Решение системы уравнений нелинейной электродинамики, минимально связанной с гравитацией, в аксиально симметричном случае

© Е.В. Галактионов

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: evgalakt@mail.ru

Поступило в Редакцию 11 мая 2023 г.
В окончательной редакции 26 августа 2023 г.
Принято к публикациии 30 октября 2023 г.

Основные свойства электромагнитных полей следуют из анализа регулярных решений системы уравнений нелинейной электродинамики, минимально связанной с гравитацией (NED-GR). Найдено представление для производной лагранжиана по инварианту поля, обеспечивающее совместность системы уравнений NED-GR, и получено точное решение этой системы уравнений. Приведены выражения для компонент элетромагнитного поля.

Ключевые слова: нелинейная электродинамика, условие совместности системы уравнений, компоненты электромагнитного поля.

DOI: 10.61011/JTF.2023.12.56799.f229-23

Введение

Электрически заряженные объекты, связанные электромагнитным и гравитационным взаимодействиями, описываются в общей постановке нелинейной электродинамикой, связанной с гравитацией (NED-GR). Нелинейная электродинамика (NED) была предложена Борном и Инфельдом в 1934 г. для того, чтобы рассматривать электромагнитное поле и частицы в пределах одной физической системы и обеспечивать конечные значения физических величин [1]. Эти цели достигнуты в NED-GR, которая допускает регулярные решения, описывающие компактные объекты конечной энергии, связанные электромагнитными и гравитационными взаимодействиями [2]. Подробный обзор литературы приведен в [2]. В работе [3] было установлено, что система уравнений NED-GR несовместна в случае произвольного лагранжиана.

В настоящей работе, во-первых, найдено аналитическое выражение для параметрической функции $L_F(r,\theta)$ (производной лагранжиана по инварианту поля), при которой система уравнений NED-GR совместна, во-вторых, получены точные решения этой системы для найденной функции.

1. Необходимое и достаточное условие совместности системы уравнений

Система уравнений NED-GR относительно двух компонент электромагнитного поля $F_{10}(r,\theta)$, $F_{20}(r,\theta)$ в аксиально симметричном случае имеет вид [3]:

$$\frac{\partial}{\partial r}\,[(r^2+a^2)\sin(\theta)L_F F_{10}] + \frac{\partial}{\partial \theta}\,[\sin(\theta)L_F F_{20}] = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\,[a\sin(\theta)L_F F_{10}] + \frac{\partial}{\partial \theta}\,[\frac{1}{a\sin(\theta)}L_F F_{20}] = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial F_{20}}{\partial r} - \frac{\partial F_{10}}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\,[a^2\sin^2(\theta)F_{10}] - \frac{\partial}{\partial r}\,[(r^2+a^2)F_{20}] = 0, \quad (3)$$

где a — это угловой импульс (параметр Керра), (r,θ) — координаты Бойера–Линдквиста (декартовы координаты x, y, z связаны с координатами Бойера–Линдквиста соотношениями $x^2+y^2=(r^2+a^2)\sin^2(\theta)$; $z = r\cos(\theta)$). Здесь $L_F(r,\theta)$ — искомая функция, играющая роль параметра. Уравнение, которому должна удовлетворять функция $L_F(r,\theta)$, чтобы обеспечить необходимое и достаточное условие совместности системы уравнений (1)–(3), имеет вид [3]:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{L_F}\,\frac{\partial L_F}{\partial \theta}\right)\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{L_F}\,\frac{\partial L_F}{\partial r}\right) + \frac{4a^2\sin^2(\theta)}{\Sigma^2}\,\frac{1}{L_F^2}$$

$$\times\left[r\,\frac{\partial L_F}{\partial r} + \cot(\theta)\,\frac{\partial L_F}{\partial \theta}\right]^2 = 0. \quad (4)$$

Здесь $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2(\theta)$. Если функция $L_F(r,\theta)$ дважды непрерывно дифференцируема, то сумма квадратов должна быть равна нулю, следовательно:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{L_F}\,\frac{\partial L_F}{\partial \theta}\right) = 0$$

и

$$r\,\frac{\partial L_F}{\partial r} + \cot(\theta)\,\frac{\partial L_F}{\partial \theta} = 0$$

одновременно. Решая систему этих уравнений, находим общее решение уравнения (4)

$$L_F(r,\theta) = C_0\big(r\cos(\theta)\big)^{\mu}, \quad (5)$$

где C_0, μ — произвольные вещественные числа. Таким образом, система уравнений (1)–(3) совместна тогда и только тогда, когда параметрическая функция L_F имеет вид (5). В дальнейшем работаем только с совместной системой.

2. Нахождение точного решения системы

Введем обозначения $U_{10} = L_F F_{10}$, $U_{20} = L_F F_{20}$. С учетом этих обозначений, система уравнений (1), (2) может быть приведена к следующему виду:

$$U_{10} = \frac{1}{2a^2 r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\Sigma}{\sin(\theta)} U_{20}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left\{\frac{1}{\sin(\theta)}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Sigma}{r} U_{20}\right) + 2U_{20}\right]\right\} = 0. \qquad (6)$$

Общее решение второго уравнения (6) можно записать в виде

$$U_{20}(r, \theta) = \frac{r}{\Sigma^2}\left[\Psi(\theta) + \sin(\theta) \int \Phi(r)\Sigma(r, \theta) dr\right], \qquad (7)$$

где $\Phi(r)$ — произвольная функция r, $\Psi(\theta)$ — произвольная функция θ. Систему уравнений (3) можно привести к виду

$$F_{10} = \frac{1}{a^2 \sin(2\theta)} \frac{\partial}{\partial r}\big(\Sigma F_{20}\big),$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\Sigma}{\sin(2\theta)} F_{20}\right) - a^2 F_{20}\right\} = 0. \qquad (8)$$

Перейдем в уравнениях (8) к функциям U_{10}, U_{20} и будем считать, что функция L_F имеет вид (5), тогда первое из уравнений (8) можно записать как

$$U_{10} = \frac{1}{a^2 \sin(2\theta)}\left[\frac{\partial}{\partial r}\Big(\Sigma U_{20}\Big) - \mu \frac{\Sigma}{r} U_{20}\right].$$

С другой стороны, функция U_{10} удовлетворяет первому из уравнений (6). Приравнивая эти два выражения, получаем первое дополнительное уравнение, которому должна удовлетворять функция U_{20}, являющаяся решением системы (1), (2):

$$r \frac{\partial}{\partial r}\big(\Sigma U_{20}\big) - \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\Sigma}{\sin(\theta)} U_{20}\right) = \mu \Sigma U_{20}. \qquad (9)$$

Второе из уравнений (8) после перехода к функции U_{20} и с учетом (5) дает второе дополнительное уравнение для нахождения функции $U_{20}(r, \theta)$. Это уравнение после упрощения примет вид

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{r \frac{\partial}{\partial r}\big(\Sigma U_{20}\big) + (r^2 - a^2\cos^2(\theta) - \mu\Sigma) U_{20}\right\}$$

$$- \mu \frac{r^2 - a^2\cos^2(\theta)}{r} U_{20} = 0. \qquad (10)$$

Итак, есть два дополнительных уравнения (9) и (10), которым должна удовлетворять функция U_{20}. Эта функция, как общее решение второго уравнения (6), зависит от двух произвольных функций $\Phi(r)$, $\Psi(\theta)$ (выражение (7)). Подставив представление (7) во второе дополнительное уравнение (10), получим (в предположении $\sin(\theta) \neq 0$) линейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для нахождения функции $\Phi(r)$ следующего вида:

$$\frac{d}{dr}\big(r^2\Phi(r)\big) - \mu r \Phi(r) = 0.$$

Его общее решение будет иметь вид

$$\Phi(r) = D_1 r^{\mu - 2},$$

где D_1 — произвольная постоянная. Подставив (7) в первое дополнительное уравнение (9), получим интегро-дифференциальное уравнение относительно функций $\Phi(r)$ и $\Psi(\theta)$ с параметром μ следующего вида:

$$\Psi'(\theta) + [(1+\mu)\tan(\theta) - \cot(\theta)]\Psi(\theta) = \sin(\theta)\tan(\theta)$$

$$\times \left[r^3\Phi(r) - (1+\mu)\int \Phi(r) r^2 dr\right] + a^2 \sin^2(\theta)\cos(\theta)$$

$$\times \left[(1-\mu)\int \Phi(r) dr + r\Phi(r)\right]. \qquad (11)$$

Подставим найденную функцию $\Phi(r)$ в правую часть уравнения (11). Пусть $\mu \neq \pm 1$, тогда

$$\int \Phi(r) dr = D_1 \frac{r^{\mu-1}}{\mu - 1}, \qquad \int \Phi(r) r^2 dr = D_1 \frac{r^{\mu+1}}{\mu + 1},$$

правая часть уравнения (11) обратится в нуль, и уравнение (11) примет вид

$$\Psi'(\theta) + [(1+\mu)\tan(\theta) - \cot(\theta)]\,\Psi(\theta) = 0. \qquad (12)$$

Общее решение этого уравнения

$$\Psi(\theta) = D_2 \sin(2\theta)\big(\cos(\theta)\big)^{\mu}, \qquad (13)$$

где D_2 — произвольная постоянная. Таким образом, в случае $\mu \neq \pm 1$ формула (13) дает $\Psi(\theta)$, а $\Phi(r) = D_1 r^{\mu-2}$.

Пусть $\mu = +1$, тогда

$$\Phi(r) = D_1 r^{-1},$$

$$\int \Phi(r) dr = D_1 \ln(r), \qquad \int \Phi(r) r^2 dr = 0.5 D_1 r^2,$$

а уравнение (11) приобретает следующий вид:

$$\Psi'(\theta) + [2\tan(\theta) - \cot(\theta)]\,\Psi(\theta) = D_1 a^2 \sin^2(\theta)\cos(\theta).$$

Его общее решение

$$\Psi(\theta) = \sin(2\theta)\cos(\theta)\big\{D_2 - 0.5\, D_1 a^2 \ln|\cos(\theta)|\big\}. \qquad (14)$$

Таким образом, в случае $\mu = +1$ формула (14) дает $\Psi(\theta)$, а $\Phi(r) = D_1 r^{-1}$.

Пусть $\mu = -1$, тогда

$$\Phi(r) = D_1\, r^{-3},$$

$$\int \Phi(r)dr = -0.5\, D_1(r)^{-2}, \quad \int \Phi(r) r^2 dr = D_1 \ln(r),$$

а уравнение (11) приобретает следующий вид:

$$\Psi'(\theta) - \cot(\theta)\Psi(\theta) = D_1 \sin(\theta)\tan(\theta).$$

Его общее решение

$$\Psi(\theta) = \sin(\theta)\big\{2D_2 - D_1 \ln|\cos(\theta)|\big\}. \tag{15}$$

Таким образом, в случае $\mu = -1$ имеем $\Phi(r) = D_1 r^{-3}$, а $\Psi(\theta)$ дает выражение (15).

После того, как найдены функции $\Phi(r)$ и $\Psi(\theta)$, можно найти функцию U_{20} по формуле (7), U_{10} — по первой из формул (6), а далее найти компоненты электромагнитного поля $F_{10}(r,\theta)$, $F_{20}(r,\theta)$.

В результате получаем:

компоненты поля в случае $\mu \neq \pm 1$:

$$F_{10}(r,\theta) = -D_1 \frac{2r\cos(\theta)}{(\mu^2-1)\Sigma^2}\big(\cos(\theta)\big)^{-\mu} - D_2 \frac{r^2 - a^2\cos^2(\theta) + \mu\Sigma}{a^2\Sigma^2}(r)^{-\mu},$$

$$F_{20}(r,\theta) = -D_1 \frac{\sin(\theta)}{(\mu^2-1)\Sigma^2}\big\{r^2 - a^2\cos^2(\theta) - \mu\Sigma\big\} \times \big(\cos(\theta)\big)^{-\mu} + D_2 \frac{r\sin(2\theta)}{\Sigma^2}(r)^{-\mu}.$$

В частности, для случая $\mu = 0$, будем иметь в отличие от результата, приведенного в [4]:

$$F_{10} = D_1 \frac{2r\cos(\theta)}{\Sigma^2} - D_2 \frac{r^2 - a^2\cos^2(\theta)}{a^2\Sigma^2},$$

$$F_{20} = D_1 \frac{\sin(\theta)(r^2 - a^2\cos^2(\theta))}{\Sigma^2} + D_2 \frac{r\sin(2\theta)}{\Sigma^2}.$$

При $D_1 = 0$, $D_2 = -qa^2$ получим известное решение [4].

В случае $\mu = +1$:

$$F_{10}(r,\theta) = D_1 \frac{1}{2r\Sigma^2}\left\{2r^2 + a^2\cos^2(\theta) - 2r^2 \ln\left(\frac{r}{|\cos(\theta)|}\right)\right\} - D_2 \frac{2r}{a^2\Sigma^2},$$

$$F_{20}(r,\theta) = D_1 \frac{\tan(\theta)}{\Sigma^2}\left\{0.5r^2 + a^2\cos^2(\theta)\ln\left(\frac{r}{|\cos(\theta)|}\right)\right\} + D_2 \frac{\sin(2\theta)}{\Sigma^2}.$$

И, наконец, в случае $\mu = -1$:

$$F_{10}(r,\theta) = D_1 \frac{r}{2a^2\Sigma^2}\left\{r^2 + 2a^2\cos^2(\theta) + 2a^2\cos^2(\theta) \times \ln\left(\frac{r}{|\cos(\theta)|}\right)\right\} + D_2 \frac{2r\cos^2(\theta)}{\Sigma^2},$$

$$F_{20}(r,\theta) = D_1 \frac{0.5r^2\sin(2\theta)}{\Sigma^2}\left\{-0.5a^2\cos^2(\theta)r^{-2} + \ln\left(\frac{r}{|\cos(\theta)|}\right)\right\} + D_2 \frac{r^2\sin(2\theta)}{\Sigma^2}.$$

Заключение

В работе получено аналитическое выражение для производной лагранжиана по инварианту поля, обеспечивающее выполнение необходимых и достаточных условий совместности системы уравнений NED-GR. Для найденной функции $L_F(r,\theta)$ получено точное решение этой системы уравнений.

Приведены аналитические выражения для компонент электромагнитного поля, которые открывают возможности для изучения их поведения при различных значениях параметра μ, определяющего вид параметрической функции $L_F(r,\theta)$. Представляет несомненный интерес исследование асимптотического поведения полученных решений при $r \to 0$ и $r \to \infty$, так, например, асимптотика при $r \to 0$ позволит выявить особенности электромагнитной динамики на вакуумном диске де Ситтера. Более детальный анализ этих вопросов составит предмет дальнейших исследований.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] M. Born, L. Infeld. Proc. R. Soc. London A, **144** (852), 425 (1934). DOI: 10.1098/rspa.1934.0059

[2] I. Dymnikova. Particles, **4** (2), 129 (2021). DOI: 10.3390/particles4020013

[3] I.G. Dymnikova, E.V. Galaktionov. Class. Quantum Grav., **32** (16), 165015 (2015). DOI: 10.1088/0264-9381/32/16/165015

[4] I. Dymnikova. Phys. Lett. B, **639** (3–4), 368 (2006). DOI: 10.1016/j.physletb.2006.