 10.15372/PMTF20220509 [A.E. Golikov, N.I. Makarenko. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **63** (5), 806 (2022). DOI: 10.1134/S0021894422050091]
- [11] J. Philippi, A. Antkowiak, Pierre-Yves Lagree. *Eur. J. Mech. B.*, **67**, 417 (2018). DOI: 10.1016/j.euromechflu.2017.10.005
- [12] К.В. Hilmervik, P.A. Tyvand. *J. Engng. Math.*, **103** (1), 159 (2017). DOI: 10.1007/s10665-016-9866-6
- [13] К.В. Hilmervik, P.A. Tyvand. *Appl. Ocean Res.*, **87**, 247 (2019). DOI: 10.1016/j.apor.2019.04.002
- [14] Y.N. Savchenko, B.-Y. Ni, G.Y. Savchenko, Y.A. Semenov. *J. Fluid Mech.*, **955**, A28 (2023). DOI: 10.1017/jfm.2022.1075
- [15] В.И. Юдович. *Владик. матем. журнал*, **7** (3), 79 (2005). <http://mi.mathnet.ru/vmj168>
- [16] М.Ю. Жуков, Е.В. Ширяева. *Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии* (ЮФУ, Ростов-на-Дону, 2008)