

12,13

## Влияние $\delta$ -образной квантовой ямы на границе одномерной решетки на свойства поверхностных электронных состояний таммовского типа

© Ю.О. Аверков, В.М. Яковенко

Институт радиофизики и электроники им. А.Я. Усикова НАН Украины,  
Харьков, Украина

E-mail: yuriyaverkov@gmail.com

(Поступила в Редакцию 9 июня 2011 г.)

В окончательной редакции 10 августа 2011 г.)

Теоретически исследованы поверхностные электронные состояния таммовского типа на границе одномерной структуры с периодически потенциальным профилем при условии, что на этой границе находится  $\delta$ -образная квантовая яма. Проведено сравнение свойств поверхностных электронных состояний в такой структуре с таммовскими электронными состояниями в отсутствие квантовой ямы на границе решетки, а также с электронными состояниями, локализованными вблизи  $\delta$ -образной потенциальной ямы, расположенной в глубине решетки. Показано, в частности, что наличие  $\delta$ -образной потенциальной ямы на границе решетки способствует существенному увеличению степени локализации поверхностных электронных состояний таммовского типа и делает возможным возникновение этих состояний при сколь угодно малых высотах потенциальных барьеров решетки.

### 1. Введение

Впервые возможность существования поверхностных электронных состояний (ПЭС) была указана Таммом в 1932 г. [1]. В рамках приближения Кронига–Пенни в работе [1] было показано, что на границе одномерной решетки могут существовать связанные состояния электрона, если энергия электрона попадает в запрещенную зону бесконечной одномерной решетки и меньше его потенциальной энергии во внешнем пространстве. Исследованию свойств ПЭС с момента их теоретического предсказания было посвящено большое количество работ (см., например, [2–7] и цитированную там литературу). Интерес к ПЭС связан с их способностью влиять на физические свойства кристаллических твердых тел. Так, например, в мелких поликристаллических полупроводниках и диэлектриках на поверхностях микрокристаллов могут существовать поверхностные зоны проводимости и при достаточно малых размерах кристаллов их поверхностная проводимость может превосходить объемную. Кроме этого, ПЭС могут обуславливать полосы поглощения света, служить источниками фотоэлектронов, а также влиять на процессы адсорбции атомов или молекул. В двойниковых металлических кристаллах наличие ПЭС таммовского типа может приводить к повышению температуры сверхпроводящего перехода [8]. ПЭС таммовского типа могут возникать в ограниченных полупроводниковых сверхрешетках [9] и полугораничных углеродных нанотрубках [10]. В работе [11] была показана возможность существования электронных поверхностных волн с отрицательной групповой скоростью на поверхности слоистой структуры, созданной на основе графена. Физическая природа таких волн, как указано в [11], подобна таммовским ПЭС. Интересно

отметить, что сравнительно недавно в работах [12–16] был теоретически предсказан и экспериментально обнаружен электромагнитный аналог таммовских ПЭС. Это так называемые поверхностные электромагнитные состояния, которые могут существовать как на границе двух фотонных кристаллов, так и на границе фотонного кристалла и однородной среды с отрицательной диэлектрической (или магнитной) проницаемостью. Это еще раз подтверждает фундаментальную физическую природу предсказанных Таммом состояний и указывает на необходимость их дальнейшего исследования.

Целью настоящей работы является теоретическое исследование изменений энергии и степени локализации ПЭС таммовского типа при наличии  $\delta$ -образной квантовой ямы на границе одномерной решетки. Показано, в частности, что можно добиться достаточно высокой степени локализации ПЭС при определенных соотношениях между параметрами квантовой ямы и высотой потенциального барьера со стороны, смежной с решеткой среды.

### 2. Постановка задачи и основные уравнения

Пусть  $y < 0$  занимает среда, потенциальная энергия электрона в которой равна  $U_0$  (см. рис. 1). Потенциальный профиль одномерной полугораничной решетки, занимающей область  $y > 0$ , будем рассматривать в приближении Кронига–Пенни. Именно, в области  $y > 0$  рассмотрим периодическую последовательность  $\delta$ -образных потенциальных барьеров высотой  $U_2$  и шириной  $b$ . На границе  $y = 0$  потенциальная энергия электрона испытывает скачок  $-U_1$ , обусловленный наличием на этой

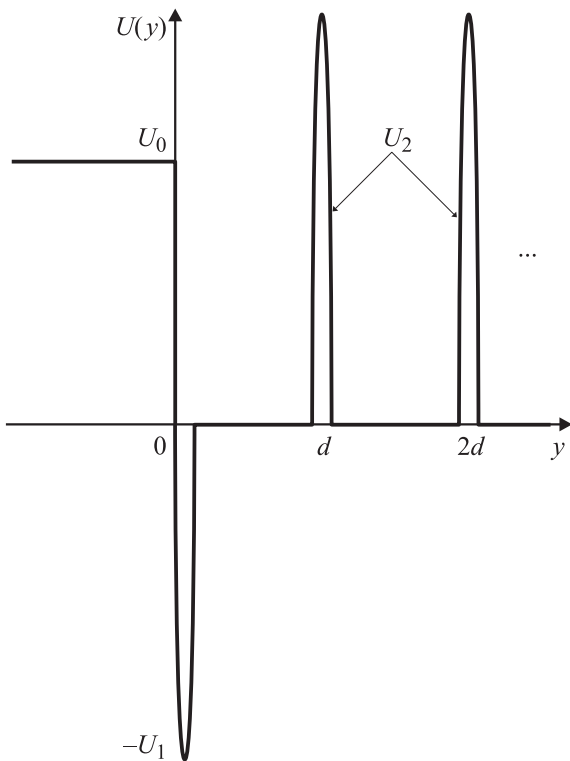


Рис. 1. Геометрия задачи.

границе  $\delta$ -образной квантовой ямы шириной  $a$ . Запишем такую зависимость потенциальной энергии электрона от координаты  $y$  следующим образом:

$$U(y) = \begin{cases} U_0, & \text{при } y < 0, \\ -U_1 a \delta(y), & \text{при } y = 0, \\ 0, & \text{при } Nd < y < (N + 1)d, \\ U_2 b \delta(y - Nd), & \text{при } y = Nd, \end{cases} \quad (1)$$

где  $d$  — период структуры,  $\delta(y)$  — дельта-функция Дирака. Волновая функция электрона  $\psi$  в рассматриваемой задаче удовлетворяет стационарному уравнению Шредингера

$$\frac{d^2 \psi}{dy^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(y)] \psi = 0, \quad (2)$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка,  $m$  — масса электрона,  $E$  — полная энергия электрона. В области  $y < 0$  решение волнового уравнения (2) имеет вид

$$\psi_0 = F \exp(\kappa y), \quad (3)$$

где  $\kappa = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar$ . Очевидно, что состояния электрона будут локализованы вблизи границы  $y = 0$  в области  $y < 0$  при  $U_0 > E$ . В области  $0 < y < d$  запишем решение уравнения (2) в виде

$$\psi_1 = A \exp(i\alpha y) + B \exp(-i\alpha y), \quad (4)$$

где  $\alpha = \sqrt{2mE}/\hbar$ . В области  $d < y < 2d$  решение уравнения (2) запишем аналогичным образом:

$$\psi_2 = C \exp(i\alpha y) + D \exp(-i\alpha y). \quad (5)$$

Для того, чтобы получить уравнения, позволяющие определить собственные значения энергии  $E$ , необходимо удовлетворить следующим граничным условиям [17]:

$$\psi_0(0) = \psi_1(0), \quad (6)$$

$$\psi_1'(0) - \psi_0'(0) = \frac{2m}{\hbar^2} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-\eta}^{+\eta} U(y) \psi dy, \quad (7)$$

$$\psi_1(d) = \psi_2(d), \quad (8)$$

$$\psi_2'(d) - \psi_1'(d) = \frac{2m}{\hbar^2} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{d-\eta}^{d+\eta} U(y) \psi dy, \quad (9)$$

$$\psi_1(0) \exp(ikd) = \psi_2(d), \quad (10)$$

$$\psi_1'(0) \exp(ikd) = \psi_2'(d). \quad (11)$$

Здесь символ „штрих“ обозначает дифференцирование по переменной  $y$ . Отметим, что условия (10) и (11) описывают свойства периодичности волновой функции электрона  $\psi(y)$  и ее производной  $\psi'(y)$  в рассматриваемой одномерной решетке. Величина  $k$  является постоянной распространения волновой функции электрона вдоль периодической структуры.

Подставив выражения (4), (5) в граничные условия (8) и (10), находим следующую связь между амплитудами  $A$  и  $B$  в бесконечной решетке

$$B = \frac{1 - \gamma_1}{1 + \gamma_1} A, \quad (12)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\exp(i\xi) - \exp(i\xi_k)}{\exp(i\xi_k) - \exp(-i\xi)}, \quad (13)$$

$\xi_k = kd$ ,  $\xi = \alpha d$ . Подставив (12) в граничные условия (9) и (11), получим уравнение Кронига–Пенни

$$\cos \xi_k = S(\xi) = \cos \xi + p \frac{\sin \xi}{\xi}, \quad (14)$$

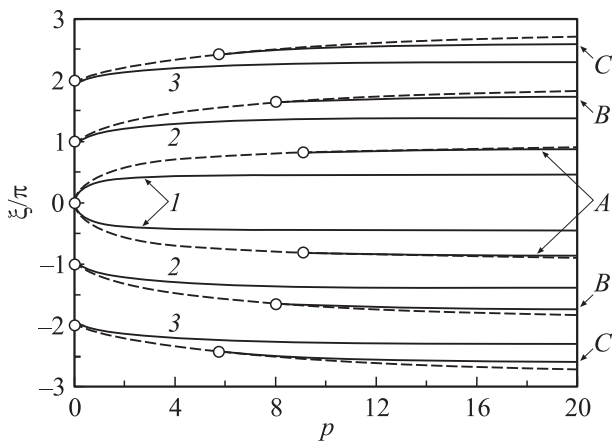
где  $p = mU_2 b d / \hbar^2$ . Подставив выражения (3), (4) в условия (6) и (7) на границе решетки  $y = 0$ , получим

$$A + B = F, \quad (15)$$

$$i\alpha(A - B) = F \left( \kappa - \frac{2m}{\hbar^2} U_1 a \right). \quad (16)$$

Из уравнений (15) и (16) находим следующую связь между амплитудами  $A$  и  $B$ :

$$B = \frac{1 - \gamma_2}{1 + \gamma_2} A, \quad (17)$$



**Рис. 2.** Зависимости  $\xi(p)$  (1–3, А–С), являющиеся результатом совместного решения уравнений (21) и (22) при  $q = 3\pi$ .  $\eta$ : 1–3 —  $3\pi$ , А–С — 0. Штриховые кривые соответствуют границам запрещенных зон.

где

$$\gamma_2 = -\frac{i}{\alpha} \left( \kappa - \frac{2mU_1 a}{\hbar^2} \right). \quad (18)$$

Приравнявая правые части уравнений (12) и (17), получим уравнение, связывающее энергию электрона  $E$  на границе  $y = 0$  с постоянной распространения  $k$  и величинами скачков потенциальной энергии  $U_0$  и  $U_1$

$$\exp(i\xi_k) = \cos \xi + \left( \sqrt{q^2 - \xi^2} - \eta \right) \frac{\sin \xi}{\xi}, \quad (19)$$

где  $q = \sqrt{2mU_0}d/\hbar$ ,  $\eta = 2mU_1 ad/\hbar^2$ . Заметим, что величины  $p/d$  и  $\eta/d$  имеют смысл коэффициентов непрозрачности соответствующих потенциальных барьеров. Из выражения (14) получаем следующие решения для комплексной фазы  $\xi_k$ , соответствующие запрещенным зонам бесконечной одномерной решетки:

$$\xi_k = \begin{cases} 2n\pi + i \ln(S + \sqrt{S^2 - 1}), & \text{при } S > 1 \\ (2n + 1)\pi + i \ln(|S| + \sqrt{S^2 - 1}), & \text{при } S < -1, \end{cases} \quad (20)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . В силу выбранной геометрии задачи, убывающим от границы  $y = 0$  вглубь решетки решениям соответствуют значения  $\text{Im}(\xi_k) > 0$ . Воспользовавшись выражениями (20), перепишем исследуемую систему уравнений в следующем виде:

$$\varepsilon \cosh \mu = \cos \xi + p \frac{\sin \xi}{\xi}, \quad (21)$$

$$\varepsilon \sinh \mu = (\eta + p - \sqrt{q^2 - \xi^2}) \frac{\sin \xi}{\xi}, \quad (22)$$

где  $\varepsilon = \pm 1$ ,  $\mu = \text{Im}(\xi_k)$ . Значение  $\varepsilon = 1$  соответствует запрещенным зонам, где  $S > 1$ , а значение  $\varepsilon = -1$  — запрещенным зонам, где  $S < -1$ . Эта система уравнений отличается от соответствующей системы, рассмотренной Таммом, параметром  $\eta$ , возникшим благодаря

наличию на границе  $y = 0$   $\delta$ -образной квантовой ямы. Очевидно, что ПЭС могут существовать в запрещенных зонах при значениях  $\xi_k$  и  $\xi$ , удовлетворяющих уравнениям (21) и (22).

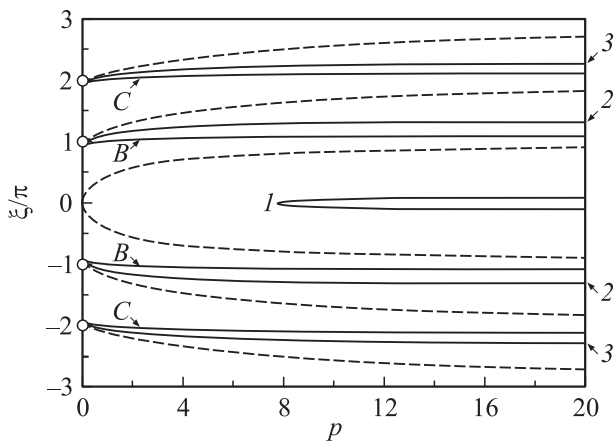
На рис. 2 приведены зависимости  $\xi(p)$  (сплошные кривые 1–3 и А–С), полученные в результате совместного численного решения уравнений (21) и (22). Кривые 1, А соответствуют первой запрещенной зоне, кривые 2, В — второй запрещенной зоне, а кривые 3, С — третьей запрещенной зоне. Кривые 1–3 построены при  $q = \eta = 3\pi$ , а кривые А–С — при  $q = 3\pi$ ,  $\eta = 0$ . Границы запрещенных зон показаны штриховыми линиями. Эти линии берут начало при  $p = 0$  в точках  $\xi = \pm n\pi$  (где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ), в которых  $\text{Re}(\xi_k) = n\pi$ ,  $\mu = 0$ . Заметим, что состоянию электрона с некоторым значением энергии  $E$  соответствуют два значения фазы  $\xi$ , равные по величине и противоположные по знаку. Из рис. 2 видно, что при  $q = \eta = 3\pi$  зависимости  $\xi(p)$  берут начало в точках  $p = 0$ ,  $\xi = \pm n\pi$  (где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ) и с ростом  $p$  смещаются вглубь соответствующих запрещенных зон. Случай  $\eta = 0$  соответствует задаче, рассмотренной Таммом [1]. При  $\eta = 0$  зависимости  $\xi(p)$  начинаются при конечных значениях  $p$ . Точки начала этих зависимостей показаны на рис. 2 светлыми кружками. Численный расчет показывает, что при увеличении параметра  $q$  зависимости  $\xi(p)$  начинаются при больших значениях параметра  $p$  и лежат ближе к границам соответствующих запрещенных зон. Последнее обстоятельство означает уменьшение степени локализации ПЭС вблизи границы  $y = 0$ . Например, при  $p = 20$  имеем  $\mu \approx 3.3$  для кривой 1 и  $\mu \approx 1.2$  для кривой А. При значениях  $0 < \eta < q$  зависимости  $\xi(p)$  расположены в промежутках между соответствующими кривыми 1–3 и А–С. Тот факт, что при  $\eta < q$  с ростом  $q$  зависимости  $\xi(p)$  для ПЭС начинаются при больших значениях параметра  $p$ , позволяет сделать следующий вывод. Именно, для каждого заданного конечного значения  $p$ , т.е. для каждого заданного потенциального профиля одномерной решетки, существует некоторое критическое конечное значение потенциала  $U_0$ , при превышении которого в рассматриваемой структуре не существует ни одного ПЭС. В то же время, при выполнении условия  $q = \eta$  ПЭС могут существовать при сколь угодно малых значениях  $p$  и сколь угодно больших значениях  $q$ , т.е. потенциала  $U_0$ . Заметим, что при  $q = \eta$  и  $q \gg |\xi|$  граничные условия (6) и (7) можно заменить следующим одним граничным условием:

$$\psi'_1(0) = 0. \quad (23)$$

В этом случае ПЭС с  $q \gg |\xi|$  (т.е. с  $U_0 \gg E$ ) будут описываться уравнением (21) и уравнением

$$\varepsilon \sinh \mu = p \frac{\sin \xi}{\xi} + O\left(\frac{\xi^2}{q^2}\right). \quad (24)$$

Заметим, что граничное условие, аналогичное (23), использовалось в [18] при описании ПЭС на поверхности металла в присутствии постоянного магнитного поля.



**Рис. 3.** Зависимости  $\xi(p)$  (сплошные кривые), являющиеся результатом совместного решения уравнений (21) и (22) при  $q = 3\pi$ .  $\eta$ : 1–3 —  $3.3\pi$ , B, C —  $6\pi$ . Штриховые кривые соответствуют границам запрещенных зон.

Поведение зависимостей  $\xi(p)$  в случае  $\eta > q$  рассмотрено на рис. 3 при  $q = 3\pi$ . Кривые 1–3 соответствуют значению  $\eta = 3.3\pi$ , а кривые B, C — значению  $\eta = 6\pi$ . Кривая 1 берет начало при некотором конечном значении  $p$  и при  $\xi = 0$ . Заметим, что эта кривая расположена практически в самом центре первой запрещенной зоны. Это означает высокую степень локализации ПЭС вблизи границы  $y = 0$ . Кривые 2 и 3 начинаются в точках  $p = 0$ ,  $\xi = \pm n\pi$  (где  $n = 1, 2, \dots$ ). Из рис. 3 видно, что при  $\eta = 6\pi$  в первой запрещенной зоне нет зависимостей  $\xi(p)$ , а во второй и третьей запрещенных зонах кривые B и C оказываются сильно прижатыми к границам соответствующих запрещенных зон. Следовательно, существует некоторое критическое значение  $\eta_{cr}$ , при превышении которого в первой запрещенной зоне исчезают ПЭС. При этом в других запрещенных зонах такие состояния возможны и существуют при сколь угодно малых значениях  $p$ . Значение  $\eta_{cr}$  легко найти из уравнений (22), (20). Положив в этих уравнениях  $\xi = 0$ , получим для первой запрещенной зоны следующее выражение:

$$\frac{1}{G} = 1 + q - \eta, \tag{25}$$

где  $G = S_0 + \sqrt{S_0^2 - 1}$ ,  $S_0 = 1 + p$ . Поскольку левая часть уравнения (25) всегда положительна, то величина  $\eta$  не может превышать значения  $\eta_{cr} = 1 + q$ . Из уравнения (25) видно также, что для  $q = \eta$  зависимости  $\xi(p)$  в первой запрещенной зоне начинаются при  $p = 0$ , а для  $q > \eta$  — при  $p > 0$ . Следовательно, при  $\eta \rightarrow \eta_{cr}$  в центре первой запрещенной зоны могут существовать ПЭС с энергиями  $E \ll U_0$ , характеризующиеся высокой степенью локализации ( $\mu \rightarrow \infty$ ) вблизи границы  $y = 0$ . Например, при  $p = 20$  имеем  $\mu \approx 3.7$  для кривой 1,  $\mu \approx 2.2$  для кривой 2 и  $\mu \approx 1.6$  для кривой B. При  $\eta > \eta_{cr}$  ПЭС в первой запрещенной

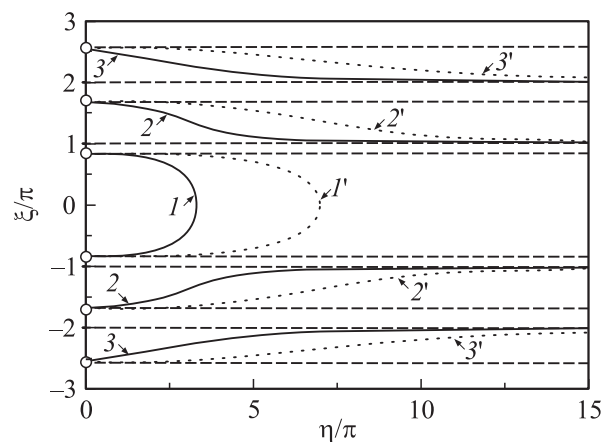
зоне не возникают ни при каких конечных значениях параметра  $p$ .

Изменение энергий ПЭС с изменением параметров квантовой ямы при заданных параметрах решетки удобно проанализировать с помощью зависимостей  $\xi(\eta)$ . Эти зависимости показаны на рис. 4 сплошными кривыми 1–3. При  $\eta = 0$  зависимости  $\xi(\eta)$  берут начало при значениях фазы вблизи краев запрещенных зон и с ростом  $\eta$  смещаются в сторону противоположных границ этих зон. Исключение составляет зависимость  $\xi(\eta)$ , соответствующая первой запрещенной зоне. С ростом  $\eta$  эта зависимость оканчивается при некотором максимальном значении  $\eta_{max}$

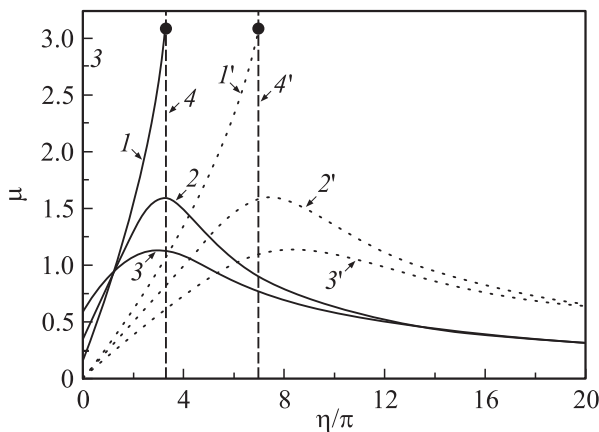
$$\eta_{max} = 1 + q - \frac{1}{G}. \tag{26}$$

Это означает, что при  $\eta > \eta_{max}$  в первой запрещенной зоне решетки с заданным значением параметра  $p$  поверхностные состояния не возникают.

Тот факт, что зависимости  $\xi(\eta)$  с ростом  $\eta$  проходят центры соответствующих запрещенных зон, означает, что значения параметра  $\mu$  должны достигать максимума с ростом  $\eta$ . Это демонстрируют зависимости  $\mu(p)$ , показанные на рис. 5 сплошными кривыми 1–3. Номера этих кривых соответствуют номерам кривых на рис. 4. Из рис. 5 видно, что зависимость 1 оканчивается и достигает при этом наибольшего значения на линии 4, где  $\eta = \eta_{max}$ . Точка окончания зависимости 1 показана темным кружком. Зависимости 2 и 3 в окрестности  $\eta = \eta_{max}$  имеют максимум. Это означает, что путем соответствующего подбора параметров  $\delta$ -образной квантовой ямы можно добиться значительно большей локализации ПЭС на границе решетки по сравнению со случаем без квантовой ямы ( $\eta = 0$ ). Например, при  $q = 3\pi$ ,  $p = 10$  имеем  $\mu \approx 0.18$  при  $\eta = 0$  и  $\mu \approx 3.1$  при  $\eta = \eta_{max} \approx 3.3$ .



**Рис. 4.** Зависимости  $\xi(\eta)$  (1–3), являющиеся результатом совместного решения уравнений (21) и (22) при  $q = 3\pi$ ,  $p = 10$ . 1'–3' — зависимости  $\xi(\eta)$  для случая  $\delta$ -образной квантовой ямы, расположенной в глубине решетки при  $p = 10$ . Штриховые кривые соответствуют границам запрещенных зон.



**Рис. 5.** Зависимости  $\mu(\eta)$  (1–3), являющиеся результатом совместного решения уравнений (21) и (22) при  $q = 3\pi$ ,  $p = 10$ . 1'–3' — зависимости  $\mu(\eta)$  для случая  $\delta$ -образной квантовой ямы, расположенной в глубине решетки при  $p = 10$ . Штриховые кривые соответствуют границам запрещенных зон. 4 и 4' —  $\eta_{\max}$  для первой запрещенной зоны в каждом из рассматриваемых случаев.

Для сравнения на рис. 4 и 5 показаны зависимости  $\xi(\eta)$  и  $\mu(\eta)$  (пунктирные кривые 1'–3') для случая, когда  $\delta$ -образная квантовая яма удалена от границы решетки  $y = 0$  на расстояние, значительно большее, чем радиус локализации ПЭС  $l \sim d/\mu$ . При таком расположении квантовой ямы вблизи границы  $y = 0$  будут существовать ПЭС, рассмотренные Таммом ( $\eta = 0$ ), а в глубине решетки возникнут электронные состояния, локализованные в малой окрестности квантовой ямы. Последние будут описываться уравнением (21) и уравнением

$$\varepsilon \sinh \mu = \eta \frac{\sin \xi}{2\xi}. \quad (27)$$

Из рис. 4 и 5 видно, что поведение зависимостей 1'–3' качественно соответствует поведению зависимостей 1–3. При этом в первой запрещенной зоне значения  $\mu$ , соответствующие зависимости 1, могут существенно превышать значения  $\mu$ , соответствующие зависимости 1' при одинаковых значениях  $\eta$ . Линии 4' на рис. 5 соответствует следующее максимальное значение  $\eta_{\max}$ :

$$\eta_{\max} = G - \frac{1}{G}. \quad (28)$$

Следовательно, при наличии на границе решетки  $\delta$ -образной квантовой ямы ПЭС могут иметь значительно большую степень локализации, чем на границе решетки без квантовой ямы и чем в малой окрестности квантовой ямы, расположенной в глубине решетки.

Отметим, что в качестве примера структуры с потенциальным профилем, изображенным на рис. 1, может служить полубесконечная (в области  $y > 0$ ) структура, состоящая из гетеропереходов GaAs–Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As. В такой структуре потенциальные ямы расположены в слоях GaAs, а потенциальные барьеры — в слоях

нелегированного Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As (см. [19]). Если в качестве сопряженной (в области  $y < 0$ ) среды выбрать слой легированного донорной примесью Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As, отделенного от слоя GaAs (в области  $y > 0$ ) тонким слоем нелегированного Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As, то в слое GaAs вблизи границы образуется изгиб дна зоны проводимости. Этому изгибу в рамках рассматриваемого подхода соответствует  $\delta$ -образная квантовая яма.

### 3. Заключение

В настоящей работе теоретически исследованы свойства ПЭС таммовского типа на границе одномерной решетки при наличии на этой границе  $\delta$ -образной квантовой ямы. Потенциальный профиль решетки принимался в виде периодической последовательности  $\delta$ -образных потенциальных барьеров. Показано, что наличие  $\delta$ -образной квантовой ямы на границе решетки способствует значительному увеличению степени локализации ПЭС. Например, параметры  $\delta$ -образной потенциальной ямы можно выбрать так, что ПЭС будут существовать практически в самом центре первой запрещенной зоны. Такие состояния имеют высокую степень локализации вблизи границы периодической структуры. Кроме этого, при соответствующем подборе параметров квантовой ямы ПЭС могут возникать при сколь угодно малых значениях коэффициента непроницаемости потенциальных барьеров решетки  $p/d$ , т.е. фактически, при сколь угодно малых высотах потенциальных барьеров решетки. Энергия таких состояний может быть значительно меньше потенциальной энергии электрона  $U_0$  в смежной с решеткой среде. При этом потенциальная энергия  $U_0$  может быть сколь угодно большой величиной, связанной с параметрами квантовой ямы определенным соотношением. Это качественно отличается от ситуации, когда рассматриваемая потенциальная яма на границе решетки отсутствует. Действительно, в этом случае ПЭС могут возникать при превышении параметром решетки  $p/d$  некоторого конечного порогового значения, связанного с величиной потенциальной энергии электрона  $U_0$ . Следовательно, наличие  $\delta$ -образной потенциальной ямы на границе одномерной структуры с периодическим потенциалом расширяет пределы существования ПЭС по энергиям и способствует увеличению степени их локализации.

### Список литературы

- [1] И.Е. Тамм. *Physic Zeits Sowjetunion* **1**, 733 (1932).
- [2] И.М. Лифшиц, С.И. Пекар. *УФН* **56**, 531 (1955).
- [3] S.G. Davison, J.F. Levine. *Solid State Phys.* **25**, 1.
- [4] М.Б. Партенский. *УФН* **128**, 69 (1979).
- [5] А.Я. Бельский. *УФН* **134**, 125 (1981).
- [6] А. Анималу. *Квантовая теория кристаллических твердых тел*. Мир, М. (1981). 575 с.
- [7] В.Л. Бонч-Бруевич, С.Г. Калашников. *Физика полупроводников*. Наука, М. (1990). 688 с.

- [8] И.Н. Хлюстикова, А.И. Буздин. УФН **155**, 47 (1988).
- [9] W. Glessner, R.H. Yu. J. Appl. Phys. **73**, 4070 (1993).
- [10] И.В. Станкевич, Д.А. Чернозатонский. ФТТ **41**, 1515 (1999).
- [11] Hai-tao Jiang, Zi-li Wang, Zhi-guo Wang, Hong Chen. Phys. Lett. A **375**, 1014 (2011).
- [12] A.P. Vinogradov, A.V. Dorofeenko, S.G. Erokhin, M. Inoue, A.A. Lisyansky, A.M. Merzlikin, A.B. Granovsky. Phys. Rev. B **74**, 045 128 (2006).
- [13] T. Goto, A.V. Dorofeenko, A.M. Merzlikin, A.V. Baryshev, A.P. Vinogradov, M. Inoue, A.A. Lisyansky, A.B. Granovsky. Phys. Rev. Lett. **101**, 113 902 (2008).
- [14] А.П. Виноградов, А.В. Дорофеев, А.М. Мерзликин, А.А. Лисянский. УФН **180**, 249 (2010).
- [15] M. Kaliteevski, I. Iorsh, S. Brand, R.A. Abram, J.M. Chamberlain, A.V. Kavokin, I.A. Shelykh. Phys. Rev. B **76**, 165 415 (2007).
- [16] M.E. Sasin, R.P. Seisyan, M.A. Kaliteevski, S. Branda, R.A. Abrama, J.M. Chamberlain, I.V. Iorsh, I.A. Shelykh, A.Yu. Vasil'ev, V.S. Mikhlin, A.V. Kavokin. Superlattices and Microstructures **47**, 44 (2010).
- [17] А.А. Соколов, И.М. Тернов, В.Ч. Жуковский. Квантовая механика. Наука, М. (1979). 258 с.
- [18] A.O.E. Animalu. Philosoph. magaz. **21**, 137 (1970).
- [19] D.K. Ferry, S.M. Goodnick. Transport in nanostructures. Cambridge University Press, Cambridge (1999). 512 p.