

01.5

## Методы выделения чередующихся фаз в режиме перемежающейся обобщенной синхронизации

© А.О. Сельский<sup>1,2</sup>, О.И. Москаленко<sup>1,2</sup>, А.А. Короновский<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия

<sup>2</sup> Региональный научно-образовательный математический центр „Математика технологий будущего“, Саратов, Россия

E-mail: selskiiao@gmail.com

Поступило в Редакцию 7 сентября 2023 г.

В окончательной редакции 2 октября 2023 г.

Принято к публикации 3 октября 2023 г.

Предложены два метода детектирования переходов между ламинарным и турбулентным поведением на примере однонаправленно связанных систем Ресслера, находящихся в режиме перемежающейся обобщенной хаотической синхронизации. Оба метода основаны на расчете вероятности диагностирования турбулентной фазы с помощью метода вспомогательной системы и техники сечения Пуанкаре. Предложенные методы позволяют снизить время расчета для нахождения фазовых переходов или повысить точность определения момента переключения между двумя режимами.

**Ключевые слова:** обобщенная синхронизация, перемежающееся поведение, однонаправленно связанные системы, сечение Пуанкаре.

DOI: 10.61011/PJTF.2023.22.56599.19720

Синхронизация [1] и сопутствующие ей механизмы перемежаемости [2], возникающие вблизи границы установления синхронного режима, представляют собой универсальное явление для динамических систем самой различной природы. В настоящее время известно большое число типов синхронного поведения. Например, различают полную, обобщенную, фазовую, индуцированную шумом синхронизации, которые наблюдаются в системах радиофизики, химии, геологии и других областях современных наук, а также в живых системах, и все они сопровождаются различными типами перемежающегося поведения [3,4]. Так, вблизи границы фазовой синхронизации для относительно слабой расстройки между хаотическими системами наблюдается перемежаемость „игольного ушка“ [5], а при большой расстройке по частоте — перемежаемость „кольца“ [6]. В то же время на границе, обобщенной синхронизации в системах с относительно сложной (двулистной) структурой, наблюдается перемежаемость перескоков [7], тогда как при более простой топологии аттрактора имеет место перемежаемость типа on-off [4].

Перемежаемость появляется при чередовании ламинарных и турбулентных фаз поведения в сложных системах. В режимах перемежающейся синхронизации ламинарные фазы соответствуют синхронному поведению взаимодействующих систем, а турбулентные всплески появляются при разрушении режима синхронизации. Статистические характеристики длительностей ламинарных и турбулентных фаз являются одним из основных инструментов, позволяющих классифицировать тип перемежающегося поведения [8]. Поэтому корректное определение моментов перехода между ламинарными

и турбулентными фазами представляет собой важную задачу.

В случае перемежающейся обобщенной синхронизации наиболее эффективным методом выделения ламинарных и турбулентных фаз в динамике связанных систем является метод вспомогательной системы [9], несмотря на то что у данного метода есть существенное ограничение: он применим только к системам с однонаправленным характером связи [10]. Данный метод позволяет детектировать синхронное или асинхронное поведение однонаправленно связанных хаотических осцилляторов (ведущего и ведомого) в каждый момент времени. При использовании метода вспомогательной системы в рассмотрение вводят еще одну систему, идентичную ведомой во всем, кроме начальных условий [9]. По определению, в режиме обобщенной синхронизации между состояниями ведущей и ведомой, а также ведущей и вспомогательной систем устанавливается однозначная функциональная зависимость [9,11], что приводит к идентичности состояний ведомой и вспомогательной систем, тогда как в случае асинхронной динамики (турбулентная фаза) ведомая и вспомогательная системы демонстрируют различные состояния [4]. Кроме того, как было установлено в [12] методом вспомогательной системы, режим перемежающейся обобщенной хаотической синхронизации характеризуется мультистабильностью, при которой в один и тот же момент времени в зависимости от начальных условий ведомой системы может детектироваться как синхронная, так и асинхронная динамика. При рассмотрении мультистабильности пары систем „ведомая–вспомогательная“ оказывается недостаточно, поскольку в этом случае

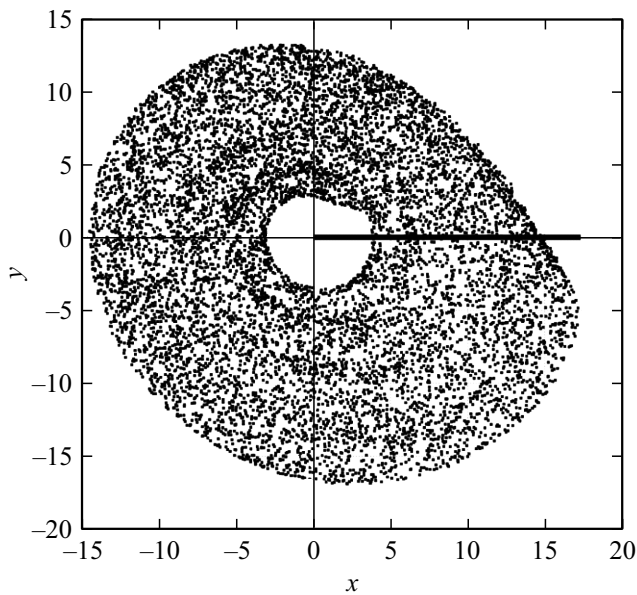


Рис. 1. Пример проекции  $(x, y)$  фазового портрета ведущей системы с нанесенной линией сечения Пуанкаре.

даже в мультистабильном состоянии будет наблюдаться только какое-то одно состояние (либо синхронное, либо асинхронное) из двух возможных. Соответственно для описания этого явления и более точного определения моментов переключения между ламинарными и турбулентными фазами было предложено рассматривать ансамбль вспомогательных систем (его можно также рассматривать как ансамбль ведомых систем) и вычислять вероятность наблюдения синхронного (ламинарного) и асинхронного (турбулентного) поведения однонаправленно связанных систем в каждый момент времени [12]. Чем больше систем  $N$  рассматривается в ансамбле, тем, с одной стороны, с большей точностью вычисляется значение вероятности в каждый момент времени, но, с другой стороны, тем более требовательной становится задача к вычислительным ресурсам. В то же время избыточная точность в нахождении вероятности часто не требуется для решения рассматриваемых задач. С практической точки зрения ансамбль из нескольких сотен систем вполне достаточен для получения достоверных результатов. Зависимость вероятности детектирования турбулентной (или ламинарной) фазы от времени можно использовать для более корректного выделения соответствующих фаз и, следовательно, для получения более точных статистических характеристик перемежающегося поведения.

Однако такой подход имеет очевидную сложность, связанную с большим числом вычислений. Во-первых, необходимо одновременно вычислять состояние не трех, как в классическом методе вспомогательной системы, а как минимум нескольких сотен динамических систем. Во-вторых, в каждый момент времени необходимо вычислять по состояниям всех систем еще и веро-

ятность диагностирования турбулентной (ламинарной) фазы. С учетом того, что длительность перехода от ламинарной фазы к турбулентной (и наоборот) в режиме перемежающейся обобщенной хаотической синхронизации значительно превышает длительность характерного периода колебаний взаимодействующих осцилляторов, а сами потоковые системы могут быть сведены с помощью сечения Пуанкаре [13,14] к отображениям меньшей размерности, можно оценивать вероятность детектирования ламинарной или турбулентной фазы поведения лишь в точках сечения, исключив тем самым необходимость такого расчета в каждый момент времени, что позволит существенно сократить время расчетов.

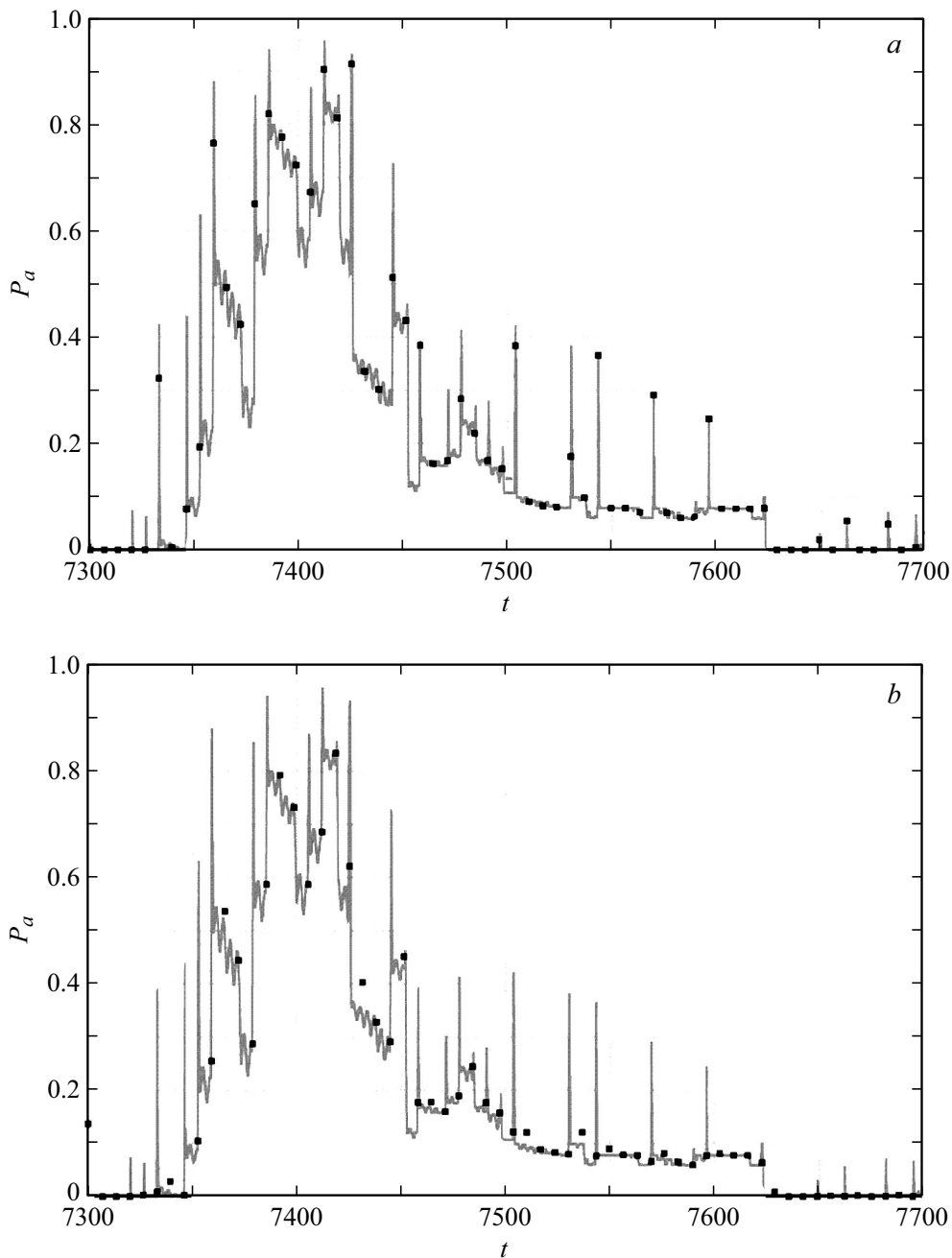
Целью настоящей работы является разработка новых методов выделения переходов от турбулентной фазы к ламинарной и наоборот. Предлагаемые методы обеспечивают лучшую чувствительность при детектировании перехода между фазами или позволяют упростить расчет состояний исследуемых систем.

В качестве объекта исследования в настоящей работе выбран ансамбль однонаправленно связанных слабо неидентичных систем Ресслера, находящихся в режиме ленточного хаоса:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_d &= -\omega_d y_d - z_d, \\
 \dot{y}_d &= \omega_d x_d + a y_d, \\
 \dot{z}_d &= p + z_d(x_d - c), \\
 \dot{x}_r^i &= -\omega_r y_r^i - z_r^i + \varepsilon(x_d - x_r^i), \\
 \dot{y}_r^i &= \omega_r x_r^i + a y_r^i, \\
 \dot{z}_r^i &= p + z_r^i(x_r^i - c),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где индексы  $d$  и  $r$  относятся к ведущей и ведомым системам соответственно, индекс  $i = 1, \dots, N$  (в рамках настоящей работы рассматривалось  $N = 500$ ) соответствует номеру ведомой системы, начальные условия для этих систем выбираются различными,  $a = 0.15$ ,  $p = 0.2$ ,  $c = 10$ ,  $\omega_d = 0.93$  и  $\omega_r = 0.95$  выступают в роли управляющих параметров взаимодействующих систем,  $\varepsilon$  — параметр связи. Для избежания „ловушки численного счета“, когда в синхронной фазе движения состояния ведомых систем оказываются идентичными в пределах точности представления численных значений в оперативной памяти (и соответственно после этого даже в турбулентной фазе системы будут демонстрировать идентичную динамику), мы использовали стандартный подход, выбирая случайным образом значения параметра  $\omega_{ri}$  ведомых систем слегка различными:  $\omega_{ri} = \omega_r + \Delta\omega_i$ , где  $|\Delta\omega_i| < 10^{-7}$ . При выбранных значениях управляющих параметров и  $\varepsilon > 0.178$  в системе (1) наблюдается режим обобщенной синхронизации. Вероятность наблюдения асинхронного поведения [12] определяется как

$$P_a = 1 - \sum_{i=1}^N \frac{n(x_r^i)}{N(N-1)}, \tag{2}$$



**Рис. 2.** Примеры зависимости от времени вероятности обнаружения турбулентной фазы  $P_a(t)$ , рассчитанные различным образом. Серая линия — вероятность, рассчитанная для каждого момента времени, черные точки — вероятность определяется с помощью процедуры сечения Пуанкаре. *a* — вероятность рассчитывается только в сечении Пуанкаре (метод 1); *b* — вероятность рассчитывается в каждый момент времени и усредняется между сечениями Пуанкаре (метод 2).

где  $n(x_r^i)$  — число систем, находящихся в синхронном режиме с  $i$ -м осциллятором,  $N$  — число осцилляторов в ансамбле. Когда вероятность  $P_a$  близка к единице, в исследуемой системе наблюдается турбулентная фаза поведения, а когда  $P_a$  близка к нулю, имеет место ламинарная. Задав порог разделения ламинарных и турбулентных фаз, можно разделить характерные фазы поведения взаимодействующих систем. В работе в качестве порогового было выбрано значение  $P_L = 0.1$ .

Аттрактор системы Ресслера с введенным в рассмотрение сечением Пуанкаре показан на рис. 1. Для того чтобы проиллюстрировать работоспособность предложенного подхода, в работе на длительном интервале времени, соответствующем турбулентной фазе, проведено сравнение вероятностей диагностирования турбулентного режима поведения изучаемых систем при различных способах расчета. При первом способе был использован метод, предложенный в работе [12], когда

вероятность  $P_a$  определяется в каждой точке траектории. Вторым способом расчета вероятности диагностирования турбулентного режима был расчет величины  $P_a$  лишь в точках сечения Пуанкаре.

Рис. 2, *a* соответствует случаю, когда вероятность рассчитывается только в сечении Пуанкаре (метод 1). Результат применения первого способа расчета показан серой линией, а второго — черными точками. Ожидаемо, что все точки накладываются на линию, соответствующую первому способу расчета. При этом видно, что этих точек вполне достаточно, чтобы точно определить границы турбулентной фазы. Следует также обратить внимание на то, что при расчете вероятности в каждой точке на зависимости  $P_a(t)$  наблюдаются резкие „выбросы“, затрудняющие точный поиск момента перехода от турбулентного режима к ламинарному и наоборот. При этом расчет вероятности с помощью процедуры сечения Пуанкаре хотя и уменьшает время расчета, но не позволяет полностью избежать этих „выбросов“, частично наследуя их от первого способа расчета вероятности.

Для того чтобы избавиться от упомянутых выше „выбросов“ на зависимости  $P_a(t)$ , можно использовать другую модификацию исходного метода: рассчитать вероятность для всех моментов времени, а затем провести усреднение на временных интервалах между двумя сечениями Пуанкаре (метод 2). Соответствующие результаты показаны на рис. 2, *b*. В этом случае число вычислений не уменьшается, но можно видеть, что средние значения вероятности сглаживают „всплески“ вероятности детектирования турбулентной фазы, что позволяет точнее и проще детектировать моменты переходов между различными режимами.

Таким образом, используя предложенные подходы в задачах, связанных с анализом коллективной динамики систем (например, при диагностике эпилептических разрядов [15,16]), можно эффективно выделить временные рамки турбулентных и ламинарных фаз при меньших временных затратах (метод 1) либо повысить точность детектирования моментов перехода за счет избавления от артефактов (метод 2).

## Финансирование работы

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-12-00037).

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

[1] А.С. Пиковский, М.Г. Розенблюм, Ю. Куртс, *Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление* (Техносфера, М., 2003).

- [2] П. Берже, И. Помо, К. Видаль, *Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности* (Мир, М., 1991).
- [3] S. Boccaletti, D.L. Valladares, Phys. Rev. E, **62**, 7497 (2000). DOI: 10.1103/PhysRevE.62.7497
- [4] A.E. Hramov, A.A. Koronovskii, Europhys. Lett., **70**, 169 (2005). DOI: 10.1209/epl/i2004-10488-6
- [5] A. Pikovsky, G. Osipov, M. Rosenblum, M. Zaks, J. Kurths, Phys. Rev. Lett., **79**, 47 (1997). DOI: 10.1103/PhysRevLett.79.47
- [6] A.E. Hramov, A.A. Koronovskii, M.K. Kurovskaya, S. Boccaletti, Phys. Rev. Lett., **97**, 114101 (2006). DOI: 10.1103/PhysRevLett.97.114101
- [7] A.A. Koronovskii, O.I. Moskalenko, A.A. Pivovarov, V.A. Khanadeev, A.E. Hramov, A.N. Pisarchik, Phys. Rev. E, **102**, 012205 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevE.102.012205
- [8] О.И. Москаленко, Е.В. Евстифеев, А.А. Короновский, Письма в ЖТФ, **46** (16), 12 (2020). DOI: 10.21883/PJTF.2020.16.49846.18359 [O.I. Moskalenko, E.V. Evstifeev, A.A. Koronovskii, Tech. Phys. Lett., **46** (8), 792 (2020). DOI: 10.1134/S1063785020080246].
- [9] H.D.I. Abarbanel, N.F. Rulkov, M.M. Sushchik, Phys. Rev. E, **53**, 4528 (1996). DOI: 10.1103/PhysRevE.53.4528
- [10] O.I. Moskalenko, A.A. Koronovskii, A.E. Hramov, Phys. Rev. E, **87**, 064901 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevE.87.064901
- [11] N.F. Rulkov, M.M. Sushchik, L.S. Tsimring, H.D.I. Abarbanel, Phys. Rev. E, **51**, 980 (1995). DOI: 10.1103/PhysRevE.51.980
- [12] O.I. Moskalenko, A.A. Koronovskii, A.O. Selskii, E.V. Evstifeev, Chaos, **31**, 083106 (2021). DOI: 10.1063/5.0055302
- [13] С.П. Кузнецов, *Динамический хаос* (Физматлит, М., 2001).
- [14] M. Henon, Physica D, **5**, 412 (1982). DOI: 10.1016/0167-2789(82)90034-3
- [15] O.E. Karpov, V.V. Grubov, V.A. Maksimenko, S.A. Kurkin, N.M. Smirnov, N.P. Utyashev, D.A. Andrikov, N.N. Shusharina, A.E. Hramov, Sci. Rep., **12**, 11474 (2022). DOI: 10.1038/s41598-022-15675-9
- [16] N.S. Frolov, V.V. Grubov, V.A. Maksimenko, A. Lüttjohann, V.V. Makarov, A.N. Pavlov, E. Sitnikova, A.N. Pisarchik, J. Kurths, A.E. Hramov, Sci. Rep., **9**, 7243 (2019). DOI: 10.1038/s41598-019-43619-3