

Математическое моделирование рефракции света в несимметричном поле тяготения

© Д.С. Лукьянцев, Н.Т. Афанасьев, А.Б. Танаев

Иркутский государственный университет,
664003 Иркутск, Россия
e-mail: smeofs1997@mail.ru, spacemaklay@gmail.com, tanaev.ab@yandex.ru

Поступило в Редакцию 29 апреля 2023 г.
В окончательной редакции 3 сентября 2023 г.
Принято к публикации 30 октября 2023 г.

Предложен аппарат математического моделирования траекторных характеристик света при распространении в гравитационном поле группы астрофизических объектов. Влияние гравитации учтено путем введения эффективного показателя преломления вакуума. Показано, что при несимметричном поле тяготения формируется сложная пространственная структура света в картинной плоскости наблюдателя. Сделана оценка пространственного ослабления потока энергии света путем суммирования удельных энергетических порций лучей и посредством расчета лучевой расходимости. Проведено сравнение результатов лучевого и парциального моделирования светового потока в поле тяготения различной конфигурации.

Ключевые слова: рефракция света, астрофизические объекты, геометрическая оптика, гравитационное линзирование.

DOI: 10.61011/JTF.2023.12.56811.f248-23

Введение

Из общей теории относительности следует [1–3], что распространение света в искривленном (римановом) пространстве можно рассматривать как задачу о волнах в евклидовом пространстве, если учесть, что гравитационное поле определенным образом изменяет показатель преломления вакуума. Поскольку пространственные масштабы модифицированного показателя преломления велики по сравнению с длиной световой волны, расчет характеристик света в поле тяготения астрофизических объектов можно выполнить в приближении геометрической оптики [4]. Для простых гравитационных объектов реальные лучевые траектории волн можно заменить их асимптотами [1,2]. Однако в случае группы объектов метод асимптотического представления траекторий лучей недостаточно точен, и для интерпретации данных измерений астрофизических прецизионных инструментов нового поколения необходим расчет истинных траекторий.

1. Аппарат математического моделирования

Геометрооптический расчет направления распространения света в гравитационном поле группы астрофизических объектов проводился в диапазоне угловых целевых параметров α_n, β_n на основе системы лучевых

дифференциальных уравнений в сферическом случае [4]:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\varphi} &= R \cot \beta, \\ \frac{d\beta}{d\varphi} &= (1 + \sin^2 \beta \tan^2 \alpha) \left(\frac{1}{n} \left(\frac{\partial n}{\partial \varphi} \cot \beta - R \frac{\partial n}{\partial R} \right) - 1 \right), \\ \frac{d\delta}{d\varphi} &= \tan \alpha, \\ \frac{d\alpha}{d\varphi} &= (1 + \cos^2 \alpha \cot^2 \beta) \left(\frac{\partial n}{\partial \delta} - \frac{\partial n}{\partial \varphi} \tan \alpha \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где R, δ, φ — соответственно радиальная и угловые координаты луча; α, β — углы рефракции луча; n — эффективный показатель преломления вакуума с учетом влияния гравитационного поля. Как известно [3], эффективный показатель преломления вакуума можно выразить через гравитационный потенциал. В частности, для слабых гравитационных полей имеем: $n \approx 1 - 2\Phi(\mathbf{R})/c^2$ где $\Phi(\mathbf{R})$ — потенциал тяготения, c — скорость света. В общем случае потенциал $\Phi(\mathbf{R})$, создаваемый произвольным распределением массы, является решением уравнения Пуассона [1]:

$$\Phi(\mathbf{R}) = -G \iiint \frac{\sigma(\mathbf{r})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r},$$

где $\sigma(\mathbf{r})$ — плотность распределения массы, G — гравитационная постоянная. Для одиночного астрофизического объекта массой M , когда $\sigma(\mathbf{r}) = \text{const}$, потенциал имеет простой вид: $\Phi(R) = -GM/R$. В этом случае для эффективного показателя преломления следует: $n = 1 + R_g/R$ где $R_g = 2GM/c^2$ — гравитационный радиус объекта. Задавая различные функции распределения

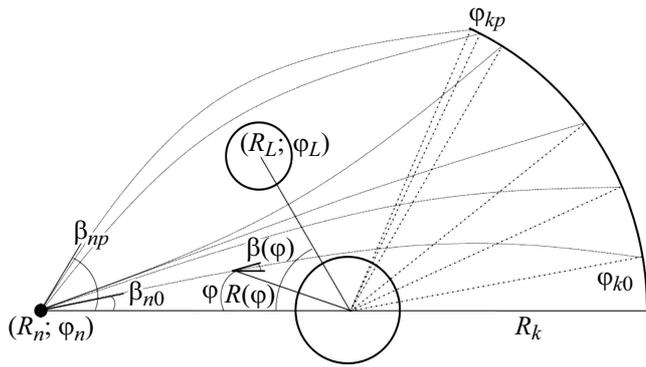


Рис. 1. Геометрия задачи. Вид сбоку. (R_n, φ_n) — координаты источника излучения относительно центра основного гравитационного объекта; R_k — расстояние до картинной плоскости наблюдателя; (R_L, φ_L) — координаты дополнительного гравитационного объекта; $[\beta_{n0}, \beta_{np}]$ — диапазон начальных углов излучения; $[\varphi_{k0}, \varphi_{kp}]$ — диапазон угловых координат лучей, приходящих в картинную плоскость наблюдателя.

$\sigma(\mathbf{r})$, с помощью численного интегрирования уравнения Пуассона можно рассчитать эффективный показатель преломления вакуума в поле тяготения группы астрофизических объектов. Между тем, можно ввести приближенную модель эффективного показателя преломления, наиболее просто учитывающую непрерывность и локальность воздействия гравитационных объектов на кривизну пространства, полагая аддитивность вкладов гравитации от различных объектов в общее гравитационное поле:

$$n(R, \varphi, \delta) = 1 + R_g/R + \sum_{i=1}^N A_i \exp[-b_{\varphi i}(\varphi - \varphi_{Li})^2 - b_{\delta i}(\delta - \delta_{Li})^2 - b_{Ri}(R - R_{Li})^2], \quad (2)$$

где R_g — гравитационный радиус основного объекта; N — количество дополнительных объектов; $A_i, \varphi_{Li}, \delta_{Li}, R_{Li}, b_{\varphi i}, b_{\delta i}, b_{Ri}$ — соответственно доля вклада, координаты локализации и масштабы возмущения показателя преломления, вызванного i -м астрофизическим объектом. Геометрия задачи показана на рис. 1.

Для расчета групповой задержки света τ было получено уравнение

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = \frac{R}{cn \sin \beta} \sqrt{1 + \sin^2 \beta \tan^2 \alpha}. \quad (3)$$

Совместное решение уравнений (1) и (3) позволяет определить групповую задержку и направление распространения света в евклидовом пространстве с эффективным показателем преломления (2). Расчет лучевой расходимости света в искривленном римановом пространстве относительно светового поля в пространстве Евклида проводился на основе результатов интегрирования присоединенной к (1) системы уравнений для производных по начальным параметрам задачи от решений

уравнения (1). В частности, в случае несимметричного поля тяготения при $\alpha_n = 0$ для фактора фокусировки имеем:

$$I = \log_{10} \left| \frac{\sin \beta_n R_0(\varphi_0) \varphi_0}{\sin \varphi \sin \beta(\varphi) R(\varphi) R'_{\beta_n}} \right|,$$

где $R_0(\varphi_0), \varphi_0$ — радиальная и угловая координаты луча в евклидовом пространстве вакуума; $R'_{\beta_n} = \partial R / \partial \beta_n$.

2. Результаты расчетов и их обсуждение

На рис. 2, 3 приведены результаты расчетов траекторий, групповой задержки и ослабления потока энергии света с использованием модели (2) при $\delta_n = \delta(\varphi = 0) = 0, \alpha_n = 0, R_n = 50 \text{ cul}, R_k = 50 \text{ cul}$, где cul — условная единица длины, R_k — расстояние до картинной плоскости. Прицельный параметр β_n изменялся в диапазоне $[-0.314; -0.114]$ rad с шагом 0.0025 rad , $R_g = 1 \text{ cul}, A_1 = 0.5, R_{L1} = 10 \text{ cul}, \varphi_{L1} = 0.4, \delta_{L1} = 0.0; A_2 = 0.5, R_{L2} = 10 \text{ cul}, \varphi_{L2} = 0.6, \delta_{L2} = 0.0, b_{\varphi 1} = 1.23, b_{\delta 1} = 0.0, b_{R1} = 1.23 \text{ cul}^{-2}; b_{\varphi 2} = 1.23, b_{\delta 2} = 0.0, b_{R2} = 1.23 \text{ cul}^{-2}$. На рис. 2 представлены траектории и групповые задержки света в гравитационном поле трех астрофизических объектов. Из рис. 2, а следует, что появление на пути распространения света группы объектов приводит к значительным искажениям траекторий. Осцилляции траекторий связаны с распространением света в гравитационном волноводе, образующемся под воздействием полей тяготения объектов. Проникновение света в волноводный канал приводит к увеличению пути распространения. Также можно заметить сгущение траекторий, приводящее к фокусировке света. Эффекты гравитации проявляются и в групповой задержке света для некоторых значений углового прицельного параметра β_n , в частности для лучей, попавших в волновод (рис. 2, сектор углов $\varphi \in [3.0; 3.5] \text{ rad}$). Результаты моделирования лучевой расходимости света представлены на рис. 3, а. В несимметричном гравитационном поле возникает сложная картина пространственного ослабления света. Значительное возрастание фактора фокусировки при некоторых прицельных угловых параметрах β_n обусловлено линзированием света в гравитационном поле. Различное количество секторов возрастных фактора фокусировки связано с влиянием одного или нескольких объектов на распространение света в поле тяготения.

Оценить ослабление света в окрестности наблюдателя можно и с помощью парциального подхода. Полагалось, что мощность излученного источником поля $U_0 = 1 \text{ cuwf}$, где cuwf — условная единица измерения. Тогда значение мощности в каждой точке картинной плоскости равнялось сумме порций $U = \sum U_0/p \text{ cuwf}$, где p — количество лучей. Результаты расчетов представлены на рис. 3, б. Можно отметить, что в распределении мощности в диапазонах углов $\varphi_k \in [2.6; 2.8] \text{ rad}$ и $[3.0; 3.2] \text{ rad}$

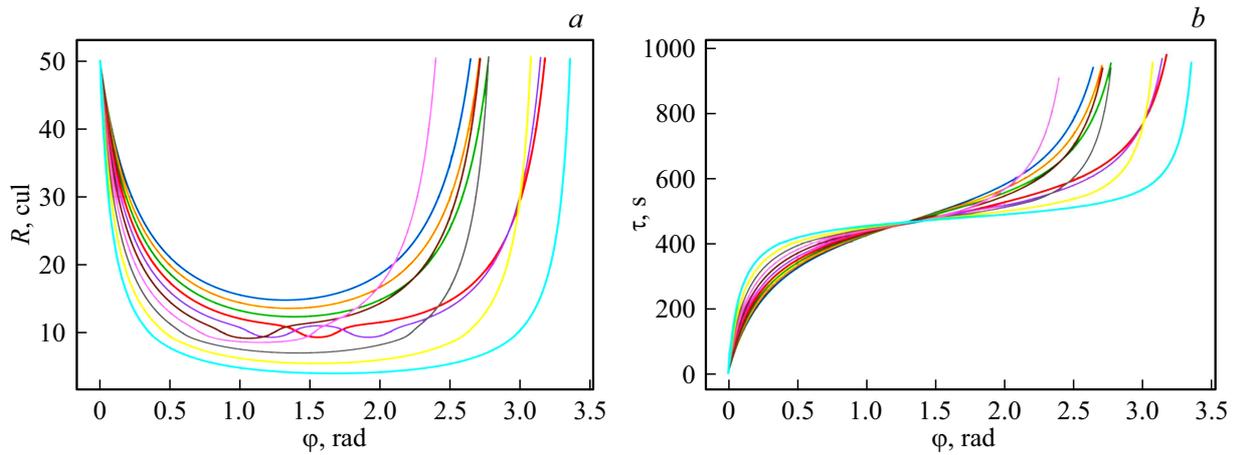


Рис. 2. Траектории (a) и групповые задержки (b) света поля тяготения трех объектов.

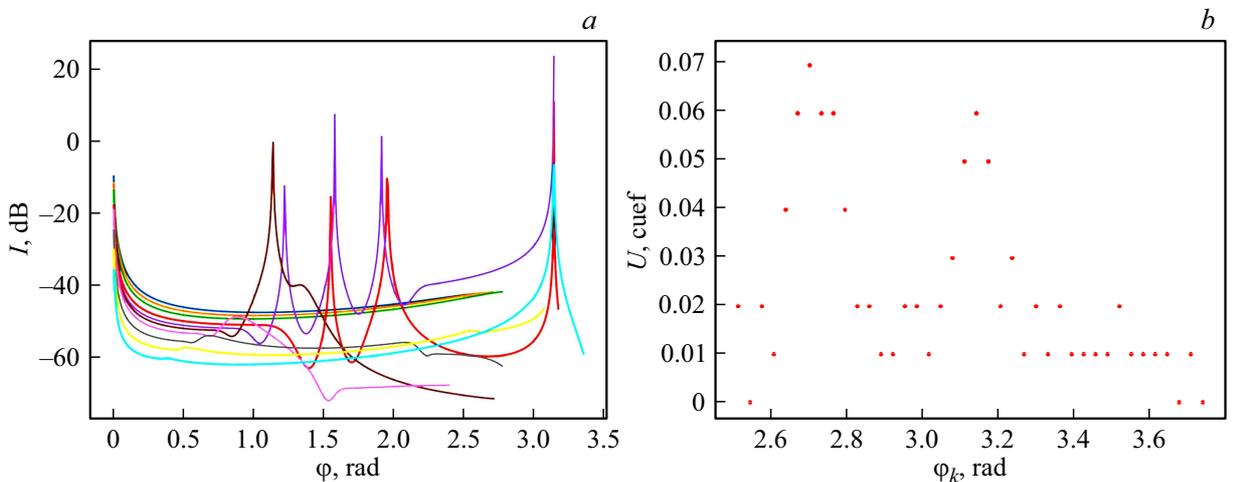


Рис. 3. Фактор фокусировки (a) и относительная мощность (b) света при распространении в несимметричном гравитационном поле.

формируются два пика. Под влиянием одного гравитационного объекта длина пути распространения света уменьшается, а для гравитационного волновода — возрастает. Таким образом, с помощью парциального подхода можно получить распределение энергии света в окрестности наблюдателя и оценить значение мощности в областях фокусировки.

Заключение

На основе лучевого приближения предложен аппарат математического моделирования рефракционных характеристик света в гравитационном поле группы астрофизических объектов. Влияние гравитации учтено путем использования эффективного показателя преломления вакуума. Предложена приближенная модель показателя преломления, учитывающая локальность и непрерывность воздействия гравитационных объектов на кривизну пространства. Показано, что в зависимости от кон-

фигурации гравитационного поля формируется сложная пространственная структура света в картинной плоскости наблюдателя. Сделана оценка пространственного ослабления потока энергии света на основе расчета лучевой расходимости и с помощью парциального суммирования лучей в области гравитационной фокусировки.

Финансирование работы

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проекты FZZE-2020-0024, FZZE-2023-0004), с использованием УНУ „Астрофизический комплекс МГУ-ИГУ“ (договор ЕВ-075-15-2021-675).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] П.В. Блюх, А.А. Минаков. *Гравитационные линзы* (Наукова думка, Киев, 1989)
- [2] А.Ф. Захаров. *Гравитационные линзы и микролинзы* (Янус-К, М., 1997)
- [3] А.М. Волков, А.А. Изместьев, Г.В. Скороцкий. *ЖЭТФ*, **59** (10), 1254 (1970).
- [4] Yu.A. Kravtsov, Yu.I. Orlov. *Geometrical Optics of Inhomogeneous Medium* (Springer-Verlag, Berlin, 1990)