

Изучение устойчивости неоднородных стационарных решений у диода с электрон-позитронной плазмой

© Л.А. Бакалейников, В.И. Кузнецов, Е.Ю. Флегонтова, Д.П. Барсуков, И.К. Морозов

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: morozov22505@gmail.com

Поступило в Редакцию 13 мая 2023 г.

В окончательной редакции 29 сентября 2023 г.

Принято к публикации 30 октября 2023 г.

Исследована устойчивость неоднородных стационарных состояний диода без отражения заряженных частиц от экстремумов потенциала. Показано, что исследованные решения являются неустойчивыми. Полученные результаты подтверждены численным моделированием эволюции малых возмущений.

Ключевые слова: плазменный диод, пучки электронов и позитронов, устойчивость решений, нелинейные колебания.

DOI: 10.61011/PJTF.2023.24.56873.54A

Излучение пульсаров в радиодиапазоне уже более 50 лет привлекает к себе внимание исследователей, но механизм формирования этого излучения, как и объяснение его особенностей, в частности перескоков между модами, по-прежнему вызывает вопросы [1,2]. Относительно недавно появилось предположение, что излучение пульсаров связано с коллективными процессами в электрон-позитронной плазме пульсарного диода [3].

В работе [4] высказана гипотеза, согласно которой излучение пульсара вызвано колебаниями электрического поля в плазме, возникающими из-за неустойчивости стационарных состояний. Стационарные решения для диода со встречными потоками электронов и позитронов подробно изучены в [5]. В [4] выведено уравнение для амплитуды малого возмущения распределения потенциала (РП) и найдено его аналитическое решение в случае однородного РП. Было показано, что однородное стационарное решение является устойчивым только при длине диода $\delta < \sqrt{2} \pi \lambda_D$, где λ_D — длина Дебая–Хюккеля.

В настоящей работе изучается устойчивость неоднородных стационарных решений в случае, когда все заряженные частицы долетают до противоположного электрода без отражения от экстремумов потенциала. Отметим, что аналитические методы исследования устойчивости состояний диода с пучком электронов для неоднородной плазмы использовались в [6,7]. Как и в работе [4], считаем, что моноэнергетический поток электронов поступает с левого электрода с плотностью $n_{e,0}$ и нерелятивистской скоростью $v_{e,0}$, а поток позитронов — с правого электрода с плотностью $n_{p,0} = n_{e,0}$ и скоростью $v_{p,0} = -v_{e,0}$. Энергии частиц $W_0 \equiv m_e v_{e,0}^2 / 2 = m_p v_{p,0}^2 / 2$, где m_e и m_p — масса электрона и позитрона соответственно. Считаем, что частицы поглощаются на электродах. Разность потенциалов между электродами U полагаем равной нулю.

Перейдем к безразмерным единицам, выбирая энергию частиц W_0 и длину Дебая–Хюккеля

$\lambda_D = [(2\tilde{\epsilon}_0 W_0) / (e^2 n_{e,0})]^{1/2}$ (e — заряд электрона, а $\tilde{\epsilon}_0$ — диэлектрическая проницаемость вакуума) в качестве единиц энергии и длины. Для безразмерных координаты, потенциала и напряженности электрического поля имеем: $\xi = z / \lambda_D$, $\eta = e\Phi / (2W_0)$ и $\varepsilon = eE\lambda_D / (2W_0)$.

Стационарные решения определяются тремя безразмерными параметрами: межэлектродным расстоянием δ , разностью потенциалов между электродами V и напряженностью электрического поля на левом электроде ε_0 . При фиксированной разности потенциалов эти решения удобно представлять точками на плоскости (ε_0, δ) , которые образуют отдельные кривые — ветви решений [5].

Стационарные решения характеризуются волнистостью РП. Ветви решений для режима без отражения частиц от экстремумов потенциала показаны на рис. 1. Они обозначены n_k , где индекс k — количество экстремумов на РП. В том случае, когда $V = 0$, а частицы поступают в плазму с противоположных электродов с одинаковыми зарядами (противоположного знака), массами и кинетическими энергиями, РП должно обладать нечетной симметрией относительно центра промежутка [4]. Благодаря симметрии в случае $V = 0$ могут существовать только решения, соответствующие ветвям n_k при $k = 0, 2, 4, \dots$. Типичное распределение потенциала вида n_2 показано на рис. 2.

Рассмотрим эволюцию малых возмущений решений, соответствующих этим ветвям. Представим РП в виде

$$\eta(\xi, \tau) = \eta_0(\xi) + \tilde{\eta}(\xi) \exp(-i\Omega\tau), \quad |\tilde{\eta}(\xi)| \ll |\eta_0(\xi)|. \quad (1)$$

Здесь $\eta_0(\xi)$ — невозмущенное РП, $\tilde{\eta}(\xi)$ — амплитуда возмущения РП, τ — безразмерное время, а $\Omega = \omega + i\Gamma$ — комплексная частота.

Уравнение для $\tilde{\eta}(\xi)$ получается линеаризацией уравнения Пуассона, в которое подставлены выражения для концентраций заряженных частиц, движущихся в поле (1).

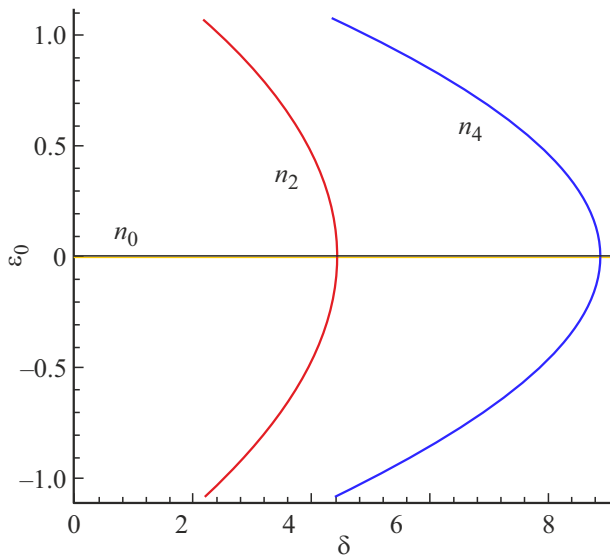


Рис. 1. Ветви стационарных решений n_0 , n_2 и n_4 для случая моноэнергетических пучков заряженных частиц при $V = 0$.

Для случая отсутствия отражения заряженных частиц в [4] получено

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}'(\xi) + \int_0^\xi dx [u_{e,0}(x)]^{-3} \int_0^x dy \tilde{\eta}'(y) \exp\{i\Omega[\sigma_e(\xi) - \sigma_e(y)]\} \\ + \int_\xi^\delta dx [u_{p,0}(x)]^{-3} \int_x^\delta dy \tilde{\eta}'(y) \exp\{i\Omega[\sigma_p(\xi) - \sigma_p(y)]\} \\ = \tilde{\eta}'(\delta) + \int_0^\delta dx [u_{e,0}(x)]^{-3} \int_0^x dy \tilde{\eta}'(y) \\ \times \exp\{i\Omega[\sigma_e(\delta) - \sigma_e(y)]\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} u_{e,0}(\xi) = [1 + 2\eta_0(\xi)]^{1/2}, \quad u_{p,0}(\xi) = [1 - 2\eta_0(\xi)]^{1/2}, \\ \sigma_e(\xi) = \int_0^\xi dx [u_{e,0}(x)]^{-1}, \quad \sigma_p(\xi) = \int_\xi^\delta dx [u_{p,0}(x)]^{-1} \end{aligned} \quad (3)$$

являются скоростями электрона и позитрона в точке ξ и временами пролета указанных частиц от соответствующего электрода до этой точки в невозмущенном поле.

Решив уравнение (2), можно найти выражение для возмущения потенциала $\tilde{\eta}(\xi)$. Граничное условие на правом электроде $\tilde{\eta}(\delta; \Omega) = 0$ дает дисперсионное уравнение, решения которого определяют связь между собственной частотой Ω и безразмерной длиной диода δ (так называемые дисперсионные ветви). В том случае, когда инкремент $\Gamma > 0$, стационарное решение является неустойчивым.

Введем новую функцию $\varphi(\xi) = \tilde{\eta}'(\xi)$. Поскольку решение уравнения (2) определено с точностью до мультипликативной константы, пропорциональной значению возмущения электрического поля на правой границе $-\tilde{\eta}'(\delta)$, положим $\varphi(\delta) = 1$. После изменения порядка интегрирования в двойных интегралах уравнение (2) сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно функции $\varphi(\xi)$:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi; \Omega) + \int_0^\delta dy K(\xi, y; \Omega) \varphi(y; \Omega) \\ - \int_0^\delta dy K(\delta, y; \Omega) \varphi(y; \Omega) = 1, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$K(\xi, y; \Omega) = P(\xi, y) Q(\xi, y; \Omega),$$

$$P(\xi, y) = \begin{cases} \int_\xi^y dx [u_{e,0}(x)]^{-3}, & y \leq \xi, \\ \int_y^\xi dx [u_{p,0}(x)]^{-3}, & y \geq \xi, \end{cases}$$

$$Q(\xi, y; \Omega) = \begin{cases} \exp\{i\Omega[\sigma_e(\xi) - \sigma_e(y)]\}, & y \leq \xi, \\ \exp\{i\Omega[\sigma_p(\xi) - \sigma_p(y)]\}, & y \geq \xi. \end{cases} \quad (5)$$

Учитывая, что $\varphi(\xi) = \tilde{\eta}'(\xi)$, на правой границе получаем

$$\tilde{\eta}(\delta; \Omega) = \int_0^\delta dy \varphi(y; \Omega) + \tilde{\eta}(0; \Omega). \quad (6)$$

Поскольку значение потенциала на электродах задано, то $\tilde{\eta}(0; \Omega) = 0$, $\tilde{\eta}(\delta; \Omega) = 0$, и из (6) получаем

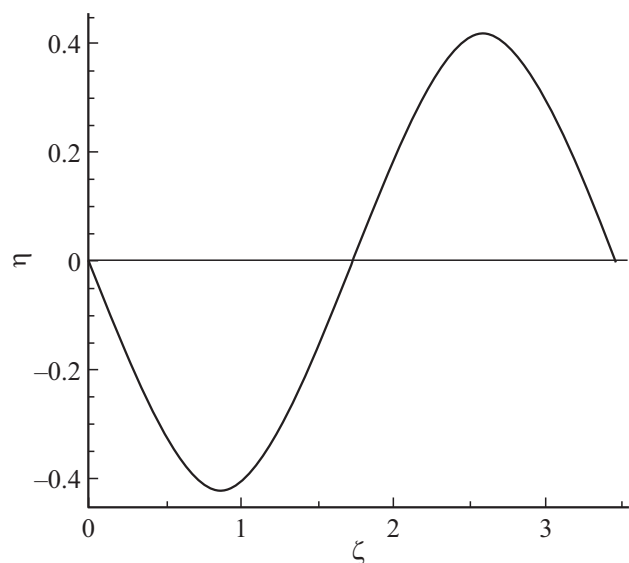


Рис. 2. Типичное РП для ветви n_2 при $V = 0$.

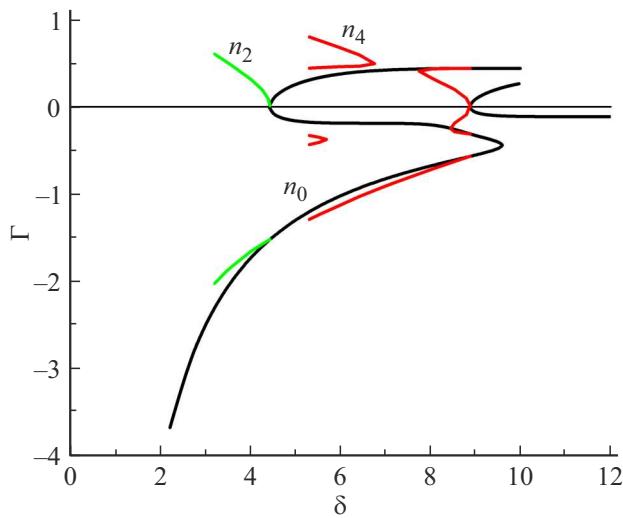


Рис. 3. Аперриодические дисперсионные ветви для решений, соответствующих ветвям n_0 , n_2 и n_4 .

дисперсионное уравнение

$$\int_0^{\delta} dy \varphi(y; \Omega) = 0. \quad (7)$$

Анализ решений уравнения (7) позволяет определить устойчивость стационарных решений с неоднородными РП. Таким образом, для получения дисперсионного уравнения необходимо решить интегральное уравнение (4), т.е. определить функцию $\varphi(\xi; \Omega)$.

В общем случае найти решение этого уравнения аналитически не представляется возможным. Поэтому мы предлагаем численный метод его решения. Для этого разобьем весь интервал $[0, \delta]$ на N интервалов и заменим интегралы в (5) суммами по методу трапеций. Для значений неизвестной функции в узлах получаем систему линейных уравнений. Подстановка решений этой системы в дисперсионное уравнение (7) позволяет определить собственные частоты и найти как аперриодические, так и колебательные дисперсионные ветви.

Аперриодические дисперсионные ветви, соответствующие ветвям решений n_0 , n_2 и n_4 , представлены на рис. 3. Ветвь для n_0 полностью совпадает с полученной в работе [4], где уравнение (4) было решено аналитически. Как видно из рис. 3, стационарные решения, соответствующие ветви n_2 , аперриодически неустойчивы (инкремент $\Gamma > 0$). На ветви n_4 имеется окно значений $6.766 < \delta < 7.752$, в котором стационарные состояния являются аперриодически устойчивыми. Однако исследование колебательных ветвей в этом интервале показывает, что одна из них имеет положительный инкремент; следовательно, эти стационарные решения являются неустойчивыми относительно малых колебательных возмущений.

Зависимости Γ от δ для РП, соответствующих одной ветви n_k , но с различными знаками напряженностей на

левой границе ε_0 , в случае $V = 0$ совпадают. Причем этот факт справедлив как для аперриодических, так и для колебательных ветвей.

Таким образом, показано, что неоднородные стационарные решения, соответствующие ветвям n_2 и n_4 , неустойчивы, т.е. такие стационарные состояния не могут существовать. Можно предположить, что стационарные решения, соответствующие ветвям n_{2s} , с $s \geq 3$, также являются неустойчивыми относительно малых возмущений.

При численном исследовании устойчивости стационарных решений в электрон-позитронном диоде мы изучаем эволюцию малого возмущения стационарного распределения электрического поля. Мы выбираем функции распределения по скоростям (ФРС) на электродах в виде „воронков“ малой ширины $\Delta \ll 1$: $f_0^{(\pm)}(u) = (2\Delta)^{-1}$ в интервале скоростей $u \in [\mp 1 - \Delta, \mp 1 + \Delta]$ и $f_0^{(\pm)}(u) = 0$ вне этого интервала (здесь знаки „минус“ и „плюс“ соответствуют электронам и позитронам).

Стационарные решения должны немного отличаться от решений для δ -образной ФРС. Для решений, принадлежащих ветвям n_{2i} (где $i = 0, 1, \dots$), концентрации частиц определяются по следующим формулам:

$$n_{\pm}(\eta) = \frac{1}{2\Delta} \left[\sqrt{(1 + \Delta)^2 \mp 2\eta} - \sqrt{(1 - \Delta)^2 \mp 2\eta} \right]. \quad (8)$$

Подставляя концентрации частиц (8) в уравнение Пуассона, умножая обе его части на η' и интегрируя результат по потенциалу, получаем уравнение для η' , из которого можно найти связь между ε_0 и потенциалом минимума η_m . Интегрируя полученное уравнение для η' , находим распределения потенциала и электрического поля по координате. В качестве параметра используем напряженность электрического поля на левой границе ε_0 . Положение минимума ξ_m находится путем интегрирования от η_m до 0.

Поскольку РП обладает симметрией относительно точки $\xi = \xi_m$, середина зазора находится в точке $\xi = 2\xi_m$, а величина зазора δ для ветви n_2 равна $4\xi_m(\varepsilon_0)$.

Для моделирования эволюции распределения электрического поля и ФРС заряженных частиц мы использовали два разных численных кода: РС-код и ЕК-код.

В РС-коде при моделировании ФРС рассматриваются отдельные частицы, движущиеся в электрическом поле, заданном в узлах сетки. Для нахождения плотности заряда в узлах сетки используется модель „облако в ячейке“ (линейный вклад частицы в плотность в соседних узлах) [8]. Для вычисления электрического поля в узлах сетки решается уравнение Пуассона, а между узлами используется линейная аппроксимация [8]. Для отыскания положения частиц в следующий момент времени используется метод „перешагивания“ [8] с шагом h_τ . В конце каждого шага из расчета удаляются частицы, попавшие на электроды, и добавляются частицы, поступившие с электродов со случайными скоростями, равномерно

распределенными в интервале $[\mp 1 - \Delta, \mp 1 + \Delta]$, в случайный момент времени, распределенный равномерно по интервалу h_τ .

Численный алгоритм, реализованный в ЕК-коде, подробно описан в работах [9,10]. В ходе расчетов траектории частиц прослеживаются обратно во времени вплоть до момента вылета с электрода. Распределение поля находится из уравнения Пуассона. Для обеспечения самосогласованности расчетов на каждом шаге проводятся итерации.

Расчеты проводились при значениях величины межэлектродного зазора $\delta = 3$ и 4 для стационарных решений как с положительными, так и с отрицательными значениями ε_0 . После короткого переходного процесса максимальное значение возмущения $\tilde{\eta}_M(\tau)$ растет по экспоненциальному закону с инкрементами $\Gamma = 0.7$ для $\delta = 3$ и $\Gamma = 0.33$ для $\delta = 4$. Это хорошо согласуется со значениями инкремента, которые дает полуаналитический метод для моноэнергетических пучков ($\Gamma = 0.68$ и 0.31), а также с результатом расчета с применением PIC-кода ($\Gamma = 0.31$ в случае $\delta = 4$).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] P. Goldreich, W.H. Julian, *Astrophys. J.*, **157** (2), 869 (1969). DOI: 10.1086/150119
- [2] P.A. Sturrock, *Astrophys. J.*, **164** (3), 529 (1971). DOI: 10.1086/150865
- [3] A. Philippov, A. Timokhin, A. Spitkovsky, *Phys. Rev. Lett.*, **124** (24), 245101 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevLett.124.245101
- [4] V.I. Kuznetsov, L.A. Bakaleinikov, E.Yu. Flegontova, *Phys. Plasmas*, **29** (22), 112115 (2022). DOI: 10.1063/5.0125091
- [5] А.Я. Эндер, В.И. Кузнецов, А.А. Груздев, *Физика плазмы*, **42** (10), 891 (2016). DOI: 10.7868/S0367292116100036 [A.Ya. Ender, V.I. Kuznetsov, A.A. Gruzdev, *Plasma Phys. Rep.*, **42** (10), 936 (2016). DOI: 10.1134/S1063780X16100032].
- [6] V.S. Sukhomlinov, A.S. Mustafaev, H. Koubaji, N.A. Timofeev, O. Murillo, *New J. Phys.*, **23**, 123044 (2021). DOI: 10.1088/1367-2630/ac4125
- [7] V. Sukhomlinov, A. Mustafaev, A. Zaitsev, N. Timofeev, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **91** (2), 024501 (2022). DOI: 10.7566/JPSJ.91.024501
- [8] Р. Хокни, Дж. Иствуд, *Численное моделирование методом частиц* (Мир, М., 1987). [R.W. Hockney, J.W. Eastwood, *Computer simulation using particles* (Taylor & Francis, Philadelphia, 1988)].
- [9] В.И. Кузнецов, А.Я. Эндер, *Физика плазмы*, **36** (3), 248 (2010). [V.I. Kuznetsov, A.Ya. Ender, *Plasma Phys. Rep.*, **36** (3), 226 (2010). DOI: 10.1134/S1063780X10030049].
- [10] V.I. Kuznetsov, E.Yu. Flegontova, L.A. Bakaleinikov, *Phys. Plasmas*, **27** (9), 092304 (2020). DOI: 10.1063/5.0020140