03

Физико-математическая модель обледенения вращающейся сферы в соосном переохлажденном газокапельном потоке

© А.В. Кашеваров, А.Л. Стасенко

Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского,
140180 Жуковский, Россия
e-mail: a.v.kash@yandex.ru

Поступило в Редакцию 21 июня 2023 г.
В окончательной редакции 27 июля 2023 г.
Принято к публикации 27 июля 2023 г.

Предложена физико-математическая модель для оценки влияния центробежной силы на характерные размеры иглообразной наледи, образующейся в результате соударения большой переохлажденной капли со сферой, вращающейся в соосном потоке воздуха. Учтены потери массы капель при столкновении с поверхностью вследствие расплескивания. Численная реализация модели позволила исследовать влияние свойств поверхности на процесс обледенения и, в частности, оценить площадь поверхности, освобожденной ото льда центробежной силой.

Ключевые слова: большие переохлажденные капли, расплескивание капли, центробежная сила, угол смачивания, поверхностное натяжение, отрыв капель.

DOI: 10.61011/JTF.2023.10.56279.155-23

Введение

Обледенение тела в переохлажденном воздушно-капельном потоке сопровождается комплексом сложных физических явлений. К настоящему времени во многих странах созданы сертифицированные численные коды для предсказания пространственно-временной эволюции наледи на элементах конструкции летательного аппарата. Некоторые из этих кодов, в частности FENSAP-ICE, рассматривают также обледенение вращающихся элементов конструкции двигателя. При этом возникают дополнительные усложнения в физико-математическом моделировании обледенения. Так, в [1] приведены результаты исследований в аэрохолодильной трубе форм наледи на вентиляторах с различной формой центральных тел (конус, эллипсоид и конус с эллипсоидальным продолжением) в переохлажденном воздушном потоке с каплями небольшого диаметра ($\sim 20\,\mu$m). Получено, в частности, что вращение приводит к образованию иглообразных сосулек на части поверхности центрального тела на некотором удалении от его вершины, а далее возникает свободная ото льда зона из-за срыва льда под действием центробежных сил. Существующие коды пока не позволяют моделировать такие ледяные наросты.

Иглообразные сосульки возникали при слабо отрицательной температуре воздушного потока (-5°C) и достаточно большой массовой концентрации жидкой воды в нем (LWC — Liquid Water Content) в условиях образования так называемого глянцевитого льда. При этом переохлажденные капли не замерзали полностью при ударе о поверхность, образуя текущую жидкую пленку. Формирование игольчатой наледи объяснено в [1] отрывом пленки от поверхности под действием центробежных сил с последующим замерзанием. В [2] сообщается, что подобные игольчатые образования обнаружены на коке вентилятора двигателя в реальном полете самолета A321 в условиях ледяного дождя, т. е. больших переохлажденных капель.

В [3] предложена дискретно-капельная модель обледенения поперечного невращающегося цилиндра в таких условиях, использующая результаты экспериментальных и теоретических исследований [4,5] соударения капли с плоской поверхностью. Предложенный в [3] дискретно-капельный подход модифицирован и применен в настоящей работе для моделирования формы замерзшей большой переохлажденной капли на поверхности вращающейся сферы.

1. Предварительные соображения

Рассмотрим воздушный поток со скоростью u_∞, несущий большие переохлажденные капли радиуса a_d, но в отличие от случая [3] они соударяются с поверхностью вращающейся сферы радиуса R. Согласно международным нормам летной годности, „большими" считаются капли диаметром более $100\,\mu$m.

Схема натекания капли на вращающуюся сферу приведена на рис. 1. Обратим внимание на то, что угловая скорость вращения сферы W изображена в „неподвижной" системе координат. Вращение сферы приводит к возникновению обтекания поверхности сферы в обратном направлении, указанном вектором $\mathbf{V}_W$. Впрочем, выбор направления вращения сферы при осесимметричном обтекании не влияет на результат обледенения.

При ударе капля расплескивается и лишь часть m ее изначальной массы m_0 остается на поверхности. В [3] на основе результатов работы [4] для неподвижной по-

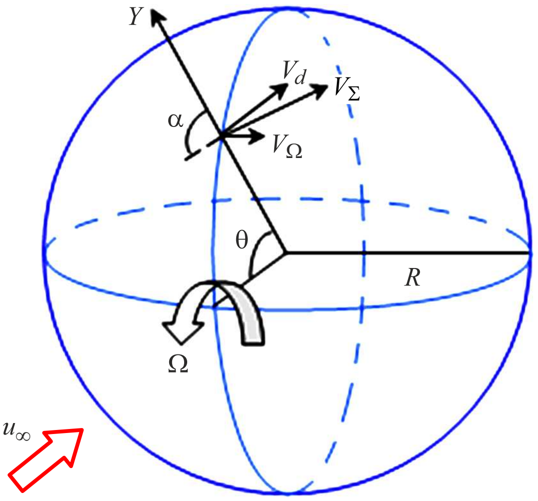

Рис. 1. Геометрия вращающейся сферы. Угловая скорость Ω дана в лабораторной системе координат, компоненты скоростей капли — в локальной неинерциальной системе.

верхности предложена аппроксимационная зависимость коэффициента $\xi = m/m_0$ от угла падения α капли

$$\xi = \frac{m}{m_0} = \left[1 - \left|\frac{R_s - R_l}{R_s + R_l}\right|^3 \frac{d_0}{d_*}\left(\frac{v_n}{v_*}\right)^{2/3}\left(\frac{\mu_*}{\mu_l}\right)^{1/2} \times \cos^2\alpha\right]\cos^{1/6}\alpha \geq 0.$$

Здесь $R_{s,l} = \rho_{s,l}c_{s,l}$ — волновые сопротивления (импедансы) материалов обтекаемого тела и капли ($\rho_{s,l}$ и $c_{s,l}$ — их плотности и скорости звука в них, s — solid, l — liquid), v_n — нормальная составляющая скорости удара, μ_l — вязкость жидкости. Значения опорных параметров: $d_* = 250\,\mu$m, $v_* = 80$ m/s, $\mu_* = 1.75 \cdot 10^{-3}$ Pa · s.

Влияние вращения на долю ξ массы, оставшейся на поверхности, определяется через изменение угла падения α (рис. 1), так что

$$\cos\alpha = \cos\theta[1 + (V_\Omega/u_\infty)^2]^{-1/2}, \quad V_\Omega = \Omega R\sin\theta,$$

где θ — полярный угол сферической системы координат, V_Ω — окружная скорость капли в точке падения, Ω — угловая скорость вращения сферы.

Далее в [3] в принято, что жидкость, оставшаяся после удара, растекается по поверхности, и в момент прекращения растекания форма пятна контакта жидкости с поверхностью представляет собой эллипс с полуосями

$$a_l = r_l\cos^{-2/5}\alpha, \quad b_l = r_l\cos^{1/5}\alpha;$$

для максимального радиуса r_l пятна контакта при нормальном соударении ($\alpha = 0$) получена оценка:

$$r_l \sim \frac{2\xi^{5/12}a_d}{\sqrt{6}}\left(\frac{\rho_l v_n a_d}{\mu_l}\right)^{1/4}. \tag{1}$$

Классическим примером существенной деформации в силовом поле является капля, висящая на потоке. В отличие от этой ситуации отвердевание переохлажденной капли после соударения с вращающимся телом сопровождается, помимо удлинения под действием центробежной силы и возможным срывом с его поверхности, комплексом физических явлений, в частности, нуклеацией, скорость которой зависит от характеристик сдвигового течения жидкости [6]; ростом кристаллов, суммарный объем которых увеличивает эффективную вязкость суспензии (например, известная формула Эйнштейна) и ее коэффициент теплопроводности; выделением теплоты фазовых переходов, которая удаляется теплообменом с обтекающим воздухом и, возможно, излучением [7,8].

Как показывает эксперимент [9], даже в случае капли, отвердевающей на неподвижной подложке, образуется полярное заострение; в случае вращения осесимметричных тел (конуса, эллипсоида), как уже было отмечено во Введении, образуются иглообразные сосульки [1,2].

Целью настоящей работы является определение формы и наклона ледяных иголок, а также место их отрыва под действием центробежной силы. Предлагаемая ниже модель справедлива для капель любых размеров; разумеется, для мелких капель рассмотренные эффекты не столь выразительны.

2. Физико-математическая модель

Обилие сложных физических процессов приводит к необходимости построения математических моделей, использующих ряд упрощающих предположений и эвристических соображений. Заменим оставшуюся на поверхности жидкость равновеликим по объему сопутствующим телом более простой формы. Наиболее подходящим для имитации образования иглообразной сосульки сопутствующим телом является конус. К сожалению, площадь поверхности наклонного конуса не удается представить в элементарных функциях. Поэтому в качестве сопутствующего тела возьмем пирамиду с квадратным основанием. Отметим, что отличие площадей соприкосновения с воздухом для прямых пирамиды и конуса одинакового объема и высоты не превышает величины $\sim 10\%$. Можно надеяться, что таков же масштаб ошибки при замене неизвестной реальной формы ледяной иглы на коническую. Это позволяет также рассматривать конус и пирамиду как равноценные фигуры и использовать ту и другую, исходя из удобства оценок.

Центробежная сила приводит к удлинению капли и уменьшению площади ее контакта с поверхностью твердого тела, уменьшая энергию соприкосновения с воздухом. Кроме того, происходит наклон оси пирамиды на угол ϑ по отношению к локальной нормали. Геометрия сопутствующей пирамиды представлена на рис. 2.

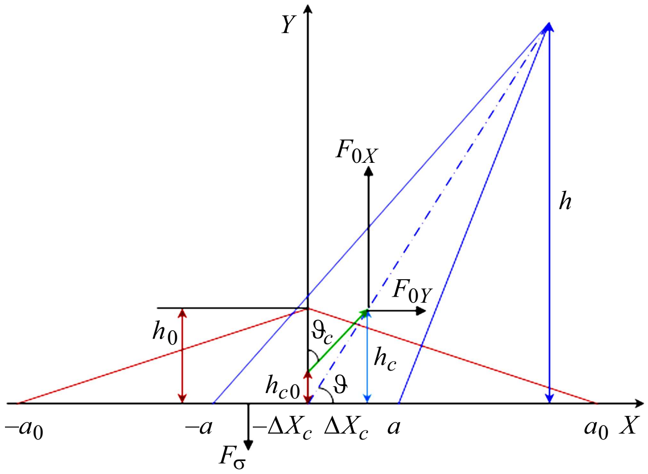

Рис. 2. Геометрия сопутствующей пирамиды.

Запишем изменение суммарной поверхностной энергии за счет работы центробежной силы

$$\sigma_{la}(S_a - S_{a0}) + \sigma_{ls}(S_w - S_{w0}) - \sigma_{sa}(S_w - S_{w0})$$
$$= m\Omega^2 R(Y_c - Y_{c0})(\sin^2\theta + \tan\vartheta_c \cos\theta \sin\theta).$$

Здесь σ_{la}, σ_{ls} и σ_{sa} — коэффициенты поверхностного натяжения на границах: жидкость–воздух, жидкость–твердое тело, твердое тело–воздух (индексы: l — liquid, a — air, s — solid). Далее S_a и S_{a0} — площади боковой поверхности (граничащей с воздухом) пирамиды при наличии и отсутствии вращения, S_w и S_{w0} — соответствующие площади основания (контактирующей с поверхностью сферы — стенкой, индекс w — wall) пирамиды. Затем Y_c и Y_{c0} — соответствующие координаты ее центра масс в перпендикулярном направлении. Наконец, ϑ_c — угол наклона траектории смещения центра масс, находящийся на расстоянии четверти высоты пирамиды. Он связан с ϑ соотношением

$$\tan\vartheta = \tan\vartheta_c(1 - h_0/h).$$

где h_0 и h — высоты пирамиды в отсутствие и при наличии вращения.

Таким образом, первое слагаемое описывает приращение поверхности соприкосновения жидкости с воздухом, второе — с твердым телом, третье — воздуха с твердым телом. В дальнейшем положим $\sigma_{la} \equiv \sigma$. При записи уравнения действием силы тяжести пренебрегалось. Кроме того, учтено, что основная часть площади поперечного сечения фигуры находится в пограничном слое, так что влиянием аэродинамической силы можно пренебречь. Предполагается, что $h \ll R$, так что центробежную силу можно считать постоянной на масштабах капли или сопутствующего тела (пирамиды).

В безразмерных переменных $H = h/a$, $H_0 = h_0/a_0$ (a и a_0 — половина длины стороны квадрата основания пирамиды при наличии и отсутствии вращения) это уравнение принимает вид

$$2(1+H^2)^{1/2} + \left[H^2 + (1 + H\tan\vartheta)^2\right]^{1/2}$$
$$+ \left[H^2 + (1 - H\tan\vartheta)^2\right]^{1/2} - 4(H/H_0)^{2/3}(1+H_0^2)^{1/2}$$
$$+ 4\cos\theta_\sigma\left[(H/H_0)^{2/3} - 1\right] = A\chi\xi^{2/3}H^{2/3}(H^{2/3} - H_0^{2/3})$$
$$\times (\sin^2\theta + H^{2/3}\tan\vartheta\cos\theta\sin\theta), \tag{2}$$

где $\chi = 1/4$, $A = 4\rho_l \pi^{2/3} a_d^2 \Omega^2 R/(3\sigma)$.

Здесь использована известная связь трех коэффициентов поверхностного натяжения $\sigma_{sa} = \sigma_{ls} + \sigma_{la}\cos\theta_\sigma$ (θ_σ — угол смачивания).

При записи уравнения (2) учтены условия сохранения объема V (и массы) капли, оставшейся на поверхности вращающегося тела:

$$V = 4\pi a_d^3 \xi/3 = 4a^2 h/3 = 4a_0^2 h_0/3.$$

Начальная высота пирамиды при этом равна

$$h_0 = \pi a_d^3 \xi / a_0^2.$$

Величина a связана с корнем уравнения (2) формулой

$$a = a_d \sqrt[3]{\xi\pi/H}.$$

Предполагается, что передняя сторона квадрата (основания пирамиды) перпендикулярна плоскости падения капли.

В качестве второго физического условия принято равновесие моментов сил относительно точки 0 — центра основания пирамиды льда, примерзающей к телу (рис. 2):

$$F_{\Omega X}\Delta Y_c = (F_{\Omega Y} + F_\sigma)\Delta X_c.$$

Здесь $F_{\Omega X}, F_{\Omega Y}$ — тангенциальная и нормальная компоненты центробежной силы, F_σ — сила взаимодействия частицы с поверхностью, ΔY_c и ΔX_c — смещения центра масс по нормали и касательной к поверхности. Предполагается, что вследствие наклона точка приложения вектора силы F_σ смещена в сторону, противоположную наклону, а ее абсцисса равна $-\Delta X_c$. Это смещение приводит к сложному перераспределению напряжений на поверхности контакта замерзающей капли и подложки. Нормальная и тангенциальная компоненты равнодействующей силы этого взаимодействия и ее точка приложения трудноопределяемы. В настоящей работе использованы следующие соображения. Прежде всего, тангенциальная компонента не представляет интереса, поскольку не дает вклада в баланс моментов сил относительно центра основания пирамиды. Согласно закону Юнга–Дюпре, энергия этого взаимодействия есть величина порядка $4a^2\sigma(1+\cos\theta_\sigma)$. Приписывая ее контактной линии длиной $8a$, получим для силы оценку

$F_\sigma = a\sigma(1+\cos\theta_\sigma)$. В результате для определения угла ϑ наклона оси пирамиды в безразмерных переменных имеем:

$$\tan\vartheta = \frac{AH^{1/3}\cos\theta\sin\theta}{AH^{1/3}\sin^2\theta + (1+\cos\theta_\sigma)/2}. \qquad (3)$$

Видно, что при углах $\theta = 0$ и $\pi/2$ (в точке торможения и на экваторе) наклон оси отсутствует, а при $\theta_\sigma = \pi$ (абсолютная несмачиваемость) исчезает сила взаимодействия с поверхностью (второе слагаемое в знаменателе).

3. Численная реализация и результаты расчетов

Численные исследования проведены для следующего набора определяющих параметров: $u_\infty = 50$ m/s, радиус капель $a_d = 200\,\mu$m, радиус сферы $R = 15$ mm. При этом наборе параметров движение капель можно считать прямолинейным со скоростью $V_d = u_\infty$, так как число Стокса

$$\mathrm{Stk} = \frac{2\rho_l a_d^2 u_\infty}{9\mu_a R} \approx 2\cdot 10^4 \gg 1,$$

где μ_a — вязкость воздуха.

Принят следующий набор значений параметров воды и воздуха: $\mu_a = 1.3\cdot 10^{-5}$, $\mu_l = 10^{-3}\,\mathrm{Pa\cdot s}$; $\rho_l = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$; $\sigma = 0.07$ N/m.

При решении уравнения (2) начальное значение a_0 находилось из условия равенства площадей контакта капли и сопутствующей пирамиды

$$\pi a_l b_l = 4a_0^2,$$

что приводит к зависимости a_0 от угла α падения капли и, следовательно, полярного угла θ:

$$a_0 = \frac{\sqrt{\pi}\,r_l}{2\cos^{1/10}\alpha}.$$

Для максимального радиуса r_l пятна контакта капли с поверхностью, определенному по формуле (1), начальное значение H_0 оказывается довольно малым. Так, $H_0 \approx 0.02$ для передней критической точки ($\theta = 0$). Решение уравнения (2) при таком H_0 имеет физический смысл (т.е. $H = H_0$ при $\theta = 0$, где вращение отсутствует, и увеличивается при удалении от критической точки) лишь в узком диапазоне изменения угла θ_σ ($0.9996 \le \cos\theta_\sigma \le 1$).

Напомним, что формула (1) получена в [3] в предположении о том, что кинетическая энергия падающей капли диссипирует вследствие силы вязкого трения при растекании капли по поверхности. Очевидно, что этот процесс должен зависеть и от угла смачивания. При оценке работы силы трения использовался подгоночный множитель, равный $\sqrt{6}$, который был найден на основе сравнения с результатами [4] для мелких капель ($a_d = 10\,\mu$m).

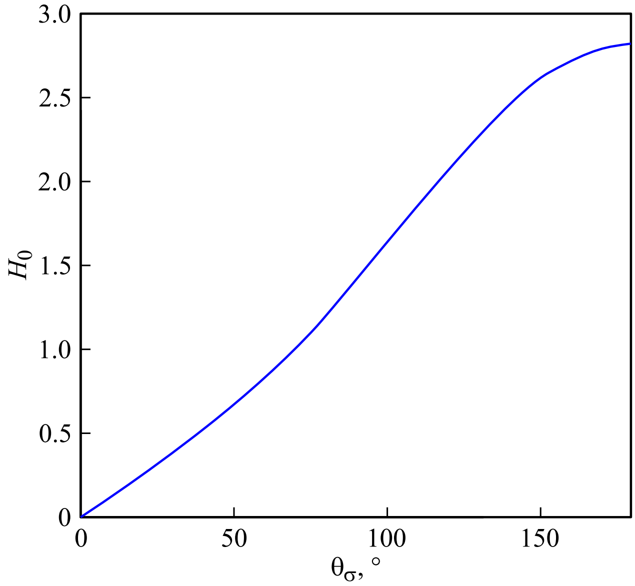

Рис. 3. Зависимость начальной относительной высоты пирамиды в точке торможения потока от угла смачивания.

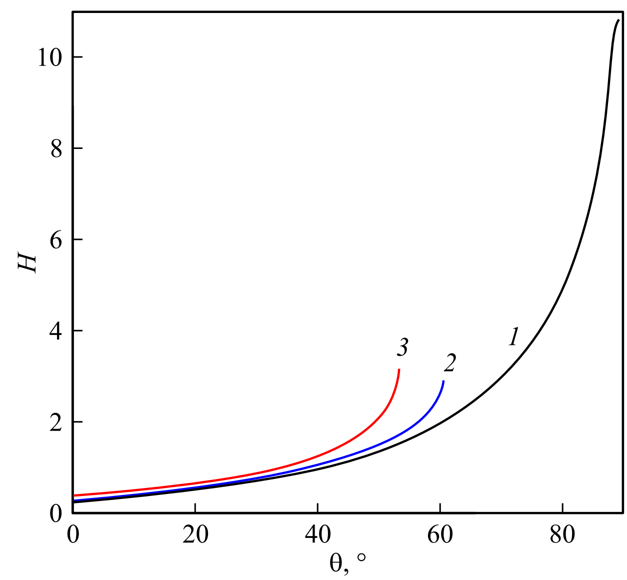

Рис. 4. Зависимость относительной высоты отвердевшей капли от полярного угла при значениях угла смачивания: *1* — $\theta_\sigma = 21$, *2* — 24, *3* — 31.5°.

В настоящей работе при изменении подгоночного множителя изменялось значение H_0 в передней критической точке и определялась критическая величина θ_σ, при которой решение уравнения (2) имеет физический смысл. Очевидно, что зависимость $H_0(\theta_\sigma)$ должна быть однозначной и $H_0(0) = 0$ (рис. 3).

На рис. 4 приведены результаты решения уравнения (2) для различных значений угла смачивания θ_σ при частоте вращения $f = 100$ Hz. Кривая *1* соответствует $\theta_\sigma = 21°$. При этом значении θ_σ замерзшая капля удерживается на поверхности во всем диапазоне изменения

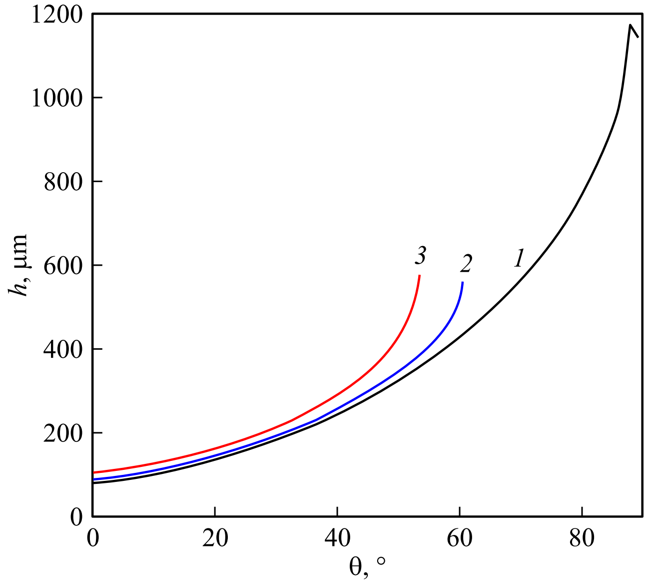

Рис. 5. Зависимость высоты отвердевшей капли от полярного угла при значениях угла смачивания: *1* — $\theta_\sigma = 21$, *2* — 24, *3* — 31.5°.

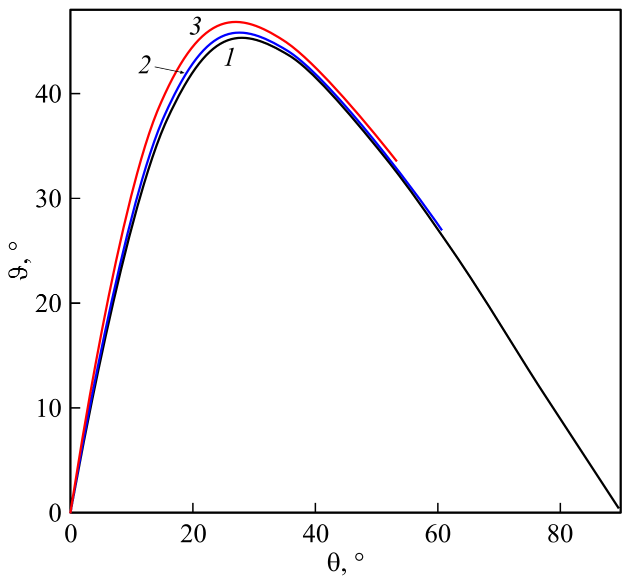

Рис. 6. Зависимость угла наклона ледяной пирамиды от полярного угла при значениях угла смачивания: *1* — $\theta_\sigma = 21$, *2* — 24, *3* — 31.5°.

полярного угла θ. При $\theta_\sigma = 24$ и 31.5° (кривые *2* и *3*) решение уравнения (2) отсутствует, если θ превышает некоторое критическое значение, что соответствует отрыву замерзшей капли от поверхности. Указанные значения θ_σ не относятся к какому-либо конкретному материалу обтекаемой сферы.

На рис. 5 представлены соответствующие зависимости высоты пирамиды от θ. Максимальная высота пирамиды ~ 1 mm, что оправдывает пренебрежение действием на нее аэродинамической силы при выводе формулы (3), так как наиболее широкая часть пирамиды расположена в пограничном слое, в котором скорость воздуха стремится к нулю с приближением к поверхности.

Наконец, рис. 6 иллюстрирует немонотонную зависимость угла наклона пирамиды по отношению к локальной нормали. Видно, что с ростом полярного угла (определяющего место падения капли) локальный угол наклона растет вследствие увеличения центробежной силы, перпендикулярной оси вращения. Пройдя через максимум, он уменьшается, поскольку в направлении экватора локальная нормаль и центробежная сила стремятся совместиться.

Заключение

Предложена модель для расчета геометрических параметров ледяных иголок в начальной стадии образования наледи на поверхности вращающейся сферы, основанная на использовании концепции сопутствующей пирамиды и ряда упрощающих предположений, в частности, пренебрежения влиянием аэродинамической силы и силы тяжести. Приведенные результаты численного исследования иллюстрируют основные качественные черты явления: удлинение ледяных игл под действием центробежной силы и их отрыв при определенных значениях угловой скорости и полярного угла на поверхности вращающейся сферы, немонотонную зависимость угла наклона по отношению к локальной нормали.

Финансирование работы

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект 19-29-13024.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] L. Li, Y. Liu, H. Hu. Exp. Therm. Fluid Sci., **109**, 109879 (2019). DOI: 10.1016/J.EXPTHERMFLUSCI.2019.109879

[2] L. Tian, L. Li, Ha. Hu, Hu. Hu. J. Thermophys. Heat Transf., **37** (2), 353 (2023). DOI: 10.2514/1.T6667

[3] А.В. Кашеваров, А.Л. Стасенко. ЖТФ, **90** (1), 46 (2020). DOI: 10.21883/JTF.2020.01.48659.173-19 [A.V. Kashevarov, A.L. Stasenko. Tech. Phys., **65** (1), 41 (2020). DOI: 10.1134/S1063784220010120]

[4] P. Berthoumieu. *4th AIAA Atmospheric and Space Environments Conf.*, AIAA 2012–3130 (2012), DOI: 10.2514/6.2012-3130

[5] R. Cimpeanu, D.T. Papageorgiou. Intern. J. Multiphase Flow, **107**, 192 (2018). DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2018.06.011

[6] A. Goswami, J.K. Singh. Phys. Chem. Chem. Phys., **23** (29), 15402 (2021). DOI: 10.1039/D1CP02617H

[7] M.E. Perel'man, V.A. Tatarchenko. Phys. Lett. A, **372** (14), 2480 (2008). DOI: 10.1016/j.physleta.2007.11.056
[8] R. Stahlberg, H. Yoo, G. Pollack. Indian J. Phys., **93**, 221 (2019). DOI: 10.1007/s12648-018- 1265-6
[9] Л.Б. Бойнович, А.М. Емельяненко. Доклады РАН, **459** (6), 702 (2014). DOI: 10.7868/S0869565214360122 [L.B. Boinovich, A.M. Emelyanenko. Dokl. Phys. Chem., **459** (2), 198 (2014). DOI: 10.1134/S0012501614120045]