

05,12

## Спиновая структура и спиновая магнитная восприимчивость двумерных вигнеровских кластеров

© Мехрдад М. Махмудиан<sup>1,2</sup>, М.М. Махмудиан<sup>1,2</sup>, М.В. Энтин<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Институт физики полупроводников им А.В. Ржанова СО РАН, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup> Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

E-mail: m.makhmudian1@g.nsu.ru

Поступила в Редакцию 25 августа 2023 г.

В окончательной редакции 25 августа 2023 г.

Принята к публикации 29 августа 2023 г.

Рассмотрены спиновые состояния двумерных вигнеровских кластеров при низких температурах, когда все электроны находятся в основных координатных состояниях. Предполагается, что поведение спиновой подсистемы определяется антиферромагнитными обменными интегралами. Задача изучается в рамках модели Изинга в присутствии и без магнитного поля. С помощью компьютерного моделирования найдены спиновая структура, корреляционная функция и спиновая магнитная восприимчивость кластера. Показано, что восприимчивость испытывает осцилляции в зависимости от магнитного поля вследствие магнитоиндуцированных перестроек спиновой подсистемы.

**Ключевые слова:** вигнеровский кластер, модель Изинга, спиновая структура, спиновая корреляционная функция, спиновая магнитная восприимчивость.

DOI: 10.61011/FTT.2023.10.56325.188

### 1. Введение

Двумерные решетки Вигнера были предметом изучения с 1970-х годов [1–3]. В этих системах кулоновское отталкивание компенсируется противоположными зарядами, отделенными изолирующим слоем от двумерной квантовой ямы. Классические электроны занимают минимумы потенциальной энергии, а квантовые электроны формируют волновые функции вблизи минимумов. Если энергия квантования становится большой, электронная решетка плавится и система превращается в электронный газ.

Были изучены различные свойства двумерной вигнеровской решетки (ДВР), в частности, энергия взаимодействия, спектр плазмонов, фазовый переход плавления и влияние магнитного поля. Рассматривались также двумерные вигнеровские кластеры (ДВК) с небольшим количеством электронов, в которых электроны удерживаются от разбегаания внешним потенциалом вдоль поверхности. В [4] исследован спектр электронных колебаний, а в [5,6] — двухстадийное плавление ДВК. Изучению ДВК посвящено много статей, в том числе обзорных [6–15].

Теоретически ДВР и ДВК рассматривались классически и квантово без учета спинов. При этом, обменное взаимодействие слабее кулоновского. Однако в случае небольших различий между минимумами упорядочения обменное взаимодействие может влиять на упорядочение координат.

Тонкая перестройка состояний ДВК с помощью удерживающего потенциала и магнитного поля приводит к

их возможному применению в электронике [16], лазерах [17,18] и квантовых вычислениях [19].

Следует упомянуть класс систем, а именно двумерные решетки ионов, захваченных на поверхности жидкого гелия (см., например [20]). В этих системах эффективная масса намного больше массы электрона, что способствует конденсации ионов.

Экспериментальная реализация ДВК в полупроводниках столкнулась с серьезными трудностями из-за низкой необходимой плотности электронов, когда беспорядок обычно перевешивает е-е-взаимодействие. Однако в недавних работах такие системы были реализованы в виде одномерного вигнеровского кластера с переходом „струна–зигзаг“ [21,22], вигнеровского кристалла в монослойном полупроводнике [23] и двухслойных вигнеровских кристаллов в гетероструктурах дихалькогенидов переходных металлов [24].

Обычно электроны рассматриваются как бесструктурные частицы. Координатное упорядочение электронов в кластере не влияет напрямую на их спиновую степень свободы. Однако спиновая структура ДВК важна для его термодинамических свойств.

Проблема точной диагонализации спинового гамильтониана ДВК в модели Гейзенберга требует очень много времени, поэтому она была проведена для малых чисел электронов (см., например для двумерного двухцентрового осциллятора [8] и двумерного гармонического удерживающего потенциала [9] при  $n = 4$  и при  $n \leq 8$  [10]).

Существует ряд исследований кулоновской блокады в малоэлектронных квантовых точках (см., например,

обзор [11]). Подход кулоновской блокады отличается от ДВК размытием электронной плотности внутри точки. В этом приближении, в отличие от ДВК, корреляция между электронами не учитывается или считается слабой и пертурбативной.

Параболическая квантовая точка с числом электронов до 20 изучалась с учетом спинов с использованием пробных волновых функций [12]. Конфайнмент сильно влияет на корреляции из-за нарушенной трансляционной симметрии, что приводит к локализации электронной решетки. Точная квантовая задача для трех электронов в асимметричной параболической яме рассмотрена в [13]. Громоздкость вычислений не дает возможности существенно увеличить число электронов.

Обзор результатов по электронным состояниям в двумерных квантовых точках и кольцах содержится в [14]. Среди них имеются работы, посвященные классическому упорядочению [6,15]. Классические конфигурации с геометрическими оболочками  $(n_1, n_2, \dots)$  электронов в ДВК с различным числом электронов были получены в [6,15,25]. Эти работы отличаются количеством рассмотренных электронов. В частности, при  $n = 6$  имеются конфигурации (1,5) [15] или (3,3) [6], при  $n = 10$  конфигурации (3,7) [6,26] или (2,8) [15]. Эти различия возникают из-за небольших различий в энергетических минимумах, соответствующих „изомерам“ ДВК. Изомерия приводит к легкому плавлению структуры при низкой температуре.

Мы в [25] исследовали структуру классического ДВК в аксиально-симметричном и асимметричном параболическом потенциале  $k(x^2 + b^2y^2)$ . Внутри кластера электроны образуют искаженную треугольную решетку. Конкуренция граничной и внутренней энергий приводит к поликристалличности внутренней части кластера и упорядоченному расположению граничных электронов, а также к наличию топологических дефектов внутри кластера. Оказалось, что структуры классического и квантового ДВК слабо отличаются. Мы также рассмотрели вращение ДВК под действием переменного магнитного поля [26].

Здесь мы сосредоточимся на вопросе о спиновой структуре неподвижных многоэлектронных кластеров. Даже если обменное взаимодействие оказывается слабым по сравнению с бесспиновым гамильтонианом, обменный гамильтониан Гейзенберга представляет собой матрицу размером  $2^n \times 2^n$ , размерность которой экспоненциально растет с ростом  $n$ . В этом случае более простой гамильтониан Изинга существенно упрощает задачу спинового упорядочения, сохраняя основные черты постановки. Модель Изинга является наиболее популярной формулировкой теории фазовых переходов. ДВК с большим  $n$  соответствует многим аспектам двумерной модели Изинга, но отличается конечностью размера и неоднородностью решетки. Кроме того, применительно к ДВК спиновый порядок любого  $n$  специфичен. В ДВК решетка фрустрированная, конечная, содержит поликристаллические блоки и топологические дефекты. ДВК

также имеет разную плотность внутри и на границе, что влияет на магнитные свойства.

Нашей целью является изучение спиновой структуры и магнитного момента, а также восприимчивости электронов в симметричных и асимметричных параболических квантовых ямах. Мы рассмотрим многоэлектронный ДВК на основе классического упорядочения, а затем включим обменное взаимодействие для изучения спинового упорядочения на основе модели Изинга. Такое рассмотрение ДВК оправдано большей простотой, позволяющей расширить число рассматриваемых электронов.

Статья построена следующим образом. Сначала мы опишем пространственную структуру ДВК. Затем будет описано обменное взаимодействие электронных спинов на нижнем координатном уровне энергии. После этого будет сформулирована модель Изинга, определяющая статистику спинов, спиновую структуру и восприимчивость. Далее мы приведем результаты моделирования спиновой структуры круговых кластеров, а также зависимости спиновой магнитной восприимчивости от магнитного поля. После этого вычислим спиновые корреляционные функции при низкой температуре и нулевом магнитном поле. Наконец, мы обсудим полученные результаты. В Приложении обсуждается применимость модели Изинга для описания системы тяжелых дырок в двумерной полупроводниковой квантовой яме.

## 2. Изучаемые кластеры

Рассмотрим свободные электроны вблизи плоской поверхности, помещенные в потенциальную яму  $k(x^2 + b^2y^2)/2$ , ( $k > 0$ ), и испытывающие кулоновское отталкивание  $\sum_{i>j} \frac{e^2}{\epsilon|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$ , где  $e$  — заряд электрона,  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость окружающей среды,  $b$  — параметр анизотропии потенциальной ямы. Далее мы будем использовать безразмерные координаты, масштабируя

$$\mathbf{r}_i \rightarrow L\mathbf{r}_i, \quad L = (2e^2/\epsilon k)^{1/3}.$$

Энергия, измеренная в единицах

$$E_0 = (ke^4/2\epsilon^2)^{1/3}$$

выглядит следующим образом:

$$H = \sum_{i>j} \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} + \sum_i (x_i^2 + b^2y_i^2). \quad (1)$$

Асимметрия ям определяет соответствующую асимметрию двумерного кластера. При  $b = 1$  кластеры в среднем имеют круговую симметрию; при  $b \gg 1$  или  $b \ll 1$  кластер становится вытянутым, а в пределе — одномерным. При низких температурах электроны заселяют минимумы энергии, образуя квазипериодическую решетку, минимизирующую энергию кластера.

Оценка размера ДВК с  $n$  электронами дает  $R \sim (ne^2/\epsilon k)^{1/3}$ , расстояние между электронами  $R/\sqrt{n}$  и характерную плотность электронов  $n/R^2$  [26].

Для нахождения спиновой структуры необходимо учитывать квантование электронов. Волновые функции одного электрона, когда остальные неподвижны, локализованы вблизи дна ям и имеют энергии  $\epsilon_0 = \hbar(k/m_e)^{1/2}n^{1/4}$ , где  $m_e$  — масса электрона.

Спиновое упорядочение определяется спиновым гамильтонианом, который будет изучаться на основе координат электрона, найденных из гамильтониана (1). Мы пренебрегаем влиянием спинового взаимодействия на структуру кластера. Кроме того, мы предполагаем, что все электроны находятся в основном координатном состоянии. Волновая функция основного состояния  $i$ -го электрона убывает как

$$\psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \propto \exp(-\alpha|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|),$$

где  $\alpha \sim \sqrt{m_e \epsilon_0} L / \hbar$ . Обменное взаимодействие между спинами двух электронов в основном состоянии определяется интегралом перекрытия между координатными волновыми функциями  $J_{ij} = J_0 \exp(-\alpha|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$  и имеет антиферромагнитный характер. Здесь и далее мы пренебрегаем различием состояний разных электронов.

Отметим, что экспоненциальное поведение не универсально и не учитывает ни решетку, ни магнитное поле. В присутствии магнитного поля дальнедействующая зависимость заменяется на  $\propto \exp(-r_{ij}^2/a_B^2)$ , где  $a_B = \sqrt{c\hbar/eB}$  магнитная длина,  $B$  — магнитное поле,  $c$  — скорость света. Эта зависимость приводит к обменному взаимодействию, контролируемому магнитным полем. Но при  $r_{ij}/a_B^2 \ll \alpha$  магнитное поле несущественно для  $J_{ij}$ .

Мы будем использовать модель Изинга для описания спинового упорядочения. Это широко используемая модель в теории фазовых переходов. Применимость модели Изинга может быть подтверждена для дырочных систем в обычных полупроводниках (см. Приложение). В магнитном поле  $B$  спиновая энергия  $E$  имеет вид

$$E = \sum J_{ij} \sigma_i \sigma_j - h \sum \sigma_i, \quad \sigma_j = \pm 1, \quad (2)$$

где  $h = 2\mu_b B / E_0$  и  $\mu_b$  — магнетон Бора. Статистическая сумма

$$Z = \sum_{(\sigma_i = \pm 1)} \exp(-\beta E). \quad (3)$$

Здесь  $\beta = E_0/k_B T$ ,  $T$  — температура,  $k_B$  — постоянная Больцмана. Величина  $Z$  определяет все термодинамические свойства системы, в частности, наведенный магнитный момент  $M$  и спиновую магнитную восприимчивость  $\chi$ :

$$M = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial h}, \quad \chi = \frac{\partial M}{\partial h}. \quad (4)$$

Мы выполнили численные расчеты на основе уравнений (2–4).

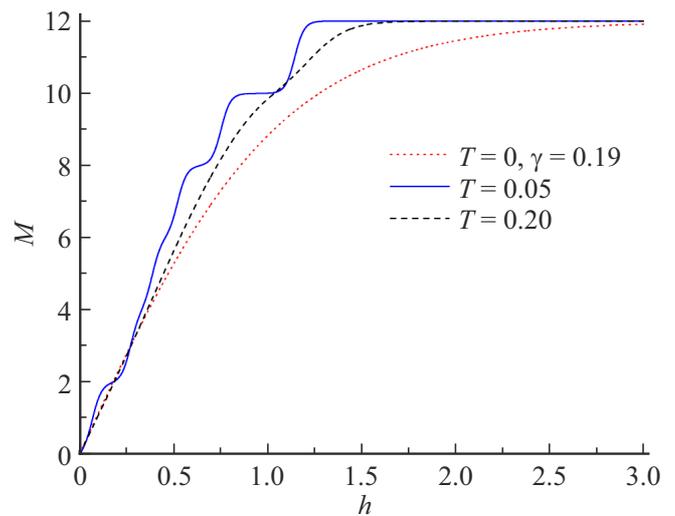


Рис. 1. Зависимость спинового магнитного момента круглого кластера с  $n = 12$  электронами от магнитного поля при относительно высокой температуре  $T = 0.2$  (черный пунктир) и низкой температуре  $T = 0.05$  (синий, сплошной). (Рис. в цв. изображении см. онлайн.)

### 3. Магнитный момент

Результаты численного расчета зависимости магнитного момента от магнитного поля представлены на рис. 1. Магнитный момент ДВК растет с магнитным полем до максимального значения, равного  $n$ . Расчет показывает, что зависимость магнитного момента от  $h$  существенно отличается от модели Кюри–Вейсса

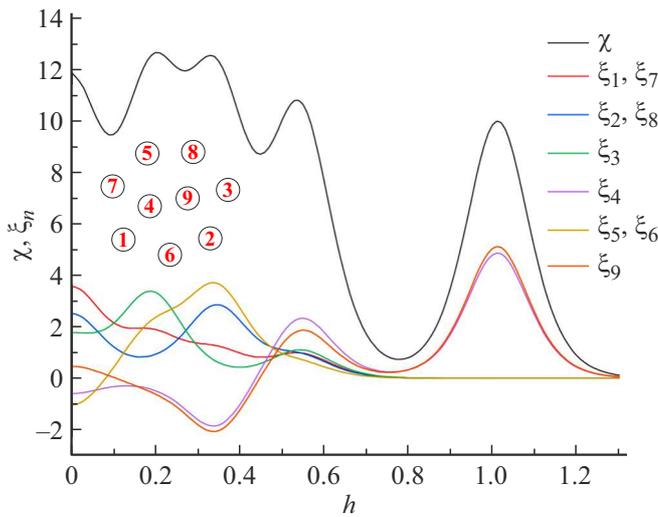
$$M(h) = M_0 \tanh(\gamma\beta h).$$

При высоких температурах (черные пунктирные линии) рост более линейный, чем можно ожидать по модели Кюри–Вейсса (красные пунктирные линии). Мы видим, что  $M(h) \propto h$  при малых  $h$ . Затем эта зависимость резко выходит на  $M(h) = M_0$ . Еще одним важным свойством  $M(h)$  является наличие ступенек. Ступеньки объясняются последовательным распариванием спиновых пар магнитным полем. Этот результат согласуется с периодической пиковой структурой  $\chi(h)$ .

### 4. Спиновая магнитная восприимчивость

Спиновая магнитная восприимчивость  $\chi(h)$  круглых ДВК продемонстрирована на рис. 2. Зависимость содержит пики, возникающие в результате последовательного распаривания спинов.

Круглые ДВК обладают оболочечной структурой (рис. 3). Электроны в разных оболочках имеют сильно различающиеся связи с другими оболочками. В случаях 2–5 электронов все они составляют единую оболочку с симметрией в сторону замены  $i \rightarrow j$ . Начиная с  $n = 6$



**Рис. 2.** Спиновая магнитная восприимчивость  $\chi(h)$  круглого ДВК с 9 электронами и производная среднего спина  $k$ -го электрона  $\xi_k(h)$  в зависимости от магнитного поля при температуре  $T = 0.1$ . Структура круглого ДВК с 9 электронами. Цифры внутри кружков нумеруют электроны. Пики  $\chi(h)$  можно отнести к конкретным электронам. (Рис. в цв. изображении см. онлайн.)

появляются две и более оболочки. Единственный электрон в центре при  $n = 6$  или  $n = 7$  остается непарным.

Круглые ДВК (см. рис. 2) имеют сложное спиновое упорядочение. Если расстояние между оболочками превышает межэлектронное расстояние внутри оболочки, то спиновое упорядочение между внутренней и внешней оболочками происходит при много меньшем  $h$ , чем упорядочение в оболочке. Однако, если оболочка содержит нечетное число электронов, распаренный электрон в одной оболочке может спариться с электроном в другой оболочке, но с меньшей энергией спаривания. Таким образом, спаривание удаленных электронов может быть наложено на простую картину одиночной оболочки, создавая более сложную пиковую структуру  $\chi(h)$ . Такое поведение мы видим на рис. 2.

Заметим, что возможны более сложные варианты спаривания. В частности, прямой обмен двумя далекими спинами очень слаб. В этом случае преобладает не прямое спаривание [27]. Пример такой ситуации представлен на рис. 2, где электроны испытывают переход от антиферромагнитного упорядочения при  $h < J_{ij}$  к ферромагнитному при  $h > J_{ij}$ .

## 5. Спиновая корреляционная функция

Спиновая структура вигнеровского кластера может быть эффективно выяснена с помощью спиновой корреляционной функции  $\xi_{i,j} = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle$ , где  $\langle \dots \rangle$  обозначает статистическое усреднение. В отличие от бесконечной ДВР,  $\xi_{ij}$  зависит от координат двух спинов. Восприимчивость ДВР  $\chi$  плавно зависит от  $h$ . Наоборот, в ДВК при

изменении  $h$  происходят множественные перестройки, что приводит к периодической зависимости восприимчивости  $\chi$  от  $h$ .

Общей чертой разных кластеров является спаривание наиболее сильно связанных ближайших электронов, если их четное число. Они составляют „молекулы“. Электроны, не имеющие пары в этом близком сообществе, спариваются с более дальними. Если таких электронов несколько, то они имеют неспаренный спин. Однако в системе со многими электронами смешиваются различные виды спаривания.

На рис. 3 показаны значения  $\xi_{i,j}$  для  $i$ , выбранного так, чтобы иметь наименьшее значение  $r_i$ . Мы установили предел нулевой температуры, чтобы подчеркнуть антиферромагнитное упорядочение спинов. Корреляционная функция в круговых кластерах падает с расстоянием  $|r_i - r_j|$ . Падение следует из статистических соображений. Неидеальность кристаллографической решетки также способствует затуханию корреляционной функции.

Ниже мы анализируем зависимость  $\xi_{i,j}$  для круговых кластеров с малым числом электронов. Слабое взаимодействие между оболочками и меньшее расстояние между внутренними электронами делают их спины более связанными. Остальные спины приспособляются к спинам внутренних оболочек. Системы с малым числом электронов  $n = 3, 4, 5$  образуют правильные многоугольники. В этих многоугольниках ситуация зависит от четности  $n$ .

Проанализируем полученные корреляционные функции. При нулевом  $h$  системы с четным числом электронов стремятся к спариванию всех электронов, а в системе с нечетными электронами один электрон остается неспаренным.

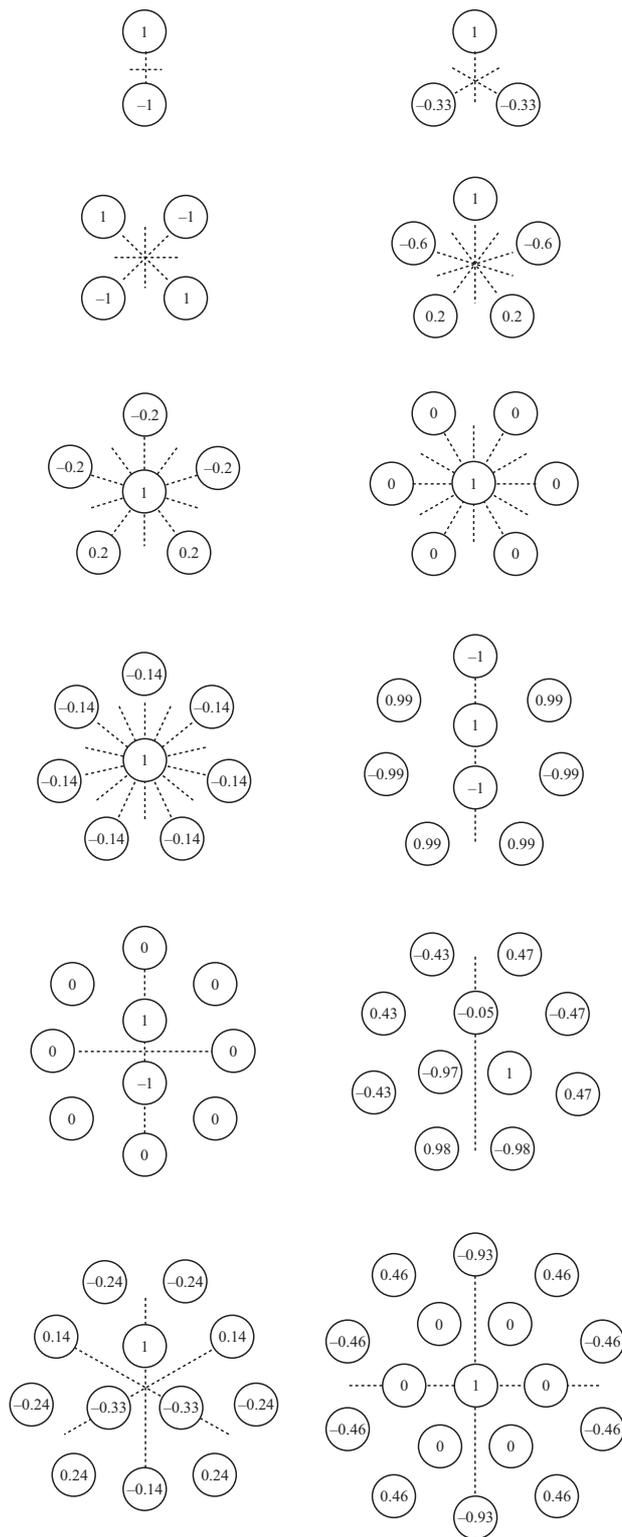
В системе с 2, 3, 4 и 5 электронами частицы расположены эквидистантно. Все позиции равнозначны. Можно легко посчитать все конфигурации с одинаковой наименьшей энергией и найти корреляционные функции (см. рис. 3).

ДВК с 2 и 4 электронами при полностью поляризованы и все  $\xi_{1,j \neq i} = \pm 1$ . Рассмотрим случай  $n = 3$ . Пусть  $i = 1$  и зафиксировано  $\sigma_1 = 1$ . Наименьшая энергия достигается для конфигураций  $(1, 1, -1)$ ,  $(1, -1, -1)$ ,  $(1, -1, 1)$ . Усредняя произведение  $\sigma_1 \sigma_j$ , получаем  $\xi_{1,1} = 1$ ,  $\xi_{1,2} = \xi_{1,3} = -1/3$ . Аналогично, для  $n = 5$  получаем  $\xi_{1,1} = 1$ ,  $\xi_{1,2} = \xi_{1,5} = -3/5$ ,  $\xi_{1,3} = \xi_{1,4} = 1/5$ .

При  $n = 6$  один электрон находится в центре, а остальные заселяют вершины правильного пятиугольника. Центральный спин соединен с одним спином на внешней оболочке. При распределении по 5 узлам один спин дает  $\xi_{1,j \neq 1} = -1/5$ .

Кластер с  $n = 7$  содержит 1 электрон на внутренней оболочке и 6 спаренных электронов на внешней оболочке. Это дает  $\xi_{1,j \neq 1} = 0$ .

Случай  $n = 8$  аналогичен случаю  $n = 6$ : один общий спин на семи узлах внешней оболочки дает  $\xi_{1,j \neq 1} = -1/7$ .



**Рис. 3.** Корреляционная функция  $\xi_{ij} = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle$  спинов для ДВК с  $n = 2 \dots 12$  и  $n = 17$ . Центры кружков соответствуют положениям электронов. В качестве номера  $i = 1$  мы выбрали электрон с наименьшим  $r_i$ . Значение  $\xi_{1,j}$  показано внутри круга, обозначающего соответствующий электрон, расположенный в соответствующем месте. Представлен предел  $h \rightarrow 0$   $\beta \rightarrow \infty$ . Линии точных и приближенных плоскостей отражения обозначены пунктиром и точками соответственно. Видно антиферромагнитное упорядочение.

При  $n = 9$  и  $n = 10$  отсутствует осевая симметрия пространственной структуры, но имеется плоскость отражения. Два центральных близко расположенных спина сильно связаны, и  $\xi_{1,j \neq 1} = \pm 1$ . Внешние электроны имеют при  $n = 9$   $\xi_{1,j \neq 1} \approx \pm 1$ , сохраняя чередование для минимизации полной энергии, за исключением двух спинов, для которых чередование невозможно. При  $n = 10$  на внешней оболочке расположено 8 спаренных электронов, что дает  $\xi_{1,j} = 0$ . Появление еще одного электрона сделало возможным чередование спинов во внешней оболочке.

Системы с  $n = 11$  и  $n = 12$  также имеют центральные почти правильные треугольники. Однако порядок спинов в этих случаях сильно различается. Это можно объяснить симметрией систем. В случае  $n = 11$  имеется плоскость отражения, а в случае  $n = 12$  имеется симметрия  $C_{3v}$ .

При  $n = 11$  пространственная структура ДВК имеет плоскость отражения, а корреляционная функция  $\xi_{1,j \neq 1}$  антисимметрична относительно нее. В результате одна из величин  $\xi_{1,j \neq 1}$  во внутренней оболочке мала, а другая имеет значение порядка  $-1$ . Четыре электрона справа сверху подобно ДВК с  $n = 4$  имеют  $\xi_{1,j} \approx \pm 1$ . Остальные спины имеют чередующиеся значения порядка  $\pm 0.5$ .

Внутренняя оболочка 12-электронного кластера имеет спиновое упорядочение как система с 3 электронами. Спины внешней оболочки подстраиваются к ним.

Теперь проанализируем кластер с  $n = 17$ . Этот кластер содержит оболочки с 1, 6 и 10 электронами. Вторая и третья оболочки образуют примерно правильные шестиугольник и десятиугольник. Эти фигуры имеют взаимные элементы симметрии: две ортогональные плоскости отражения и поворот на угол  $\pi$ , тем самым подчиняясь группе  $C_{2v}$ . Четное число электронов во второй оболочке приводит к их полному спариванию с  $\xi_{i,j}$  для  $j$  внутри этой группы. Симметрия приводит к разделению электронов на внешней оболочке на 3 подмножества с 2, 4 и 4 электронами, которые имеют одинаковые значения  $\xi_{1,j}$ . Подмножество с  $\xi_{1,j} = -0.93$  находится ближе к началу координат (и сильнее взаимодействует с центральным электроном), тогда как другие попарно спарены с ближайшими электронами из этой оболочки и имеют чередующиеся спины.

Таким образом, качественно поведение корреляционной функции становится полностью понятным.

## 6. Связь перестройки спиновой структуры и спиновой восприимчивости

Наличие нескольких пиков позволяет сопоставить их к конкретным спиновым парам. Это можно назвать „спектроскопией спинового спаривания“. Максимальное значение  $h$  соответствует прочности связи. В простом случае эта величина совпадает с  $J_{ij}$  для конкретной

пары  $\{i, j\}$ . Однако если расстояние между электронами  $r_{i,j}$  велико, экспоненциальное падение  $J_{ij}$  делает прямой обмен слишком слабым. В этом случае косвенное воздействие по некоторой цепочке переориентирующих спинов, связывающих  $i$  с  $j$ , может привести к более сильному степенному взаимодействию между  $\sigma_i$  и  $\sigma_j$ . Здесь мы анализируем разные кластеры в разных полях, чтобы систематизировать виды упорядочения спинов.

Например, рассмотрим круглый кластер с  $n = 9$  электронами, два из которых расположены внутри кластера на небольшом расстоянии, а остальные составляют внешнюю оболочку с примерно такими же расстояниями между ними. Соответствующая зависимость  $\chi(h)$  показана на рис. 2. Чтобы сопоставить пики, мы также строим производную по  $h$  среднего спина каждого отдельного электрона. Мы видим, что все пики  $\chi(h)$  можно отнести к определенным спинам и парам спинов. Внутренние электроны расположены близко друг к другу. Тогда пик при  $h = 0$  связан с неспаренным электроном, расположенным на внешней оболочке. Этот электрон легче ориентируется слабым  $h$ . Это приводит к максимумам производных среднего спина  $\xi_n(h) = d\langle\sigma_n(h)\rangle/dh$  для электронов оболочки с номерами  $n = 1, 2, 7, 8, 9$ . В области большого  $h$  есть только один пик при  $h \approx 1$ , обусловленный самой сильной связанной парой 4-го и 9-го электронов. Пик при  $h = 0.2$  можно отнести к 3-му электрону (и частично, к минимумам для 2-го и 8-го электрона). Пик при  $h = 0.35$  в основном связан с пиками для спинов 5-го, 6-го, 2-го и 8-го электронов и минимумами для 4-го и 9-го.

Таким образом, происхождение пиков можно понять по геометрической структуре кластера, а спектр магнитной восприимчивости позволяет изучать пространственную организацию кластеров.

Заметим, что, как видно на рис. 2, спаривание-распаривание происходит не обязательно с парой ближайших электронов. Это также отражается на спинах других электронов (см. максимум при  $h = 0.2$  для  $\xi_3$ , который сопровождается минимумами для  $\xi_2$  и  $\xi_8$  и плечом на кривой для  $\xi_5$  и  $\xi_6$ ).

## 7. Оценки характерных параметров

Мы ожидаем, что наиболее яркое проявление ДВК может быть получено в системах с относительно малой диэлектрической проницаемостью и большой массой электрона. Кроме того, важна чистота материала, чтобы исключить флуктуации потенциала, локализирующие дырки. Чтобы приблизиться к экспериментальной ситуации, мы оценили параметры, характеризующие ДВК для различных систем, где, как мы надеемся, существенны электронное пространственное и спиновое упорядочение. Наиболее подходящими системами являются электроны на поверхности жидкого гелия или свободно подвешенные слои полупроводника  $p$ -типа. Чтобы исключить энергию Ферми, плотность заряда выбрана достаточно

низкой. Однако это снижает предельную температуру плавления ДВК. Мы не можем сильно понизить концентрацию электронов, потому что обменное взаимодействие экспоненциально падает с расстоянием между электронами. Рассмотрим электроны на поверхности He, канал  $p$ -типа GaAs и двумерный материал MoS<sub>2</sub>. Обменные интегралы удобно выбирать в несколько раз меньше единицы.

Оценим характерные параметры. Пусть  $n = 12$  (рис. 1),  $k = 1.66 \cdot 10^{-2} \text{ meV/cm}^2$ ,  $\varepsilon = 1$  (свободный подвешенный слой). Тогда  $R = 6.18 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$ ,  $n_s = 10^5 \text{ cm}^{-2}$ , единица энергии и температуры  $E_0 = 0.26 \text{ meV} = 2.99 \text{ K}$ , а единица длины  $L = 5.58 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$ . Безразмерные температуры на графиках 0.05 и 0.2 соответствуют  $T = 0.15 \text{ K}$  и  $T = 0.6 \text{ K}$ . Соответствующие максимальные обменные энергии  $J_{ij}$  составляют 0.043 meV (He), 0.11 мэВ (GaAs), 0.093 мэВ (MoS<sub>2</sub>). Характерные магнитные поля при  $h = 1$  составляют  $B = 2.23 \text{ T}$  (He),  $B = 1 \text{ T}$  (GaAs),  $B = 1.43 \text{ T}$  (MoS<sub>2</sub>). Эти значения выглядят достаточно экстремальными, но достижимыми.

## 8. Заключение и обсуждение

Мы исследовали спиновый магнитный момент, корреляционную функцию и магнитную восприимчивость двумерных вигнеровских кластеров круглой формы. Обнаружено, что зависимость магнитного момента от магнитного поля отличается от закона Кюри–Вейсса и практически линейна вплоть до значения насыщения при относительно больших температурах. Низкотемпературная магнитная восприимчивость при малых магнитных полях равна нулю для четного числа электронов и конечна для нечетного числа электронов, что объясняется спариванием спинов.

Магнитная восприимчивость колеблется при конечном магнитном поле из-за последовательного распаривания, начиная с самых слабых и заканчивая самыми сильными спиновыми связями. Эти колебания показывают слабую регулярность, что связано с оболочечной структурой кластера (слабая связь между электронами разных оболочек), приблизительной периодичностью расположения электронов на оболочке и цикличностью отдельной оболочки (отсутствие концов). В результате оболочечной структуры различные оболочки действуют почти как независимые подсистемы. Периодичность расположения электронов в оболочке делает все электроны одинаково подверженными магнитному полю, но межоболочечное спаривание приводит к неравномерности магнитоколебаний.

Сравним корреляционную функцию ДВК с бесконечной решеткой ДВР. Бесконечная ДВР однородна. В решетке Изинга при  $h = 0$  фазовый переход происходит при некоторой температуре  $T_c$ . Вблизи  $T_c$  радиус корреляции бесконечно растет, и корреляционная функция становится степенной. Это поведение определяет законы подобия для восприимчивости при  $\tau = (T_c - T)/T_c \rightarrow 0$

и  $h \rightarrow 0$ . Очевидно, что такое скейлинговое поведение в какой-то степени сохранится и в неоднородной системе типа ДВК, когда корреляционная длина станет меньше радиуса кластера.

В бесконечной системе фазовый переход 2-го рода сопровождается бесконечной корреляционной длиной. Двумерная треугольная решетка испытывает одиночный фазовый переход. В конечном магнитном поле фазового перехода не происходит. Восприимчивость  $\chi$  в магнитном поле плавно зависит от  $h$ . Наоборот, в ДВК при изменении  $h$  происходят множественные перестройки, что приводит к периодической зависимости восприимчивости  $\chi$  от  $h$ .

Отметим, что действие магнитного поля можно заменить вращением кластера с угловой частотой  $\Omega = \frac{eB}{mc}$ . ДВК в аксиально-симметричном потенциале способен к свободному вращению без изменения формы и разрушения [26], что дает возможность использовать вращение вместо магнитного поля.

### Финансирование работы

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Проект № 075-15-2020-797 (13.1902.21.0024)).

### Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### Приложение.

#### Применимость модели Изинга

Модель Изинга основана на замене квантового спинового оператора  $\hat{s}_i$  со спином 1/2 на классическое  $s$ -число  $\sigma_i$ . Это сводит  $2^n$ -мерное спиновое гильбертово состояние к пространству  $n$ -мерных двоичных чисел  $\sigma_i$ , сводя NP-полную задачу к NP-неполной. С физической точки зрения это может быть оправдано, когда вместо матриц Паули  $2 \times 2$  гамильтониан будет включать только одну из них, скажем,  $\sigma = \hat{s}_z$ . Это тот случай, когда спиновый гамильтониан имеет вид

$$\sum_{ij} J_{ij,\alpha\beta} \hat{s}_{i\alpha} \hat{s}_{j\beta},$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  обозначают декартовы координаты  $(x, y, z)$ , а  $J_{ij,zz} \gg J_{ij,xx}, J_{ij,zz} \ll J_{ij,yy}$ . Если это так, то учитываются только диагональные компоненты спина,  $\pm 1$ , и гамильтониан Гейзенберга преобразуется в гамильтониан Изинга.

Однако симметрия допускает такой случай в простых моделях  $J_{ij,\alpha\beta} = J_{ij,\delta\alpha\delta\beta}$ . В этом случае нельзя преобразовать модель Гейзенберга в модель Изинга. Тогда подход Изинга является лишь приближением к более общей модели Гейзенберга.

Тем не менее, есть системы, в которых это не так. Представьте себе дырочный гамильтониан в обычном кубическом полупроводнике, таком как GaAs. В объемно-изотропном случае этот гамильтониан имеет следующий вид:

$$H = Ap^2 + B(\mathbf{p}\mathbf{j})^2,$$

где  $\mathbf{j}$  — оператор спина 3/2. Поверхностное квантование расщепляет состояния  $m = \pm 3/2$  и  $m = \pm 1/2$  так, что 3/2 обычно становится верхним состоянием тяжелой дырки. Дважды вырожденные состояния  $m = \pm 3/2$  аналогичны состоянию  $\pm 1/2$  свободного электрона за исключением того, что теперь обменный интеграл  $J_{ij,\alpha\beta} \approx J_{ij} \delta_{\alpha z} \delta_{\beta z}$ . Фактически, гамильтониан обменного взаимодействия имеет следующий вид:

$$H_{ex} \propto (\mathbf{j}_{i,\alpha} \mathbf{j}_{j,\beta})$$

Проектирование  $\mathbf{j}_{i,\alpha}, \mathbf{j}_{j,\beta}$  на подпространство состояний с  $j_z = \{3/2, -3/2\}$  видим, что  $\langle \pm 3/2 | j_x | \pm 3/2 \rangle, \langle \pm 3/2 | j_y | \pm 3/2 \rangle = 0, \langle 3/2 | j_z | 3/2 \rangle = 3/2$ . Это диагонализует гамильтониан и преобразует его в изинговский. Наоборот, для состояний с  $j_z = \pm 1/2, \langle \pm 1/2 | j_x | \pm 1/2 \rangle \neq 0, \langle \pm 1/2 | j_y | \pm 1/2 \rangle \neq 0$ , и эта ситуация должна описываться моделью Гейзенберга.

Поэтому такие дырки являются хорошими кандидатами для создания вигнеровских двумерных дырочных кластеров, контролируемых гамильтонианом Изинга.

### Список литературы

- [1] А.В. Чаплик. Письма в ЖЭТФ **35**, 395 (1972).
- [2] P.M. Platzman, H. Fukuyama. Phys. Rev. B **10**, 3150 (1974).
- [3] C.C. Grimes, G. Adams. Phys. Rev. Lett. **42**, 795 (1979).
- [4] V.A. Schweigert, F.M. Peeters. Phys. Rev. B **51**, 7700 (1995).
- [5] A.V. Filinov, M. Bonitz, Yu.E. Lozovik. Phys. Rev. Lett. **86**, 3851 (2001).
- [6] V.M. Bedanov, F.M. Peeters. Phys. Rev. B **49**, 2667 (1994).
- [7] C. Yannouleas, U. Landman. Rep. Prog. Phys. **70**, 2067 (2007).
- [8] Y. Li, C. Yannouleas, U. Landman. Phys. Rev. B **80**, 045326 (2009).
- [9] M.B. Tavernier, E. Anisimovas, F.M. Peeters, B. Szafran, J. Adamowski, S. Bednarek. Phys. Rev. B **68**, 205305 (2003).
- [10] M. Rontani, C. Cavazzoni, D. Bellucci, G. Goldoni. J. Chem. Phys. **124**, 124102 (2006).
- [11] L.P. Kouwenhoven, D.G. Austing, S. Tarucha. Rep. Prog. Phys. **64**, 701 (2001).
- [12] A. Ghosal, A.D. Güçlü, C.J. Umrigar, D. Ullmo, H.U. Baranger. Phys. Rev. B **76**, 085341 (2007).
- [13] Y. Li, C. Yannouleas, U. Landman. Phys. Rev. B **76**, 245310 (2007).
- [14] S.M. Reimann, M. Manninen. Rev. Mod. Phys. **74**, 1283 (2002).
- [15] F. Bolton, U. Rössl. Superlat. Microstruct. **13**, 139 (1993).
- [16] H. Grabert, M.H. Devoret. Single Charge Tunneling: Coulomb Blockade Phenomena in Nanostructures, NATO Advanced Studies Institute. Ser. B: Phys. Plenum, N. Y. (1992), V. 294.
- [17] Y. Arakawa, H. Sakaki. Appl. Phys. Lett. **40**, 939 (1982).

- [18] N. Kirstaedter, N.N. Ledentsov, M. Grundmann, D. Bimberg, V.M. Ustinov, S.S. Ruvimov, M.V. Maximov, P.S. Kop'ev, Zh.I. Alferov, U. Richter, P. Werner, U. Gösele, J. Heydenreich. *Electron. Lett.* **30**, 1416 (1994).
- [19] D. Loss, D.P. DiVincenzo. *Phys. Rev. A* **57**, 120 (1998).
- [20] W.F. Vinen. *Z. Phys. B* **98**, 299 (1995).
- [21] S.-C. Ho, H.-J. Chang, C.-H. Chang, S.-T. Lo, G. Creeth, S. Kumar, I. Farrer, D. Ritchie, J. Griffiths, G. Jones, M. Pepper, T.-M. Chen. *Phys. Rev. Lett.* **121**, 106801 (2018).
- [22] I. Shapir, A. Hamo, S. Pecker, C.P. Moca, Ö. Legeza, G. Zarand, S. Ilani. *Science* **364**, 870 (2019).
- [23] T. Smolenski, P.E. Dolgirev, C. Kuhlenskamp, A. Popert, Y. Shimazaki, P. Back, X. Lu, M. Kroner, K. Watanabe, T. Taniguchi, I. Esterlis, E. Demler, A. Imamoglu. *Nature* **595**, 53 (2021).
- [24] Y. Zhou, J. Sung, E. Brutschea, I. Esterlis, Y. Wang, G. Scuri, R.J. Gelly, H. Heo, T. Taniguchi, K. Watanabe, G. Zaránd, M.D. Lukin, P. Kim, E. Demler, H. Park. *Nature*. **595** (7865), 48 (2021).
- [25] Mehrdad Mahmoodian, M.V. Entin. *J. Phys.: Conf. Ser.* **2227**, 012012 (2022).
- [26] М.М. Махмудиан, М.М. Махмудиан, М.В. Энтин. *Письма в ЖЭТФ* **115**, 642 (2022).
- [27] P.W. Anderson. *Phys. Rev.* **79**, 350 (1950).

*Редактор Ю.Э. Китаев*