Оптика и спектроскопия, 2023, том 131, вып. 9

03

Об отрицательном давлении света в диспергирующей среде

© *М.В. Давидович*

Национальный исследовательский Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
410012 Саратов, Россия

e-mail: davidovichmv@info.sgu.ru

Поступила в редакцию 02.08.2022 г.
В окончательной редакции 10.08.2023 г.
Принята к публикации 17.08.2023 г.

Рассмотрены диспергирующие диссипативные однородные изотропные локальные (без пространственной дисперсии) магнитодиэлектрические среды, для которых с использованием уравнений Максвелла получены балансные соотношения для импульса системы поле–вещество, определены потоки импульса, определены давление плоской монохроматической волны на слой среды и силы, действующие на малые тела в такой среде. Показана возможность отрицательного давления на слой в безграничной левой среде, а также и на слой в безграничной правой среде с малыми потерями в случае, когда электрические потери превышают магнитные. Давление на полуплоскость или пластину с любым типом дисперсии при падении на них плоской монохроматической волны из вакуума всегда положительное. Прозрачные среды и структуры с равными проницаемостями давления не испытывают. Рассмотрена модель гипотетической среды Веселаго в виде разреженной плазмы электрических и магнитных зарядов, найдены скорость переноса энергии и импульса в ней.

Ключевые слова: давление света, импульс фотона, дисперсия, контроверсия Абрагама-Минковского, метаматериал.

DOI: 10.61011/OS.2023.09.56609.3990-23

Введение

Давление света в слабых световых полях было измерено П.Н. Лебедевым еще в 1899 г. С появлением мощных лазеров стало возможным измерять силу давления света на микрочастицы, расположенные в относительно прозрачных средах (жидкостях и газах). Указанная сила может существенно превышать силу тяжести. Эти измерения демонстрируют положительный знак (давление направлено от источника) вне зависимости от характера дисперсии в среде (см. литературу в [1], а также [2–8]). Впервые о возможности отрицательного давления света было высказано в работе В.Г. Веселаго [9] в связи с рассмотрением свойств сред с обратными волнами (ОВ). Эти среды в работе были названы левыми. Предполагалось именно отрицательное давление (т. е. притяжение к источнику) на частицы в левых средах (ЛС), т. е. средах с ОВ, а среды предполагались однородными изотропными с локальными диэлектрической проницаемостью (ДП) ε и магнитной проницаемостью (МП) μ. Локальность означает отсутствие пространственной дисперсии (ПД). В таких средах вектор фазовой скорости (ФС) $\mathbf{v}_p$ и волновой вектор $\mathbf{k}$ антипараллельны вектору Пойнтинга $\mathbf{S}$. Противоположный случай, когда векторы параллельны (или образуют острый угол), соответствует правым средам (ПС). В обычных однородных и изотропных ПС векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{k}$ образуют правую тройку векторов, т. е. поток мощности $\mathbf{S} = \mathrm{Re}(\mathbf{R} \times \mathbf{H}^*)/2$ направлен вдоль $\mathbf{k}$, тогда как в ЛС тройка левая, и поток мощности идет вспять ФС. В таких средах волны обратные, а дисперсия аномальная, отрицательная [10]. При падении плоской волны на границу ПС и ЛС возникает отрицательная рефракция (ОР) или отрицательное преломление. Изотропных ЛС быть не может [11], а все известные среды с ОВ анизотропные или бианизотропные, причем с выраженной ПД. ОР и ОВ — явления разные, существующие независимо [12,13]. ОР имеет место для анизотропных сред и сильно зависит от ориентации вектора падающей волны относительно поверхности изочастот кристалла или фотонного кристалла (ФК) [13]. В диспергирующей среде квазичастицами электромагнитного поля являются квазифотоны (поляритоны). Их энергия $\hbar\omega$, однако, в отличие от фотонов в вакууме об их импульсе до сих пор имеет место дискуссия. Также имеет место дискуссия о плотности энергии и вообще о форме тензора энергии-импульса (ТЭИ) [1–8], хотя для ряда простых моделей сред (например, для холодной плазмы) вопрос о плотности энергии решен [14].

Цель настоящей работы состоит в рассмотрении возможности отрицательного давления света на основе строгих электродинамических соотношений для модели изотропной диспергирующей локальной среды (без ПД), описываемой спектральными ДП $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - i\varepsilon''(\omega)$ и МП $\mu(\omega) = \mu'(\omega) - i\mu''(\omega)$. Даже в такой простой постановке задача решается не просто. Результаты можно расширить на анизотропные среды с ПД, но это требует отдельного рассмотрения.

При доказательстве отрицательного давления в [9] В.Г. Веселаго допустил ошибку. Он ввел отрицательный показатель преломления (ПП) $n = \sqrt{\varepsilon\mu} < 0$, определив без обоснования плотность импульса по Минковскому $\mathbf{g}^M = \mathbf{D} \times \mathbf{B} = n^2\mathbf{S}/c^2$. Затем он ввел плотность энергии w согласно Умову $\mathbf{S} = -w\mathbf{v}_p = -wc\mathbf{k}/|n|$ и определил импульс „фотона“ (поляритона) как $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$. Здесь $|n|$ следует трактовать как коэффициент замедления. Эти соотношения Веселаго не обосновал. Ниже показано, что в рассмотренной им среде импульс движется в сторону переноса энергии, т. е. от источника. С 1967 г. однородных и изотропных сред, в которых энергия движется противоположно импульсу или противоположно фазе, не обнаружено и не создано, хотя имеется огромное число работ по ОР, метаматериалам с „отрицательным ПП“ и т. п. (см., например, работы [15–40] и литературу там). Существует несколько названий таких гипотетических (как они охарактеризованы в [9]) сред. Например, они также названы средами с ОР и средами с отрицательной групповой скоростью (ГС). Это неверно. ОР не полностью характеризуется средой и зависит от среды, из которой падает волна (луч) и от угла падения, причем возможна ОР и при $\mu = 1$ (т. е. без ОВ). Неверно это и относительно отрицательной ГС: в диссипативных средах и метаматериалах ГС никак не характеризует скорость движения энергии. К настоящему времени известно, что среды с ОВ, ОР, отрицательной ГС и ОР — понятия не тождественные, а явления могут существовать независимо [12,13]. Отрицательная ГС имеет, например, место для плазмонов — волн вдоль границ раздела поверхностей сред, причем для них существование ОВ не тождественно наличию отрицательной ГС [41]. Среды с „одновременно“ (на одной и той же частоте) отрицательными ε и μ можно также назвать средами с ОВ. Формальное введение таких скалярных параметров в уравнения Максвелла действительно делает плоскую волну обратной. При этом ПП можно не вводить. Но если добавить к ДП и МП бесконечно малые потери, то корень извлекается однозначно: $n = \sqrt{\varepsilon\mu} < 0$. Все созданные для подтверждения результатов [9] метаматериалы анизотропные с ПД. Создание изотропных метаматериалов без ПД с одновременно отрицательными (на одной частоте) ДП и МП, т. е. с отрицательным ПП, невозможно [11,38]. Тем не менее интересно рассмотреть плазму с электрическими и магнитными монополями (зарядами), которая упоминалась в [9]. Там также была введена среда $\varepsilon = \mu - 1$ (антивакуум), которую называют средой Веселаго. Цель работы — рассмотреть волны и давление в такой среде, в среде с $\varepsilon < 0$, $\mu > 0$ (плазма), в среде $\varepsilon > 0$, $\mu < 0$ и в обычной слабо диссипативной среде.

Теорема о балансе импульса в монохроматическом поле

Однородная изотропная среда с монохроматической волной описывается уравнениями Максвелла вида

$$\nabla \times \mathbf{H}(\omega) = i\omega\varepsilon_0\varepsilon(\omega)\mathbf{E}(\omega) + \mathbf{J}(\omega), \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\omega) = -i\omega\mu_0\mu(\omega)\mathbf{H}(\omega), \tag{2}$$

В них $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - i\varepsilon''(\omega)$, $\mu(\omega) = \mu'(\omega) - i\mu''(\omega)$, причем диссипация диктует условия $\varepsilon''(\omega) > 0$, $\mu''(\omega) > 0$. Из (1) имеем

$$i\omega\varepsilon_0\varepsilon(\omega)\nabla \cdot \mathbf{E}(\omega) = -\nabla \cdot \mathbf{J}(\omega) = i\omega\rho$$

или

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\omega) = \rho/(\varepsilon_0\varepsilon(\omega)).$$

Здесь ρ — плотность сторонних зарядов, соответствующих источникам поля $\mathbf{J}$. В электродинамике при неограниченной среде плотность J может соответствовать и стокам, т. е. описывать некую частицу, поглощающую энергию поля. В этом случае источники поля удобно считать расположенными на бесконечности. Для определения сил и давлений следует рассмотреть закон сохранения импульса. Рассмотрим его на основе уравнений (1) и (2). Умножим первое уравнение векторно слева на $\mu_0\mu^*\mathbf{H}^*$, а комплексно сопряженное уравнение (2) — векторно на $\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}$ и сложим:

$$\mu_0\mu^*\mathbf{H}^* \times \nabla \times \mathbf{H} + \varepsilon_0\mathbf{E} \times \nabla \times \varepsilon^*\mathbf{E}^*$$
$$= i\omega c^{-2}\left(\mu^*\varepsilon\mathbf{H}^* \times \mathbf{E} + \varepsilon\mu^*\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\right) + \mu_0\mu^*\mathbf{H}^* \times \mathbf{J}. \tag{3}$$

Возьмем комплексно сопряженное уравнение от (3):

$$\mu_0\mu\mathbf{H} \times \nabla \times \mathbf{H}^* + \varepsilon_0\mathbf{E}^* \times \nabla \times \varepsilon\mathbf{E}$$
$$= -i\omega c^{-2}\left(\mu\varepsilon^*\mathbf{H} \times \mathbf{E}^* + \varepsilon^*\mu\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}\right) + \mu_0\mu\mathbf{H} \times \mathbf{J}^*. \tag{4}$$

Теперь комплексно сопряжем (1), умножим на $\mu_0\mu^*$ и векторно слева на $\mathbf{H}$, а уравнение (2) соответственно на $\varepsilon_0\varepsilon$ и векторно на $\mathbf{E}^*$. Затем сложим:

$$\mu_0\mathbf{H} \times \nabla \times \mu^*\mathbf{H}^* + \varepsilon_0\mathbf{E}^* \times \nabla \times \varepsilon\mathbf{E} = -i\omega c^{-2}$$
$$\left(\mu^*\varepsilon^*\mathbf{H} \times \mathbf{E}^* + \varepsilon\mu\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}\right) + \mu_0\mu^*\mathbf{H} \times \mathbf{J}^*. \tag{5}$$

Возьмем комплексно сопряженное уравнение от (5):

$$\mu_0\mathbf{H}^* \times \nabla \times \mu\mathbf{H} + \varepsilon_0\mathbf{E} \times \nabla \times \varepsilon^*\mathbf{E}^*$$
$$= i\omega c^{-2}\left(\mu\varepsilon\mathbf{H}^* \times \mathbf{E} + \varepsilon^*\mu^*\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\right) + \mu_0\mu\mathbf{H}^* \times \mathbf{J}. \tag{6}$$

В этих соотношениях обозначим $\mu\mathbf{H} = \mathbf{a}$, $\mathbf{H}^* = \mathbf{b}$, $\varepsilon\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{a}}$, $\mathbf{E}^* = \tilde{\mathbf{b}}$ и сложим все четыре уравнения. Левая часть равенства, содержащего магнитные поля, примет вид

$$2\mu\mathrm{Re}(\mathbf{a} \times \nabla \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \nabla \times \mathbf{a})$$
$$= 2\mu_0\mathrm{Re}\{-\mu\nabla \cdot \left(\hat{I}|\mathbf{H}|^2 - 2\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}^*\right) + 2\mu\mathbf{H}\left(\nabla \cdot \mathbf{H}^*\right)\}.$$

Здесь мы использовали известное векторно-тензорное тождество

$$\mathbf{a} \times \nabla \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \nabla \times \mathbf{a} - \nabla$$
$$\times \left[\hat{I}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}\right] + \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}). \tag{7}$$

Аналогично преобразуем часть, содержащую электрические поля. Правая часть, содержащая источники, приобретает вид

$$-2\mu_0 \mathrm{Re}\left(\mathbf{J}\times(\mu^*+\mu)\mathbf{H}^*\right) = -4\mu_0\mu'\mathrm{Re}(\mathbf{J}\times\mathbf{H}^*).$$

Оставшаяся правая часть имеет следующий вид:

$$2\omega c^{-2}\mathrm{Im}((\varepsilon\mu-\varepsilon^*\mu^*)\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*)$$
$$= -2\omega c^{-2}(\varepsilon'\mu''+\varepsilon''\mu')\mathrm{Re}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*).$$

Она равна нулю в среде без потерь. По смыслу нестационарного балансного уравнения [1] она равна производной по времени от средней за период плотности импульса, т.е. приращению импульса поля. В монохроматическом поле в среде без потерь импульс не запасается, не расходуется, т.е. эта величина есть нуль. Введем обозначения для комплексных величин:

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}^*/2, \qquad \tilde{\mathbf{F}}_L = \mathbf{J}\times\mu_0\mu'\mathbf{H}^*/2,$$

$$\tilde{\mathbf{g}}^M = \varepsilon\mathbf{E}^*\times\mu^*\mathbf{H}^*/(2c^2), \qquad \tilde{p}_J = \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}^*/2,$$

а также для действительных величин:

$$\tilde{p}_s = \omega\varepsilon''|\mathbf{E}|^2/2, \qquad \tilde{p}_\mu = \omega\mu''|H|^2/2,$$

$$\tilde{w}_e = \varepsilon_0\varepsilon'|\mathbf{E}|^2/4, \qquad \tilde{w}_\mu = \mu_0\mu'|\mathbf{H}|^2/4,$$

при этом использование (7) приводит к тензору Σ:

$$\hat{\Sigma} = \mathrm{Re}\left(\mu_0\mu\left(\hat{I}|\mathbf{H}|^2 - 2\mathbf{H}\otimes\mathbf{H}^*\right)\right.$$
$$\left.+\varepsilon_0\varepsilon\left(\hat{I}|\mathbf{E}|^2-2\mathbf{E}\otimes\mathbf{E}^*\right)\right)/4. \qquad (8)$$

По своему смыслу $\tilde{\mathbf{S}}$ — комплексный вектор Пойнтинга. Он входит в теорему Пойнтинга о комплексной мощности [42]. Его реальная часть означает среднюю за период плотность потока мощности $\tilde{\mathbf{S}}' = \mathrm{Re}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*)/2$. Комплексное балансное уравнение для мощности имеет вид

$$-\nabla\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{p}_\varepsilon\tilde{p}_\mu + 2i\omega(\tilde{w}_\varepsilon - \tilde{w}_\mu) + \tilde{p}_J. \qquad (9)$$

Можно брать реальную и мнимую части этого уравнения. Физический смысл имеет уравнение [42]

$$-\nabla\cdot\tilde{\mathbf{S}}' = \tilde{p}_\varepsilon + \tilde{p}_\mu + \tilde{p}'_J.$$

В нем сумма $\tilde{p}_\varepsilon + \tilde{p}_\mu$ определяет мощность потерь поля в среде, $\tilde{P}'_J$ — активная плотность мощности источников, направленная на создание поля. Она расходуется на потери и на излучение. Для мнимой части имеем

$$-\nabla\cdot\tilde{\mathbf{S}}'' = 2\omega(\tilde{w}'_\varepsilon - \tilde{w}'_\mu) + \tilde{p}''_J.$$

Реактивная плотность мощности источников $\tilde{p}''_J$ определяет удвоенную производную по времени от разности электрической и магнитной плотностей энергий поля и реактивный поток мощности. Однако величина $\tilde{w}_\varepsilon + \tilde{w}_\mu$ имеет смысл плотности энергии только в средах без дисперсии (и соответственно без потерь). В средах с дисперсией определить плотность энергии в монохроматическом поле в общем случае нельзя. Для этого надо привлекать нестационарные процессы создания поля [39,40], поскольку необходимо определить, как запасалась энергия. В высокочастотном монохроматическом поле имеет место переход энергии электрического поля в энергию магнитного поля, и наоборот, при этом энергии не определяются только полями, ДП и МП. Например, в плазме энергия может запасаться как кинетическая энергия колебаний зарядов [14]. Для получения дополнительных соотношений можно сформулировать теорему о колеблющейся мощности [42]. Вектор $\tilde{\mathbf{g}}^M$ назовем средней за период комплексной плотностью импульса по Минковскому. В прозрачной среде его реальная часть характеризует среднюю за период плотность импульса: $\tilde{\mathbf{g}}'^M = \mathrm{Re}(\varepsilon\mathbf{E}\times\mu^*\mathbf{H}^*)/(2c^2) = \varepsilon'\mu'\tilde{\mathbf{S}}'/c^2$. Аналогично $\tilde{\mathbf{F}}'_L = \mu_0\mu'\mathbf{Re}(\mathbf{J}\times\mathbf{H}^*)/2$ — средняя за период плотность силы Лоренца, действующая на источники со стороны поля (сила отдачи). Тензор $\hat{\Sigma}$ имеет вид среднего за период тензора напряжений Максвелла и характеризует потоки компонент импульса. Разделив полученное соотношение на восемь, имеем закон сохранения импульса в форме

$$-\nabla\cdot\hat{\Sigma} + \mathrm{R}e(\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}(\nabla\cdot\mathbf{E}) + \mu_0\mu\mathbf{H})(\nabla\cdot\mathbf{H})/2$$
$$+\omega c^{-2}(\varepsilon'\mu''+\varepsilon''\mu')\tilde{\mathbf{S}}'/2 = -\tilde{\mathbf{F}}'_L. \qquad (10)$$

Член в левой части (10) равен нулю везде, где отсутствуют источники. Если поле создается точечным диполем, то это все пространство кроме точки расположения диполя, где поле сингулярное. Если источники распределены, то этот член равен $\mathrm{Re}(\rho\mathbf{E})/2$, т.е. это средняя за период плотность электрической силы, действующая со стороны поля на источники. Если токи источников соленоидальные, она отсутствует.

Рассмотрим плоскую волну с зависимостью $\exp(i\omega t - i\mathbf{kr})$. Операция дивергенция теперь означает скалярное умножение, например $\nabla\cdot\mathbf{E} = -i\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}$, а ротор — векторное умножение $\nabla\times\mathbf{E} = -i\mathbf{k}\times\mathbf{E}$. Для плоской волны источников нет (они на бесконечности), поля соленоидальные, и баланс приобретает вид

$$-\nabla\cdot\hat{\Sigma} + \omega c^{-2}(\varepsilon'\mu''+\varepsilon''\mu')\tilde{\mathbf{S}}'/2 = 0. \qquad (11)$$

Если в среде нет диссипации, то $\nabla\cdot\hat{\Sigma} = 0$. Для плоской волны, движущейся вдоль оси z, имеет место только одна компонента $\hat{\Sigma}_{zz}$, и $\partial_z\hat{\Sigma}_{zz} = 0$, т.е. $\hat{\Sigma}_{zz}(z) = \mathrm{const}$. Если ε' и μ' меняют знак, то, согласно (8), $\hat{\Sigma}_{zz}$ также меняет знак.

Движение волны вдоль z означает движение фазы, поэтому изменение знака происходит относительно движения фазы. В уравнении (11) также меняется знак правого члена, поэтому перенос импульса идет в направлении переноса энергии $\tilde{\mathbf{S}}'$ независимо от типа среды. Если ε' и μ' разного знака, то знак $\hat{\Sigma}_{zz}$ в (8) зависит от того, какая из „энергий" больше, а по отношению к $\tilde{\mathbf{S}}'$ и от того, как соотносятся электрические и магнитные потери. Этот случай не интересен, поскольку такая волна всегда сильно затухает. Для плоской волны в электронной плазме ($\mu = 1$) имеем $H_y = \eta_0 \sqrt{\varepsilon} E_y$, $\eta_0 = \sqrt{\varepsilon_0/\mu}$, и знак в (8) при слабой диссипации меняется в точке $\varepsilon' = -1$, при этом правая часть (11) равна $\omega c^{-2} \varepsilon'' \tilde{\mathbf{S}}'/2$ и не меняет знак. Для сильно диссипативных сред условия усложняются. Хотя $\hat{\Sigma}_{zz}$ дает поток импульса в направлении z, не следует думать, что на частицу в поле будет действовать сила того же направления. Это можно утверждать в первом приближении, когда частица настолько мала, что почти не возмущает поле. Для учета влияния частицы с ДП $\tilde{\varepsilon}$ ее следует описать как ток поляризации $\mathbf{J}_p = i\omega\varepsilon_0(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon)\mathbf{E}$ в правой части (1). Для простоты будем считать, что ДП $\tilde{\varepsilon}$ постоянна по объему частицы. На ее границе она резко „спадает" до ε. Имеем

$$\nabla \cdot ((\tilde{\varepsilon} - \varepsilon)\mathbf{E}) = (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon)\nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon).$$

Дифференцируя скачок от $\tilde{\varepsilon}$ к ε, получаем дельта-функцию: $\nabla(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) = -\boldsymbol{\nu}(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon)\delta(\nu)$. Здесь $\boldsymbol{\nu}$ — внешняя нормаль к поверхности частицы, а ν — координата, отсчитываемая от поверхности вдоль нормали. Поскольку поле терпит скачок $\tilde{\varepsilon} E_\nu^- = \varepsilon E_\nu^+$, можно ввести наведенную поверхностную плотность заряда

$$\sigma = \varepsilon\varepsilon(E_\nu^+ - E_\nu^-) = \varepsilon_0 \varepsilon E_\nu^+ (1 - \varepsilon/\tilde{\varepsilon}).$$

Теперь имеем дивергенцию

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_p = i\omega\varepsilon_0 \lfloor (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon)\nabla \cdot \mathbf{E} + E_\nu^-(\varepsilon - \tilde{\varepsilon})\delta(\nu) \rfloor.$$

Если бы тело было неоднородным, величина $\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$ давала бы плотность объемного заряда, взаимодействующего с электрическим полем. В нашем случае внутри однородной частицы $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, и получаем только поверхностную дивергенцию и поверхностную плотность заряда: $\nabla \cdot \mathbf{J}_p = -i\omega\sigma\delta(\nu)$. Следует отметить, что вне поверхности по свойству дельта-функции $\nabla \cdot \mathbf{J}_p = 0$. Интегрируя по объему частицы, в силу теоремы Гаусса имеем, что интеграл от σ по поверхности частицы (полный поверхностный заряд) равен нулю. Для учета частицы следует плотность тока $\mathbf{J}_p$ добавить в баланс (11). Он примет вид

$$-\nabla \cdot \hat{\Sigma} = -\mathrm{Re}(\sigma \mathbf{E}\varepsilon/\tilde{\varepsilon})\delta(\nu)/2 - \omega c^{-2}(\varepsilon'\mu'' + \varepsilon''\mu')\tilde{\mathbf{S}}'/2 - \tilde{\mathbf{F}}_p. \quad (12)$$

В нем первый член справа — плотность поверхностной силы Кулона, второй член — плотность силы стрикции, а третий — плотность объемной магнитной силы Лоренца, действующей на частицу:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{F}}_p &= \omega c^{-2}\mu' \mathrm{Re}(i(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon)\tilde{\mathbf{S}}) \\ &= \omega c^{-2}\mu' \lfloor (\tilde{\varepsilon}'' - \varepsilon'')\tilde{\mathbf{S}}' - (\tilde{\varepsilon}' - \varepsilon')\tilde{\mathbf{S}}'' \rfloor.\end{aligned} \quad (13)$$

В среде без диссипации второй член обнуляется. Интегрируя по объему частицы, получим

$$-\oint_S \boldsymbol{\nu} \cdot \hat{\Sigma} d^2 r + \frac{\varepsilon'}{2} \mathrm{Re} \oint_s (\sigma/\tilde{\varepsilon})\mathbf{E} d^2 r + \int_V \tilde{\mathbf{F}}_p d^3 r = 0. \quad (14)$$

Поскольку нормаль внешняя, первый член слева — импульс поля, втекающий в частицу. Он расходуется на электрическую $\mathbf{F}_\varepsilon$ (поверхностный интеграл в (14)) и магнитную $\mathbf{F}_\mu$ (объемный интеграл) силы со стороны поля, действующие на частицу. Как видно, объемная плотность (13) может менять знак при изменении соотношений между реальными и мнимыми частями ДП. Также она меняет знак при изменении знака у μ'. Однако в оптике обычных сред и метаматериалов, описываемых локальными ДП, этот случай не реализуется [35]. Электрическая сила изменяет знак при изменении знака ε', что может реализовываться в плазме. Поскольку полный заряд на частице отсутствует, вклад второго члена в (13) в первом приближении есть сила, действующая на диполь. Дипольный момент единицы объема $\mathbf{P} = \varepsilon_0(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon)\mathbf{E}$. Для малой сферической частицы радиуса r дипольный момент равен $\mathbf{p} = 4\pi r^3 \varepsilon_0(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon)\mathbf{E}/3$. Частица изменяет поле, поэтому на нее воздействует локальное поле [14]

$$\mathbf{E}_l = \frac{3(\tilde{\varepsilon}/\varepsilon)}{2(\tilde{\varepsilon}/\varepsilon) + 1}\mathbf{E}. \quad (15)$$

Энергия диполя в поле $W_d = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_l$, и соответственно имеем силу

$$F_d = 2\pi^3 \varepsilon_0 \nabla |\mathbf{E}|^2 \mathrm{Re}\left(\frac{\tilde{\varepsilon}(\tilde{\varepsilon}/\varepsilon - 1)}{2(\tilde{\varepsilon}/\varepsilon) + 1}\right). \quad (16)$$

Сосредоточенная сила (16) оценивает второй поверхностный интеграл в (14). Мы усреднили ее за период. В плоской волне

$$|\mathbf{E}|^2 = |E_x|^2 \exp(-2k_z'' z),$$

и

$$\nabla |\mathbf{E}|^2 = -2k_z'' |E_x|^2 \exp(-2k_z'' z).$$

Для плоской волны имеем соотношения

$$\mathbf{E} = \mathbf{x}_0 E_x \exp(-ik_z z),$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{y}_0 \eta_0 E_x \exp(-ik_z z),$$

$$k_z = k_0 \sqrt{\varepsilon\mu},$$

$$\tilde{\mathbf{S}} = |E_x|^2 \eta_0 \eta,$$

$$\eta = \sqrt{\varepsilon/\mu},$$

при этом

$$k_z = k_0 \sqrt{\varepsilon\mu} = k_z' - ik_z'',$$

$$\eta = \sqrt{\varepsilon/\mu} = \eta' + i\eta',$$

$$k_z'=\pm k_0\times\sqrt{\frac{\sqrt{(\varepsilon'\mu'-\varepsilon''\mu'')^2+(\varepsilon'\mu''+\varepsilon''\mu'')^2}+(\varepsilon'\mu''+\varepsilon''\mu'')^2}{2}},$$

$$k_z''=\pm k_0\times\sqrt{\frac{\sqrt{(\varepsilon'\mu'-\varepsilon''\mu'')^2+(\varepsilon'\mu''+\varepsilon''\mu'')^2}-(\varepsilon'\mu''+\varepsilon''\mu'')}{2}}\geq 0,$$

$$\eta=\sqrt{(\varepsilon'\mu'+\varepsilon''\mu'')+i(\varepsilon'\mu''-\varepsilon''\mu')}/|\mu|=\eta'+i\eta',$$

$$\eta'=\sqrt{\frac{\sqrt{(\varepsilon'\mu'+\varepsilon''\mu'')^2+(\varepsilon'\mu''-\varepsilon''\mu')^2}+(\varepsilon'\mu'+\varepsilon''\mu'')}{2|\mu|^2}},$$

$$\eta''=\sqrt{\frac{\sqrt{(\varepsilon'\mu'+\varepsilon''\mu'')^2+(\varepsilon'\mu''-\varepsilon''\mu')^2}-(\varepsilon'\mu'+\varepsilon''\mu'')}{2|\mu|^2}}.$$

Знак „минус“ у k_z' следует брать, когда обе проницаемости имеют отрицательные действительные части. Для плоской волны в среде без диссипации

$$k_z=\pm k_0\sqrt{\varepsilon'\mu'},\qquad \tilde{\mathbf{S}}'=0,$$

$$\eta=\eta'=\sqrt{\varepsilon'/\mu'},$$

и магнитная сила принимает вид

$$\mathbf{F}_\mu=\omega c^{-2}\mu'\tilde{\varepsilon}''\int_V\tilde{\mathbf{S}}'d^3r. \qquad (17)$$

Поскольку $\nabla|\mathbf{E}|^2=0$, электрическая сила (16) отсутствует. Для среды Веселаго $k_z=-k_0$, т.е. не нужно вводить отрицательный ПП, но для выяснения знака у волновой проводимости надо вводить бесконечно малые потери:

$$\eta=\sqrt{\frac{\varepsilon'-i\delta_\varepsilon}{\mu'-i\delta_\mu}}=\sqrt{\frac{\varepsilon'\mu'+\delta_\varepsilon\delta_\mu-i(\varepsilon'\delta_\mu-\delta_\varepsilon\mu')}{\mu'^2+\delta_\mu^2}}=\sqrt{\frac{1+\delta_\varepsilon\delta_\mu+i(\delta_\mu-\delta_\varepsilon)}{1+\delta_\mu^2}}.$$

Комплексное число под корнем находится в первом квадранте, если магнитные потери больше электрических (первый случай). В противном втором случае (магнитные потери меньше электрических) точка находится в четвертом квадранте. Для однозначного извлечения корня надо привлекать физические соображения. В нашем случае это $\mathrm{Im}(\eta)<0$, или для импеданса $\mathrm{Im}(\eta^{-1})>0$. Обратные условия соответствуют активной среде. В первом случае η должно находиться в третьем квадранте комплексной плоскости, и при бесконечно малых потерях $\eta=-1$ (т.е. при превышении магнитных потерь над электрическими сила не меняет знак). Во втором случае $\eta=1$. В этом случае сила меняет знак. Для тела в виде слоя с толщиной t и с большой площадью S имеем

$$F_{z\mu}=\omega c^{-2}\mu'\tilde{\varepsilon}''SE_0^2\int_0^t\exp(-2k''z)dz\approx\omega c^{-2}\mu/\tilde{\varepsilon}''StE_0^2,$$

т.е. можно говорить о давлении $F_{z\mu}/S$. Нетрудно проверить, что при бесконечно малых потерях и условии $\mathrm{Re}(k_z)>0$ всегда $k_z=-k_0$. Взяв малую сферическую частицу, из (17) получим

$$\mathbf{F}_\mu=\pm 4\pi r^3\omega c^{-2}\tilde{\varepsilon}''|E_x|^2\eta_0/3,$$

где плюс соответствует первому случаю, а минус — второму. Для среды без потерь сила не определена.

Рассмотрим возможный подход к задаче при анизотропных средах. Любое тело, в том числе с тензорными ДП и МП (и даже бианизотропное), можно описать его токами поляризации в вакууме. Этот прием весьма плодотворен в плане получения соотношений на основе теоремы о балансе импульса [1], поскольку ТЭИ для вакуума известен. Подход позволяет определить силу, действующую на любое малое тело внутри большого тела, возбуждаемого заданными источниками, включая падающую из вакуума плоскую волну. Однако для тела произвольной формы необходимо решать объемные интегральные уравнения. Записав теорему, например, для однородного и толстого вдоль z слоя и удалив источники на бесконечность, получаем модель движения плоской волны при дифракции на слое. Постоянная распространения k_z волны определяется из уравнений Френеля четвертого порядка [37]. Задавая $k_x=k_y=0$, т.е. волну, движущуюся нормально к границе, и полагая для упрощения $\hat{\mu}=1$ (отсутствие магнитных свойств), получаем два решения

$$k_z=k_0\sqrt{\varepsilon_{xx}(\omega)}\quad\text{и}\quad k_z=k_0\sqrt{\varepsilon_{yy}(\omega)}$$

в зависимости от двух поляризаций волны. Здесь также для простоты считаем тензор приведенным к главным осям. Со стороны волны на среду действуют плотности силы Лоренца, связанные с плотностями тока поляризации. В случае рассмотренной поляризации это

$$J_{px}=i\omega\varepsilon_0(\varepsilon_{xx}(\omega)-1)E_x\quad\text{и}\quad E_{Lz}=\mu_0\mathrm{Re}(J_{zx}H_y^*)/2.$$

Используя уравнение Максвелла, имеем плотность силы

$$F_{Lz}=\varepsilon_0|E_x|^2\mathrm{Re}(ik_z^*(\varepsilon_{xx}(\omega)-1))/2.$$

Отсутствие диссипации приводит к отсутствию локальных плотностей таких сил. Плоская волна действует на слой, передавая ему импульс за счет отражения и за счет указанной локальной плотности. Полная сила всегда направлена от источника. Если внутри слоя находится малая частица с ДП $\tilde{\varepsilon}(\omega)$, задачу можно решить методом возмущений. Очевидно, характер силы будет определяться знаком величины

$$k'_x(\tilde{\varepsilon}''(\omega) - \varepsilon''_{xx}(\omega)) - k''_x(\tilde{\varepsilon}'(\omega) - \varepsilon'_{xx}(\omega)).$$

Сила может быть как притягивающая, так и отталкивающая. Эта сила действует относительно среды. Если среда хорошо прозрачна и $\tilde{\varepsilon}'(\omega) \approx \varepsilon'_{xx}(\omega)$, то отталкивание будет при $\tilde{\varepsilon}''(\omega) > \varepsilon''_{xx}(\omega)$ (частице передается больший импульс, чем аналогичному объему среды), а притяжение при $\tilde{\varepsilon}''(\omega) < \varepsilon''_{xx}\omega$.

Модель среды Веселаго и плазмы

Для более детального выяснения электродинамики волн в среде Веселаго следует рассмотреть модель такой среды. Единственная разумная модель, упомянутая в [1], но не рассмотренная там, это модель разреженной холодной плазмы электрических и магнитных монополей. Магнитный монополь, предсказанный Дираком в 1931 г., до сих пор не обнаружен, хотя попытки его обнаружения предпринимаются до настоящего времени. Например, в 2012 г. на детекторе MoEDAL большого адронного коллайдера проводились измерения на энергии столкновений 8 TeV, а в 2015 г. — на энергии столкновений 13 TeV. Существование магнитных монополей внесло бы симметрию в электродинамику. Оно образует условие квантования зарядов: элементарный (минимальный) магнитный заряд должен быть равен $g_\mu = \hbar c/(2e) = 137e/2$ в системе СГС (Гаусса), где размерность зарядов одинаковая. В системе СИ $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ K, $g = h/e$ в конвенции Вебера и $g_\mu = 2\pi\hbar c^2\varepsilon$ — в конвенции амперметра. Существование магнитных монополей не противоречит квантовой механике и электродинамике, поскольку все электрические заряды квантуются. Магнитные монополи взаимодействуют между собой по закону Кулона. Движущийся монополь создает электрическое поле и может взаимодействовать с электрическим зарядом. Условию квантования также подчиняются гипотетические частицы — дионы Швингера, имеющие как электрический, так и магнитный заряды. Если в начале координат находится дион с зарядами e_2 и g_2, а другой с массой m и зарядами e_1 и g_1 движется в точке $\mathbf{r}$ со скоростью $\mathbf{v}$, причем $v \ll c$, то на него действует сила [43,44]

$$\mathbf{F} = \frac{(e_1e_2 + g_1g_2)\mathbf{r} + (e_1g_2 - e_2g_1)\mathbf{v} \times \mathbf{r}/c}{r^3}. \qquad (18)$$

Это выражение записано в системе Гаусса, где заряды имеют одинаковую размерность. Поскольку $\mathbf{F} = md\mathbf{v}/dt$, то при $\mathbf{v} \perp \mathbf{r}$ получаем сохраняющийся момент количества движения $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} - (e_2g_2 - e_2g_1)\mathbf{r}/(cr)$, и условие его квантования $e_1g_2 - e_2g_1 = \nu\hbar c$. Аналогично рассматривая магнитный монополь в поле электрического заряда, имеем его уравнение движения

$$\mathbf{F}m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{g_1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{E} = -\frac{g_1e_2}{r^3c}\mathbf{v} \times \mathbf{r}. \qquad (19)$$

Сохраняющийся момент количества движения для уравнения (19) имеет вид

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} + e_2g\mathbf{r}/(cr),$$

и квантование дает $e_2g_1 = \nu\hbar c$. Квантование Дирака для монополя дает условие $eg = \nu\hbar c/2$, ν — целое.

Движущийся электрический заряд создает собственное магнитное поле, а движущийся магнитный монополь — собственное электрическое поле [43,44]. При нерелятивистских скоростях эти поля малы по сравнению с кулоновским в (19). В системе СИ сила Лоренца взаимодействия поля с монополями e и g в конвенции Вебера принимает вид

$$\mathbf{F}_L = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + g\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{\mu_0 c^2}\right) = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + g(\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}). \qquad (20)$$

Этот результат следует из закона сохранения импульса с электрическими и магнитными источниками. Для силы Лоренца (19), учитывая $\mathbf{E} = e_2\mathbf{r}/(4\pi\varepsilon_0 r^3)$, имеем $\mathbf{F_L} = -\frac{g_1e_2}{4\pi r^3}\mathbf{v} \times \mathbf{r}$. Здесь размерность магнитного монополя V·s. Для элементарных зарядов $g/e = h/e^2 = 2.56 \cdot 10^4\,\Omega$. Поле движущегося с произвольной скоростью магнитного монополя определяется так же, как поле движущегося электрического заряда [45]. Соответственно можно обобщить приведенные силы для произвольных скоростей. Мы рассматриваем плазму из электрических и магнитных монополей в поле слабой монохроматической электромагнитной волны. Если волна слабая, а ее частота достаточно высокая, заряды ускоряются в одном из направлений, а затем при изменении знака волны — в противоположном направлении. При этом максимальная скорость существенно ниже скорости света, особенно с увеличением частоты. Поэтому можно использовать приближение $v \ll c$. В этом приближении для обычной плазмы электрических зарядов имеем

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{\varepsilon p}^2}{\omega^2 - i\omega\omega_{\varepsilon c}}. \qquad (21)$$

Будем считать плазму электрически нейтральной, т. е. состоящей из тяжелых и легких электрических зарядов разных знаков. Тогда плазменная частота определяется в основном легкими зарядами и имеет вид $\omega_{\varepsilon p}^2 \approx N_\varepsilon e^2/(m_\varepsilon \varepsilon_0)$. Результат (21) получен в пренебрежении силой взаимодействия колеблющегося заряда с магнитным полем волны, которая мала по сравнению с электрической кулоновской силой. Учет такого взаимодействия приведет к ПД. Пусть теперь электрическая плазма дополнена нейтральной магнитной плазмой. Также можно написать уравнение

$$\mu(\omega) = 1 - \frac{\omega_{\mu p}^2}{\omega^2 - i\omega\omega_{\mu c}}. \qquad (22)$$

Здесь $\omega_{\mu o}^2 \approx N_\mu g^2/(m_\mu \mu_0)$. Движение монополей под действием волны приводит к дополнительным вкладам в поляризацию, создающим ПД, которыми мы пренебрегаем исходя из того, что плазма сильно разреженная, а скорости частиц малы. В этом случае и частотами столкновений $\omega_{\varepsilon c}$ и ω_μ можно пренебречь. Для рассмотренной холодной разреженной плазмы без ПД, как и для разреженного газа осцилляторов Лоренца, можно найти в замкнутой форме среднюю за период плотность энергии системы поле–вещество. В ней следует учесть энергию колебаний зарядов, и тогда формула приобретает вид $w = w_\varepsilon + w_\mu$, где [14]

$$w_\varepsilon = \left[1 + \frac{\omega_{\varepsilon p}^2}{(\omega^2 + \omega_{\varepsilon c}^2)}\right] \frac{\varepsilon_0 |E_0|^2}{4},$$

$$w_\mu = \left[1 + \frac{\omega_{\mu p}^2}{(\omega^2 + \omega_{\mu c}^2)}\right] \frac{\mu_0 |H_0|^2}{4}. \qquad (23)$$

Здесь приведены квадраты модулей амплитуд полей плоской волны. В плоской волне $H_0 = \eta\sqrt{\varepsilon/\mu}E_0$, поэтому

$$\frac{\mu_0 |H_0|^2}{4} = \frac{\varepsilon_0 |E_0|^2}{4} \left|\frac{\varepsilon}{\mu}\right|.$$

Но в плоской волне соотношения (23) справедливы в фиксированной точке. Если учесть затухание волны, следует ввести в квадраты модулей амплитуд множитель $\exp(-2k_z'' z)$. Поскольку

$$\tilde{S}_z' = \eta_0 |E_0|^2 \exp(-2k_z'' z) \mathrm{Re}(\sqrt{\varepsilon/\mu})/2,$$

можно определить скорость переноса энергии

$$v_e = \frac{\tilde{S}_z'}{w} = 2c \frac{\mathrm{Re}(\sqrt{\varepsilon'\mu})}{\left[1 + \frac{\omega_{\varepsilon p}^2}{(\omega^2+\omega_{\varepsilon c}^2)}\right] + \left[1 + \frac{\omega_{\mu p}^2}{(\omega^2+\omega_{\mu c}^2)}\right] \left|\frac{\varepsilon}{\mu}\right|}. \qquad (24)$$

Пусть концентрации частиц N_ε и N_μ таковы, что плазменные частоты совпадают. Пусть также совпадают частоты столкновений. Тогда $\varepsilon = \mu$, и $v_e = c/(1 + \omega_p^2/(\omega^2 + \omega_c^2))$. Скорость переноса энергии весьма мала на низких частотах, примерно равна $c/2$ в области плазменной частоты, а на высоких частотах стремится к c. Рассмотрим среду Веселаго $\varepsilon = \mu = -1$. Ее моделирует холодная бесстолкновительная димонопольная плазма при частоте $\omega = \omega_p/\sqrt{2}$. Получаем интересный результат: $v_e = c/3$. Его интерпретация такова: энергия системы поле–вещество полностью распределяется между кинетической энергией колебаний электрических частиц, магнитных частиц и энергией электромагнитного поля, но переносится полем только последняя третья часть. Что касается тензора Максвелла, то

$$\hat{\Sigma} = -\mathrm{R}e\left(\mu_0 \frac{\hat{I}\mathbf{H}^2 - 2\mathbf{H}\otimes\mathbf{H}^*}{4} + \varepsilon_0 \frac{\hat{I}\mathbf{E}^2 - 2\mathbf{E}\otimes\mathbf{E}^*}{4}\right),$$

т.е. он действительно меняет знак в „левой" среде, однако относительно направления движения фазы. В плоской волне

$$\hat{\Sigma}_{zz} = -\varepsilon_0 E_0^2 \mathrm{R}e(\varepsilon/\mu + 1)/4.$$

Здесь предположено, что начальная фаза амплитуды электрического поля нулевая. Для среды Веселаго $\hat{\Sigma}_{zz} = -\varepsilon_0 E_0^2/2$. Это вывод для безграничной среды. Скорость переноса импульса можно определить, если известна его плотность. В среде Веселаго импульс не должен передаваться от поля к веществу. Вектор Пойнтинга имеет компоненту $\tilde{S}_z' = \eta_0 E_0^2/2$. Поскольку импульс не передается среде, он может содержаться только в поле, т.е.

$$g = g_z^M = n^2 \tilde{S}'/c^2 = \eta_0 E_0^2/(2c^2).$$

Для решения вопроса о направлении движения импульса следует рассмотреть баланс импульса для падения плоской волны из вакуума на слой идеальной среды. Поскольку отражения от него нет и среде импульс не передается, в слой заходит вакуумная плотность $\eta_0 E_0^2/(2c^2)$. Она же из него и выходит. Хотя потоки на границах и меняют знак, меняют знак и нормали. Таким образом, скорость движения импульса $v_{mom} = c$. Она обусловлена, как и перенос энергии, только поляритонами поля. Фаза таких поляритонов движется противоположно, что отличает их от фотонов в вакууме. При дифракции сильно нестационарных коротких волновых пакетов на любом слое диспергирующей среды возникают существенные отличия. Любая среда характеризуется неким временем установления поляризации. Для плазмы это необходимое для запасания энергии кинетических колебаний время, и время действия квазимонохроматического пакета должно быть существенно больше.

Рассмотрим более привычную среду — нейтральную холодную электронно-ионную плазму. В ней $\mu = 1$. Электрическое поле волны ускоряет электроны, а магнитное поле передает им импульс. В диссипативной плазме этот импульс электроны передают тяжелым ионам. В целом есть передача импульса от поля веществу, которое приходит в движение. В обычных относительно слабых полях перенос импульса веществом дает ничтожный вклад по сравнению со скоростью переноса его полем. Обычно считают вещество неподвижным. В плазме без столкновений на одном полупериоде волна передает импульс электронам, а на другом — его забирает, поэтому импульс не накапливается в веществе, и оно в движение не приходит. Тогда плотность импульса можно определять по Абрагаму. Для плазмы $\hat{E}_{zz} = \varepsilon_0 \varepsilon' E_0^2$, т.е. имеет место изменение знака примерно на плазменной частоте. Ниже нее поток отрицательный, что имеет место, например, при распространении плазмонов вдоль поверхности металла при потоке энергии внутрь металла. Это относится к компоненте вектора Пойнтинга, направленной к границе раздела: ее поток в металле противоположен потоку в вакууме, и все потоки направлены к границе раздела [46]. Потоки же вдоль границы всегда однонаправленные, а плазмон всегда прямой. Для существования обратного плазмона необходим слой металла, в котором поток противоположен потоку в вакууме [46]. Для электронной плазмы

$$w = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}\left[1 + |\varepsilon|^2 + \frac{\omega_p^2}{(\omega^2+\omega_c^2)}\right], \tag{25}$$

$$\tilde{S}_z' = \nu_0 E_0^2 \mathrm{Re}(\sqrt{\varepsilon})/2. \tag{26}$$

Посмотрим, как эти формулы коррелируют с формулой Бриллюэна [14,47]. Имеем

$$\partial_\omega(\omega\varepsilon(\omega)) = 1 + \frac{\omega_p^2(1+i\omega_c/\omega)^2}{\omega^2(1+\omega_c^2/\omega^2)},$$

$$\mathrm{Re}(\partial_\omega(\omega\varepsilon(\omega))) = 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega^2+\omega_c^2)} - \frac{\omega_p^2\omega_c^2}{\omega^4(1+\omega_c^2/\omega^2)^2},$$

$$\partial_\omega(\omega\varepsilon'(\omega)) = 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega^2+\omega_c^2)} - \frac{2\omega_p^2\omega_c^2}{\omega^4(1+\omega_c^2/\omega^2)^2}.$$

При $\omega_c/\omega \ll 1$ обе формулы дают разные, но близкие к (25) результаты с точностью до ω_c (т.е. при достаточно высоких частотах), совпадающие при отсутствии потерь. При малой диссипации существенно ниже и существенно выше плазменной частоты имеем $\sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon'}(1 - i\varepsilon''/2\varepsilon')$. В первом случае имеем $\mathrm{Re}(\sqrt{\varepsilon}) \approx \varepsilon''/(2\sqrt{|\varepsilon'|})$. Во втором случае $\mathrm{Re}(\sqrt{\varepsilon}) \approx \sqrt{\varepsilon'}$. Первому случаю соответствует весьма малая скорость переноса энергии. Поток импульса определяется величиной $\hat{\Sigma}_{zz} = \varepsilon_0\varepsilon' E_0^2/2$. Она меняет знак при изменении знака ε'. Если взять $g_z^M = \eta_0\varepsilon' E_0^2/(2c^2)$, то получим скорость переноса импульса $v_{mpm} = c$. Если взять импульс по Абрагаму, получим $v_{mom} = c\varepsilon'$. Эта скорость обращается в нуль на частоте $\omega = \sqrt{\omega_p^2 - \omega_c^2}$ и на этой же частоте меняет знак. На высоких частотах она приближается к скорости света снизу. На сверхнизких частотах величина $\varepsilon' \approx -- \omega_p^2/\omega_c^2$ большая отрицательная, и скорость по величине может существенно превышать скорость света. Здесь следует отметить то, что при таких низких частотах нельзя пренебрегать потерями (поскольку $|\varepsilon''| \gg |\varepsilon'|$), поэтому формула Абрагама не применима. Если в области плазмоники $\omega_c \ll \omega < \omega_p$ колебательная энергия электронов может запасаться, то в области $\omega < \omega_c$ она не накапливается, а только диссипируется. Импульс же неподвижной средой не переносится, поэтому для его плотности следует принять $g^M = \eta_0\varepsilon'|\mathbf{E}|^2/(2c^2)$, а скорость переноса равной скорости света. В плазме есть сдвиг фаз между электрическим и магнитным полями, и при $\mathrm{Re}(\sqrt{\varepsilon}) = 0$ нет потока мощности, а при $\varepsilon' = 0$ нет потока и импульса.

Обратные потоки и отрицательное давление

Интересно отметить, что обратные потоки мощности и импульса в монохроматической волне есть не только в средах, существующих и гипотетических, но даже в вакууме. Для этого волна не должна быть плоской. Точнее говоря, волновой пучок должен быть поперечно ограниченным или даже неограниченным, но сильно убывающим в поперечном направлении. Вектор Пойнтинга при этом не образует ламинарный поток, а закручивается подобно линиям тока в турбулентной струе. В последнее время появилось много работ, в которых рассматриваются волновые пучки, включая оптические лазерные вихревые волновые пучки, имеющие обратные потоки энергии, в том числе и в вакууме [48–99]. В таких волновых пучках вектор Пойнтинга носит закрученный характер с возможностью обратного распространения энергии. Рассматривается движение энергии и импульса к источнику, в том числе и действие сил „притяжения“ к источнику или „отрицательного давления“ на наночастицу в таком потоке, возможность создания „оптических пинцетов“. В отличие от гипотетической бесконечной плоской электромагнитной волны такие волновые пучки могут иметь момент импульса поля и сингулярности потока $\tilde{\mathbf{S}}'$. Отрицательная действующая на наночастицу сила не обязательно соответствует отрицательному потоку. И наоборот, отрицательный поток не всегда дает отрицательную силу. Отрицательные потоки найдены в акустических пучках [100]. Они даже возможны в рентгеновских пучках [101]. В настоящее время исследуются монохроматические пучки с различными поперечными распределениями полей (в том числе и неограниченные): гауссовые, бесселевые, Эрмита—Гаусса, Лагерра—Гаусса. Поперечное ограничение или спадание интенсивности поля приводит к необходимости обратных потоков, поскольку соленоидальные силовые линии замкнуты. В большинстве работ рассматривают монохроматические волны. Такая волна предполагает бесконечное действие гармонически зависящих от времени источников. Переход к ней от нестационарного случая является нетривиальной задачей. Также нетривиальным является переход от динамики к статике. Примером служит нескончаемая со времен Пойнтинга дискуссия о том, существуют ли потоки электромагнитной энергии, импульса и момента импульса в статических полях, в том числе и потоки, циркулирующие по замкнутым траекториям. Все процессы в Природе в той или иной степени нестационарные и всегда когда-то начались. В квазистатике энергии квантов весьма малы, но для получения конечной энергии таких квантов весьма много. Воздействие волнового пакета в начальный момент сильно нестационарное, и тогда потоки в среднем положительные. Отрицательные потоки могут возникать при установлении квазимонохроматических процессов. Интересно, что такие потоки есть и в ближней зоне точечного диполя около сингулярности поля, если рассмотреть реальный вектор Пойнтинга $\mathbf{S} = \mathrm{Re}(\mathbf{E}) \times \mathrm{Re}(\mathbf{H})$, причем потоки колеблются во времени. Пусть p_z — момент тока диполя. Имеем [102]

$$E'_r = \frac{p_z \cos(\theta)}{2\pi\omega\varepsilon_0}\left[\frac{k_0\cos(k_0 r)}{r^2} - \frac{\sin(k_0 r)}{r^3}\right],$$

$$E'_\theta = \frac{p_z \sin(\theta)}{4\pi\omega\varepsilon_0}\left[\frac{k_0\cos(k_0 r)}{r^2} - \frac{\sin(k_0 r)(1-k_0^2 r^2)}{r^3}\right],$$

$$H'_\varphi = \frac{p_z \sin(\theta)}{4\pi\omega\varepsilon_0}\left[\frac{\cos(k_0, r)}{r^2} - \frac{k_0\sin(k_0 r)}{r^3}\right].$$

При этом $S_r = E'_\theta H'_\varphi$, $S_\theta = -E'_r H'_\varphi$. Средний за период поток равен нулю $\tilde{S}'_r = 0$. В дальней зоне фронт все более уплощается, и отрицательные потоки постепенно пропадают. Все поля можно разложить по плоским волнам. В одиночной плоской волне потоки всегда прямые. Интересно, однако, отметить, что еще в 1997 г. Б.З. Каценеленбаум обнаружил обратный поток вектора Пойнтинга в нескольких плоских волнах, движущихся под углами в разных направлениях [103].

Заключение

В заглавие работы вынесен вопрос об „отрицательном давлении". Однако при рассмотрении действия поля на частицу следует говорить не о давлении, а о силе, хотя термин „давление" более устоявшийся. О давлении следует говорить при действии плоской волны на границу раздела, или о стрикционном распределенном давлении на плоский слой вещества. О давлении также можно говорить, если фронт волны и поверхность, на которую он действует, локально плоские. Сила, действующая на частицу в диспергирующей среде, существенно зависит от соотношения диссипации в среде и в частице. Диссипация в среде приводит к передаче ей импульса и к локальной плотности сил. Отрицательная сила на частицу возникает тогда, когда переданный частице импульс меньше, чем импульс, передаваемый объему среды, равному объему частице. То есть это сила относительно среды. Если потерь в среде нет, то эта сила для плоской волны всегда положительная, т. е. направленная от источника.

Рассмотренные в работе вопросы связаны с идущей уже более ста десяти лет дискуссией о форме ТЭИ в электродинамике сплошных сред для системы поле–вещество [1–8,104–114]. Кроме форм ТЭИ Абрагама и Минковского, написанных для сред без дисперсии, есть ряд других форм, например Полевого-Рытова [115], Питаевского [116], канонический ТЭИ и т. п. Ряд форм рассмотрен в работах [108,109,112–114]. В работе [113] рассмотрены силы в средах с дисперсией, но без диссипации. ТЭИ в движущихся средах рассмотрен в работе [109].

Мы не будем здесь вдаваться в вопрос о правильности или неправильности тех или иных форм ТЭИ. Отметим только, что классическое поле действует на диспергирующую среду так, что ускоряет ее, при этом ТЭИ замкнутой системы поле–вещество должен быть симметричным, учитывать перенос энергии и импульса обеими подсистемами (полем и веществом) и учитывать их взаимодействие [117,118]. В слабых полях импульс поля мал, и среду обычно считают неподвижной, а процесс стационарным. В общем случае следует привлекать нестационарную электродинамику движущихся диспергирующих сред.

В электродинамике движущихся сред до сих пор используются соотношения Минковского [41,47], в которых дисперсия отсутствует. Замкнутой система может быть, только если учтены источники, создающие поле. Обычно рассматривают свободные волны в среде без источников. Для определения плотности энергии системы поле-вещество и плотности импульса следует рассматривать нестационарные процессы с созданием поля [39,40], при этом возможен разогрев и ускорение вещества, что усложняет рассмотрение.

Мы рассмотрели слабые не ускоряющие и не греющие вещество монохроматические поля. Для строгого получения плотности энергии и импульса в этом приближении следует рассмотреть переходный процесс создания квазимонохроматического поля в среде с дисперсией, диссипацией и с выходом его на заданные амплитуды монохроматического поля [39]. Такой волновой пакет при установлении колебаний со временем приобретает узкий мгновенный спектр $\Delta\omega \ll \omega_0$. Обычно используемая формула Бриллюэна для приближенной плотности энергии узкого волнового пакета в недиссипативной среде получена путем асимптотического разложения квазистационарного квадратичного интеграла в первом порядке по $\Delta\omega_0$ [47]. Тем же приемом получается и групповая скорость для узкого волнового пакета. Пренебрежение всеми другими порядками фактически при отсутствии потерь означает и отсутствие дисперсии. Это можно проследить на примере формулы дисперсии Лоренца с несколькими резонансными частотами: отсутствие потерь требует бесконечного раздвижения частот. Отметим, что в работе [113] рассматривались силы при действии волновых пакетов. Там показано, что на границах раздела ЛС и ПС в зависимости от их параметров возможно как „световое давление", так и „световое притяжение". Что касается утверждения работы [9] об отрицательном давлении на частицу в левой среде, то оно ошибочное: в плоской волне давление всегда направлено от источника поля. Отметим также, что строгое рассмотрение воздействия поля на среду возможно, если последняя описывается ее поляризацией относительно вакуума. Тогда уравнения Максвелла рассматриваются в вакууме, а среда описывается как вторичные источники поля в виде токов поляризации [1]. Такой подход приводит к силе Эйнштейна–Лауба [119]. Он наиболее просто применим к телам конечных объемов.

Использованный выше подход применим и к анизотропным средам, а также к средам с ПД, но требует отдельного сложного рассмотрения. Что касается гипотетической среды Веселаго, то ее существование было бы проблематично, даже если бы и существовали магнитные заряды. Разреженность и отсутствие ПД требуют малых концентраций и плазменных частот, т. е. и малых частот, на которых мог бы проявиться эффект.

Финансирование работы

Работа поддержана Министерством образования и науки РФ в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRR-2023-0008).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] М.В. Давидович. УФН, **180** (6), 623–638 (2010) [M.V. Davidovich. Phys. Usp., **53**, 595–609 (2010). DOI: 10.3367/UFNe.0180.201006e.0623].
[2] R.N.C. Pfeifer, T.A. Nieminen, N.R. Heckenberg, H. Rubinsztein-Dunlop. Phys. Rev. A, **79** (2), 023813 (2009). DOI: 10.1103/PhysRevA.79.023813
[3] H. Rubinsztein-Dunlop, T.A. Nieminen, M.E.J. Friese, N.R. Heckenberg. Advances in Quantum Chemistry, **30**, 469–492 (1998). DOI: 10.1016/S0065-3276(08)60523-7
[4] H.H. Brito. AIP Conference Proceedings, **458**, 994–1004 (1999). DOI: 10.1063/1.57710
[5] N.R. Heckenberg, M.E.J. Friese, T.A. Nieminen, H. Rubinsztein-Dunlop. In: *Optical Vortices (Horizons in World Physics 228)*, ed. by M. Vasnetsov and K. Staliunas (Nova Science Publishers, Commack, New York, 1999) pp. 75–105. DOI: 10.48550/arXiv.physics/0312007
[6] S. Antoci, L. Mihich. Nuovo Cim., B **115**, 77–88 (2000). DOI: 10.48550/arXiv.physics/9912010
[7] Y.N. Obukhov, F.W. Hehl. Phys. Rev., A, **311**, 277–284 (2003). DOI: 10.1016/S0375-9601(03)00503-6
[8] В.П. Макаров, А.А. Рухадзе. УФН, **179** (9), 995 (2009) [V.P. Makarov, A.A. Rukhadze. Phys. Usp., **52**, 937–943 (2009). DOI: 10.3367/UFNe.0179.200909e.0995].
[9] В.Г. Веселаго. УФН, **92** (3), 517 (1967). [V.G. Veselago. Sov. Phys. Usp., **10**, 509–514 (1968). DOI: 10.1070/PU1968v010n04ABEH003699].
[10] Р.А. Силин. *Периодические волноводы* (Фазис, М., 2002).
[11] М.В. Давидович. ЖЭТФ, **159** (2), 195–215 (2021) [M.V. Davidovich. JETP, **132** (2), 159–176 (2021). DOI: 10.1134/S1063776121020102].
[12] П.А. Белов, В.Н. Васильев, К.Р. Симовский. Научно-технический вестник ИТМО, **4** (16) 141–145 (2004).
[13] П.А. Белов, В.Н. Васильев, К.Р. Симовский, С.А. Третьяков. Радиотехника и электроника, **49** (11), 1285–1294 (2004). [P.A. Belov. K. Simovski, S.A. Tretyakov. J. Communications Technology and Electronics, **49** (11), 1199–1207 (2004)].
[14] А.И. Ахиезер, И.А. Ахиезер. *Электромагнетизм и электромагнитные волны* (Высшая школа, М., 1985).
[15] P.N. Prasad. *Nanophotonics* (John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey, 2004).
[16] P.W. Milonni. *Fast light, slow light and left-handed light* (CRC Press, Boca Raton, 2004).
[17] G.V. Eleftheriades, K.G. Balmain (Ed.). *Negative-refraction metamaterials: Fundamental Principles and Applications* (IEEE Press, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2005).
[18] C. Wenshan, V. Shalaev. *Optical Metamaterials: Fundamentals and Applications* (Springer, Dordrecht, Heidelberg, London, New York, 2009).
[19] Y. Hao. *FDTD Modeling of Metamaterials: Theory and Applications* (Artech, 2008).
[20] J.-M. Lourtioz, H. Benistry, V. Berger, J.-M. Gerard, D. Maystre, A. Tchelnokov. *Photonic Crystals. Towards Nanoscale Photonic Devices* (Springer, 2005).
[21] N. Engheta, R.W. Ziolkowski (Ed.). *Metamaterials: Physics and Engineering Explorations* (IEEE Press, A John Wiley & Sons, Inc., 2006).
[22] Z. Jaksic, N. Dalarsson, M. Maksimovic. Microwave Review, **6**, 36–49 (2006).
[23] C. Caloz, T. Itoh. *Electromagnetic Metamaterials: Transmission Line Theory and Microwave Applications* (John Wiley & Sons, Inc., N.Y., 2006).
[24] C. Caloz. In: *Microstrip and Printed Antennas: New Trends, Techniques and Applications*, ed. by D. Guha, Y.M.M. Antar (John Wiley & Sons, 2011), pp. 345–386.
[25] P. Markos, C.M. Soukoulis. *Wave Propagation: From Electrons to Photonic Crystals and Left-Handed Materials* (Princeton University Press, 2008).
[26] A.K. Sarychev, V.A. Shalaev. *Electrodynamics of Metamaterials* (World Scientivic Publishers Co. Pte. Ltd., Singapore, 2007).
[27] R. Marques, F. Martin, M. Sorolla. *Metamaterials with Negative Parameters: Theory, Design and Microwave Applications* (Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2008).
[28] L. Solymar, E. Shamonina. *Waves in Metamaterials* (Oxford University Press, 2009).
[29] 25. P. Markos, C.M. Soukoulis. *Wave Propagation: From Electrons to Photonic Crystals and Left-Handed Materials* (Princeton University Press, 2008).
[30] F. Capolino (Ed.). *Theory and Phenomena of Metamaterials* (CRC Press, Boca Raton, 2009).
[31] F. Capolino (Ed.). *Applications of Metamaterials* (CRC Press, Boca Raton, 2009).
[32] S. Zouhdi, A. Sihvola, A.P. Vinogradov. *Metamaterials and Plasmonics: Fundamentals, Modelling, Applications* (Springer, Dordrech, 2009).
[33] B.A. Munlc. *Metamaterials: Critique and Alternatives* (John Wiley, Hoboken, 2009).
[34] А.П. Виноградов, А.В. Дорофеенко, С. Зухди. УФН, **178**, 511–518 (2008). [A.P. Vinogradov, A.V. Dorofeenko, S. Zouhdi. Phys. Usp., **51**, 485–492 (2008). DOI: 10.1070/PU2008v051n05ABEH006533].
[35] К.Р. Симовский. Опт. и спектр., **107** (5) 766–793 (2009). [C.R. Simovski. Opt. Spectrosc. **107**, 726–753 (2009). DOI: 10.1134/S0030400X09110101].
[36] М.В. Рыбин, М.Ф. Лимонов. УФН, **189**, 881–898 (2019). [M.V. Rybin, M.F. Limonov. Phys. Usp., **62**, 823–838 (2019). DOI: 10.3367/UFNr.2019.03.038543].

[37] М.В. Давидович. УФН, **189** (12), 1249–1284 (2019). [M.V. Davidovich. Phys. Usp., **62**, 1173–1207 (2019). DOI: 10.3367/UFNe.2019.08.038643].

[38] М.В. Давидович. Известия Саратовского университета. Серия Физика, **11** (1), 42–47 (2011).

[39] М.В. Давидович. *Законы сохранения и плотности энергии и импульса электромагнитного поля в диспергирующей среде* (Изд-во Сарат. ун-та, Саратов, 2012).

[40] М.В. Давидович. *Законы сохранения и плотности энергии-импульса электромагнитного поля. Энергия, импульс и скорости их переноса квазифотонов в диспергирующей среде: Абрагама-Минковского контроверсия* (LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH, Saarbruken, Germany, 2012).

[41] М.В. Давидович. Квантовая электроника, **47** (6), 567–579 (2017) [M.V. Davidovich. Quantum Electronics, **47** (6), 567–579 (2017). DOI: 10.1070/QEL16272].

[42] Л.А. Вайнштейн. *Электромагнитные волны* (Радио и связь, М., 1988).

[43] J. Sjchwinger. Science, **165** (3895), 757–761 (1969). DOI: 10.1126/science.165.3895.757

[44] D.J. Griffiths. *Introduction to electrodynamics* (Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1999).

[45] Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. *Фейнмановские лекции по физике. Т. 6. Электродинамика* (Мир, М., 1966). [R.P. Feynman, R.B. Lrigton, M.W. Sands. *The Feynman Lectures on Physics* (Addison-Wesley Publishing Comp. Inc., Reading, Massachusetts, Palo Alto, London, 1964)].

[46] Д.Г. Баранов, А.П. Виноградов, К.Р. Симовский, И. Нефедов, С.А. Третьяков. ЖЭТФ, **141** (4), 650–658 (2012). [D.G. Baranov, A.P. Vinogradov, K.R. Simovskii, I. Nefedov, S.A. Tret'yakov. JETP, **114** (4), 568 (2012). DOI: 10.1134/S106377611202001X].

[47] Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. *Электродинамика сплошных сред* (Наука, М., 1982).

[48] В.В. Котляр, С.С. Стафеев, А.Г. Налимов, А.А. Ковалёв. Компьютерная оптика, **43** (5) 714–722 (2019). [V.V. Kotlyar1, S.S. Stafeev, A.G. Nalimov, A.A. Kovalev. Computer Optics, **43** (5) 714–722 (2019). DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-5-714-722].

[49] J.F. Nye, M.V. Berry. Proc. Royal Soc. London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, **336** (1605), 165–190 (1974). DOI: 10.1098/rspa.1974.0012

[50] K.T. Gahagan, G.A. Swartzlander. Opt. Lett., **21** (11), 827–829 (1996). DOI: 10.1364/ol.21.000827

[51] M. Gecevičius, R. Drevinskas, M. Beresna, P.G. Kazansky. Appl. Phys. Lett., **104** (23) 231110 (2014). DOI: 10.1063/1.4882418

[52] N.B. Simpson, K. Dholakia, L. Allen, M.J. Padgett. Opt. Lett., **22** (1), 52–54 (1997). DOI: 10.1364/OL.22.000052

[53] K. Volke-Sepulveda, V. GarcésChv́ez, S. Chávez-Cerda, J. Arlt, K. Dholakia. J. Optics B: Quantum and Semiclassical Optics, **4** (2), S82–S89 (2002).

[54] B. Thidé, H. Then, J. Sjöholm, K. Palmer, J. Bergman, T.D. Carozzi, Y.N. Istomin, N.H. Ibragimov, R. Khamitova. Phys. Rev. Lett., **99** (8), 087701 (2007). DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.087701

[55] A. Bandyopadhyay, R.P. Singh. Opt. Commun., **284** (1), 256–261 (2011). DOI: 10.1063/1.3635861

[56] A. Bandyopadhyay, S. Prabhakar, R.P. Singh. Phys. Lett., A **375** (19), 1926–1929 (2011). DOI: 10.1016/j.physleta.2011.03.044

[57] B.J. McMorran, A. Agrawal, I.M. Anderson, A.A. Herzing, H.J. Lezec, J.J. McClelland, J. Unguris. Science, **331** (6014), 192–195 (2011). DOI: 10.1126/science.1198804

[58] V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.G. Nalimov. Opt. Lett., **43** (12), 2921–2924 (2018). DOI: 10.1364/OL.43.002921

[59] V.V. Kotlyar, A.G. Nalimov, A.A. Kovalev. J. Optics, **20** (9), 095603 (2018). DOI: 10.1088/2040-8986/aad606

[60] V.V. Kotlyar, A.G. Nalimov, S.S. Stafeev. Laser Physics, **28** (12), 126203 (2018). DOI: 10.1088/1555-6611/aae02f

[61] V.V. Kotlyar, A.G. Nalimov. J. Optics, **20** (7), 075101 (2018). DOI: 10.1088/2040-8986/aac4b3

[62] B. Richards, E. Wolf. Proc. R. Soc., A **253** (1274) 358–379 (1959). DOI:10.1098/rspa.1959.0200

[63] G.P. Karman, M.W. Beijersbergen, A. van Duijl, J.P. Woerdman. Opt. Lett., **22** (9), 1503–1505 (1997). DOI: 10.1364/OL.22.001503

[64] M.V. Berry. J. Mod. Opt., **45** (9), 1845–1858 (1998). DOI: 10.1080/09500349808231706

[65] А.В. Воляр. Письма в ЖТФ, **26** (13), 71–78 (2000). [A.V. Volyar. Tech. Phys. Lett., **26** (7) 573–575 (2000)].

[66] A.V. Volyar, V.G. Shvedov, T.A. Fadeeva. Opt. Spectrosc., **90** (1), 93–100 (2001).

[67] М.В. Васнецов, В.Н. Горшков, И.Г. Мариенко, М.С. Соскин. Опт. и спектр., **88** (2), 298–303 (2000). [M.V. Vasnetsov, V.N. Gorshkov, I.G. Marienko, M.S. Soskin. Opt. Spectrosc., **88** (2) 260–265 (2000). DOI: 10.1134/1.626789].

[68] A.V. Novitsky, D.V. Novitsky. J. Opt. Soc. Am., A **24** (9), 2844–2849 (2007). DOI: 10.1364/JOSAA.24.002844

[69] S. Sukhov, A. Dogariu. Opt. Lett., **35** (22), 3847–3849 (2010). DOI: 10.1364/OL.35.003847

[70] C.W. Qiu, D. Palima, A. Novitsky, D. Gao, W. Ding, S.V. Zhukovsky, J. Gluckstad. Nanophotonics, **3** (3), 181–201 (2014). DOI: 10.1515/nanoph-2013-0055

[71] F.G. Mitri. J. Opt. Soc. Am., A **33** (9), 1661–1667 (2016). DOI: 10.1364/JOSAA.33.001661

[72] P. Vaveliuk, O. Martinez-Matos. Opt. Express, **20** (24), 26913–26921 (2012). DOI: 10.1364/OE.20.026913

[73] I. Ronón-Ojeda, F. Soto-Eguibar. Wave Motion, **78**, 176–184 (2018). DOI:10.1016/J.WAVEMOTI.2018.02.003

[74] M.V. Berry. J. Phys. A: Math. Theor., **43** (41), 415302 (2010). DOI: 10.1088/1751-8113/43/41/415302

[75] В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.Г. Налимов. Компьютерная оптика, **42** (3), 408–413 (2018). [V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.G. Nalimov. Computer Optics, **42** (3), 408–413 (2018). DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-3-408-413].

[76] В.В. Котляр, А.А. Ковалёв. Компьютерная оптика, **43** (1), 54–62 (2019). [V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev. Computer Optics, **43** (1), 54–62 (2019). DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-1-54-62].

[77] S.H. Tao, W.M. Lee, X.C. Yuan. Opt. Lett., **28**, 1867–1869 (2003). DOI: 10.1364/OL.28.001867

[78] A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs, A. Zeilinger. Nature, **412**, 313–316 (2001). DOI: 10.1038/35085529

[79] L. Chen, J. Lei, J. Romero. Light Sci. Appl., **3**, e153 (2014). DOI: 10.1038/lsa.2014.34

[80] J.C. Gutierrez-Vega, C. Lopez-Mariscal. J. Opt., A, **10**, 015009 (2008). DOI: 10.1088/1464-4258/10/01/015009

[81] F.G. Mitri. Opt. Lett., **36**, 606–608 (2011). DOI: 10.1364/OL.36.000606

[82] F.G. Mitri. Optik, **124**, 1469–1471 (2013). DOI: 10.1016/j.ijleo.2012.04.024
[83] F.G. Mitri. Phys. Rev., A, **88**, 035804 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevA.88.035804
[84] F.G. Mitri. IEEE Trans., AP, **59**, 4375–4379 (2011). DOI: 10.1109/TAP.2011.2164228
[85] F.G. Mitri. J. Quant. Spectr. Rad. Transfer, **182**, 172–179 (2016). DOI: 10.1016/j.jqsrt.2016.05.033
[86] F.G. Mitri. Phys. Rev., A, **85**, 025801 (2012). DOI: 10.1103/PhysRevA.85.025801
[87] F.G. Mitri. Eur. Phys. J., D, **67**, 1–9 (2013). DOI: 10.1140/epjd/e2013-40035-4
[88] S.R. Mishra. Opt. Commun., **85**, 159–161 (1991). DOI: 10.1016/0030-4018(91)90386-r
[89] F.G. Mitri. Opt. Lett., **36**, 766–768 (2011). DOI: 10.1364/OL.36.000766
[90] S.M. Block. Nature, **360**, 493–495 (1992). DOI: 10.1038/360493a0
[91] S.R. Wilk. Opt. Photon. News, **20** (11) 12–13 (2009).
[92] S. Sukhov, A. Dogariu. Opt. Lett., **35**, 3847–3849 (2010). DOI: 10.1364/OL.35.003847
[93] S.M. Barnett. J. Opt., B, **4** (7) (2002). DOI: 10.1088/1464-4266/4/2/361
[94] C. Lopez-Mariscal, D. Burnham, D. Rudd, D. McGloin, J.C. Gutierrez-Vega. Opt. Express, **16**, 11411–11422 (2008). DOI: 10.1364/OE.16.011411
[95] T. Cizmar, M. Siler, P. Zemanek. Appl. Phys., B, **84**, 197–203 (2006). DOI: 10.1007/s00340-006-2221-2
[96] I. Mokhun, R. Khrobatin, A. Mokhun, J. Viktorovskaya. Opt. Appl., **37**, 261–277 (2007). DOI: 10.1117/12.679903
[97] A.V. Novitsky, L.M. Barkovsky. Phys. Rev., A, **79**, 033821 (2009). DOI: 10.1103/PhysRevA.79.033821
[98] J. Chen, J. Ng, K. Ding, K.H. Fung, Z. Lin, C.T. Chan. Sci. Rep., **4**, 6386 (2014). DOI: 10.1038/srep06386
[99] Б.А. Князев, В.Г. Сербо. УФН, **188**, 508–539 (2018). [B.A. Knyazev, V.G. Serbo. Phys. Usp., **61**, 449–479 (2018). DOI: 10.3367/UFNe.2018.02.038306].
[100] G.T. Silva, T.P. Lobo, F.G. Mitri. Europhys. Lett., **97**, 54003 (2012). 10.1209/0295-5075/97/54003
[101] M.A. Salem, H. Bağcı. Opt. Express, **19** (9), 8526–8532 (2011). DOI: 10.1364/OE.19.008526
[102] Г.Т. Марков, А.Ф. Чаплин. *Возбуждение электромагнитных волн* (Радио и связь, М., 1983).
[103] Б.З. Каценеленбаум. Радиотехника и электроника, **42** (2), 133–134 (1997).
[104] В.Л. Гинзбург. УФН, **110** (2), 309–319 (1973). [V.L. Ginzburg. Sov. Phys. Usp., **16** 434–439 (1973). DOI: 10.1070/PU1973v016n03ABEH005193].
[105] Д.В. Скобельцин. УФН, **110** 253–292 (1973). [D.V. Skobel'tsyn. Sov. Phys. Usp., **16** 38–401 (1973). DOI: 10.1070/PU1973v016n03ABEH005188].
[106] В.Л. Гинзбург, В.А. Угаров. УФН, **118** (1), 175–188 (1976). [V.L. Ginzburg, V.A. Ugarov. Sov. Phys. Usp., **19**, 94–101 (1976). DOI: 10.1070/PU1976v019n01ABEH005127].
[107] В.И. Павлов. УФН, **124** (2), 345–349 (1978). [V.I. Pavlov. Sov. Phys. Usp., **21** (2), 171–173 (1978). DOI: 10.1070/PU1978v021n02ABEH005521].
[108] Y.N. Obukhov. Phys. Lett., A, **311**, 277–284 (2003). DOI:10.1016/S0375-9601(03)00503-6
[109] Y.N. Obukhov. Ann. Phys. (Berlin), **17** (9–10), 830–851 (2008). DOI: 10.1002/andp.200852009-1012
[110] V. Yannopapas, P.G. Galiatsatos. Phys. Rev., A, **77**, 043819 (2008). DOI: 10.1103/PhysRevA.77.043819
[111] В.П. Макаров, А.А. Рухадзе. УФН, **181**, 1357–1368 (2011). [V.P. Makarov, A.A. Rukhadze. Phys. Usp., **54**, 1285–1296 (2011). DOI: 10.3367/UFNe.0181.201112n.1357].
[112] A. Shevchenko, M. Kaivola. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **44**, 175401(1–7) (2011). DOI: 10.1088/0953-4075/44/17/175401
[113] И.Н. Топтыгин, К. Левина. УФН, **186**, 146–158 (2016). [I.N. Toptygin, K. Levina. Phys. Usp., **59**, 141–152 (2016). DOI: 10.3367/UFNe.0186.201602c.0146].
[114] Ю.А. Спиричев. УФН, **188**, 325–328 (2018). [Yu.A. Spirichev. Phys. Usp., **61**, 303–306 (2018). DOI: 10.3367/UFNe.2017.11.038255].
[115] В.Г. Полевой, С.М. Рытов. УФН, **125** 549–565 (1978). [V.G. Polevoi, S.M. Rytov. Sov. Phys. Usp., **21** 630–638 (1978). DOI: 10.1070/PU1978v021n07ABEH005668].
[116] Л.П. Питаевский. ЖЭТФ, **39**, 1450–1458 (1960). [L.P. Pitaevskii. Sov. Phys. JETP, **12**, 1008–1013 (1961)].
[117] В. Новаку. *Введение в электродинамику* (ИЛ, М., 1963). [Valer Novacu. *Introducere in electrodinamica. Teoriile Microscopică si Relativistă* (Editura Academiei Republicii Populare Romine, 1955)].
[118] К. Мёллер. *Теория относительности* (Атомиздат, М., 1975). [C. Møller. *The theory of relativity* (Clarendon Press, Oxford, 1972)].
[119] A. Einstein, J. Laub. Ann. Phys. (Leipzig), **26**, 541–550 (1908). DOI: 10.1002/andp.19083310807