

01 О взаимодействии заряженных сфероидальных частиц в растворе электролита

© С.И. Гращенков

Псковский государственный университет,
180000 Псков, Россия
e-mail: grasi@mail.ru

Поступило в Редакцию 27 июня 2023 г.
В окончательной редакции 29 октября 2023 г.
Принято к публикации 15 ноября 2023 г.

На основе линеаризованной модели уравнения Пуассона-Больцмана рассмотрено электростатическое взаимодействие заряженных сфероидальных частиц в водном растворе симметричного электролита при условии постоянства заряда на их поверхностях. Полагается, что частицы имеют общую ось симметрии. Методом конечных элементов проведены расчеты сил взаимодействия между частицами в режиме слабого и умеренного экранирования в отсутствие внешнего поля.

Ключевые слова: линеаризованная модель Пуассона-Больцмана, две заряженные микрочастицы, сфероидальные микрочастицы, коллоидные частицы, граничное условие постоянства заряда.

DOI: 10.61011/JTF.2024.01.56898.157-23

Введение

При взаимодействии коллоидной частицы с раствором электролита происходит ряд процессов, приводящих к появлению заряда на ее поверхности [1]. В жидких растворах заряженная частица окружена диффузионным ионным слоем, который экранирует электрический потенциал на ее поверхности. Учет экранирования при взаимодействии заряженных частиц играет важнейшую роль в различных технических и биологических системах. Если потенциалы электрического поля в рассматриваемых точках симметричного электролита достаточно малы [2], распределение φ -потенциала в окрестности частиц можно искать исходя из линеаризованного уравнения Пуассона-Больцмана или уравнения Дебая-Хюккеля [3]:

$$\Delta\varphi - k_D^2\varphi = 0, \quad (1)$$

где φ — распределение потенциала в окрестности частиц, k_D — постоянная экранирования (обратный дебаевский радиус). Типичным условием применимости этого уравнения является расчет распределения потенциала в коллоидной системе, в которой потенциалы на поверхностях частиц не превышают $k_B T/e$, где k_B — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, e — элементарный заряд (температуре 25°C соответствует потенциал 26 mV) [1,2]. Очевидно, что с ростом температуры растет и потенциал на поверхностях частиц, при котором становится применимо уравнение (1). Наличие заряда на поверхностях частиц приводит к возникновению электростатических сил взаимодействия между ними. Силы взаимодействия между коллоидными частицами в симметричных ионных растворах оказывают существенное влияние на свойства биологических жидкостей, фармацевтических препара-

тов, продуктов питания и т.д. Поэтому расчетам сил электростатического взаимодействия двух макрочастиц на основе уравнения (1) посвящено большое количество работ. Достаточно полный обзор таких работ приведен в [4]. Отметим, что распределение потенциалов на поверхностях частиц зависит от расстояния между ними, их размеров, скоростей и характерного времени релаксации поверхностного заряда [5], и поиск такого распределения является отдельной задачей. Поэтому при расчете сил взаимодействия достаточно часто ограничиваются двумя случаями: постоянного потенциала на поверхностях частиц и постоянного заряда частиц. Рассмотрим подробнее эти условия для случая нахождения частиц в водных растворах симметричного электролита. В общем случае граничные условия на поверхности каждой из частиц имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_i, \\ \left(\nabla\varphi - \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} \nabla\varphi_i \right) \mathbf{n} &= \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}, \end{aligned} \quad (2)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к элементу поверхности, направленный внутрь частицы, ε_0 — электрическая постоянная, ε — диэлектрическая проницаемость среды (водного раствора электролита), ε_i — диэлектрическая проницаемость вещества i -й частицы, φ_i — распределение потенциала внутри i -й частицы, σ — поверхностная плотность зарядов. Как правило, диэлектрическая проницаемость водного электролита много больше диэлектрической проницаемости вещества частицы. В этом случае влияние второго слагаемого в скобках во втором условии обычно невелико и условие (2) можно заменить условием [6]

$$\mathbf{n}\nabla\varphi = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (3)$$

При малых потенциалах на поверхности частицы можно положить, что поверхностная плотность зарядов зависит только от потенциала поверхности, и эту зависимость можно представить в виде [7]

$$\sigma = \sigma_0 + C(\varphi - \varphi_0), \quad (4)$$

где σ_0 — распределение поверхностной плотности заряда, полученное для уединенной частицы при условии, что во всех точках ее поверхности значение потенциала φ_0 одинаково, C — константа, зависящая от свойств поверхности частицы. Подставляя (4) в (3), получаем

$$\nabla\varphi\mathbf{n} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon\varepsilon_0} + C\frac{(\varphi - \varphi_0)}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

При $C \rightarrow \infty$ на поверхности частицы

$$\varphi = \varphi_0.$$

Это условие носит название условия постоянства потенциала. В этом случае распределения потенциалов на поверхности частиц не зависят от расстояния между ними.

При $C \rightarrow 0$ на поверхности частицы

$$\nabla\varphi\mathbf{n} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (5)$$

Это условие носит название условия постоянства заряда. В этом случае распределения потенциалов на поверхности частиц зависят от расстояния между ними. При использовании этого условия надо знать распределение σ_0 на поверхности уединенной частицы с однородным распределением потенциала на этой поверхности. Условие постоянства заряда и условие постоянства потенциала можно рассматривать как предельные случаи, которые определяют интервал, в котором могут лежать значения силы электростатического отталкивания частиц. Сказанное хорошо иллюстрируется проведенным в работе [8] сравнением экспериментальных данных для сил электростатического взаимодействия шарообразных субмикронных частиц диоксида кремния в водном электролите NaCl при разных концентрациях соли с результатами расчета этих сил с использованием условий постоянства заряда и постоянства потенциала. Примерами работ, в которых указанные условия используются как предельные случаи, являются [6,9–12]. Как в случае с условием постоянства потенциала, так и в случае постоянства заряда в работах, посвященных исследованию взаимодействия двух частиц на основе уравнения (1), рассматривается, как правило, взаимодействие шарообразных частиц. Исключение составляет работа [13], в которой рассматривалось взаимодействие сфероидальных частиц с общей осью симметрии при заданных однородных распределениях потенциала на их поверхностях. Целью настоящей работы является модификация разработанного в этом исследовании метода на случай постоянного заряда, учитываемого граничным условием (5).

1. Методика расчета

В настоящей работе для исследования электростатического взаимодействия макрочастиц применяется метод конечных элементов. В этом методе область, в которой ищется распределение той или иной величины, разбивается на множество подобластей. В результате получается расчетная сетка, на основе которой генерируется набор базисных функций, используемых для аппроксимации искомого распределения. Таким образом, распределение ищется в виде разложений в ряд по этим функциям с неизвестными коэффициентами. В настоящее время имеется ряд компьютерных программ, позволяющих методом конечных элементов находить численное решение дифференциального уравнения по его слабой форме. Слабая форма уравнения (1) известна, и ее можно представить в виде [14]

$$\int_{\Omega} \tilde{\nabla}u \cdot \tilde{\nabla}\phi d\tilde{V} + \int_{\Omega} k^2 u \phi d\tilde{V} + \int_{\Gamma_N} g_N \phi d\tilde{S} = 0, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} u &= \frac{\varphi}{\varphi_0}, \\ k &= k_D R_1, \\ g_N &= \mathbf{n} \tilde{\nabla}u. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь и далее использование тильды над операторами и выражаемыми через координаты величинами указывает на то, что координаты нормированы на характерный размер R_1 первой частицы, который в случае сферической формы частицы равен ее радиусу, а в случае сфероидальной — максимальному расстоянию от общей оси симметрии частиц до ее поверхности. Будем полагать, что соответствующее расстояние R_2 для второй частицы не превышает R_1 . Далее φ_0 — потенциал уединенной частицы, Ω — конечная область, в которой ищется распределение потенциала, V — объем этой области, Γ_N — участки границ расчетной области, совпадающие с поверхностями частиц, ϕ — тестовая функция. Последовательная подстановка тестовых функций в уравнение (6) позволяет получить систему уравнений для расчета указанных выше неизвестных коэффициентов. В рассматриваемой задаче в условии (5) σ_0 представляет собой распределение поверхностной плотности заряда одиночной частицы при потенциале поверхности, равном φ_0 . В случае сферической частицы это распределение однородно, и g_N является постоянной величиной. Однако в случае сфероидальной частицы это не так. Для нахождения распределения g_N воспользуемся тем, что при постоянном потенциале на поверхности частицы напряженность электрического поля внутри нее равна нулю. В работе [15] показано, что это условие приводит к однозначному распределению σ_0 при заданном полном заряде частицы, совпадающему с распределением на поверхности проводящего сфероида в вакууме [16]. Воспользовавшись выражением

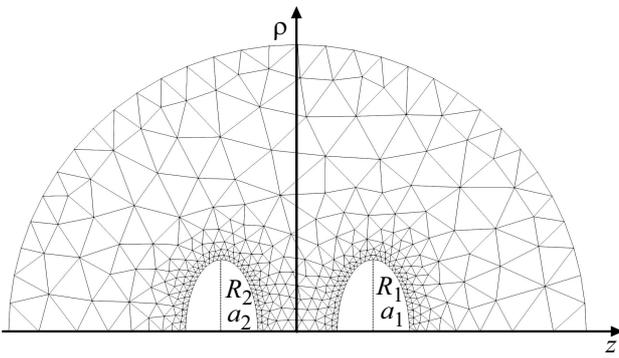


Рис. 1. Структура исходной расчетной области.

для плотности поверхностного заряда из работ [15,16], с учетом (5), (7) получаем, что на поверхности i -й частицы

$$g_N = \frac{\beta_i}{4\pi} \left(\frac{R_i^2}{R_1^2} + \tilde{\rho}^2 \left(\frac{a_i^2}{R_i^2} - 1 \right) \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (8)$$

где

$$\beta_i = \frac{Q_i}{\varepsilon \varepsilon_0 \varphi_0 R_i},$$

Q_i — полный заряд i -й частицы, R_i — максимальное расстояние от оси симметрии этой частицы до ее поверхности, $\tilde{\rho}$ — нормированное значение в рассматриваемой точке поверхности частицы полярного радиуса цилиндрической системы координат, ось z которой совпадает с общей осью симметрии частиц, a_i — расстояние от центра частицы до ее поверхности вдоль оси, соединяющей центры частиц. Если искомые распределения осесимметричны, как это имеет место в данном случае, то трехмерную задачу можно свести к двумерной, перейдя к цилиндрическим координатам, в которой все распределения зависят только от полярного радиуса ρ и аппликаты z цилиндрической системы координат. Именно этот подход используется в настоящей работе. Пример исходной расчетной сетки показан на рис. 1. Нижняя граница области соответствует оси симметрии задачи. Для удобства отображения отдельных элементов соотношения их размеров отличаются от реально используемых. Радиус внешней границы полагался равным $100R_1$ при расстоянии h_c между центрами макрочастиц, меньшем $10R_1$, и $100h_c$ в противном случае. Сведения, необходимые для перехода к цилиндрической системе координат, приведены в [17]. Величину β_i можно рассчитать методом конечных элементов способом, описанным в [13]. Значения β_i при некоторых значениях a_i/R_i и k приведены в таблице. Значения β_i для шара не приводятся, так как их можно получить по аналитической формуле

$$\beta_i = 4\pi(1 + k_D R_i),$$

которую легко можно вывести из выражений, приведенных в [18]. Эта же формула использовалась для оценки

Величины β_i при некоторых значениях a_i/R_i и $k = k_D R_i$, см. (7), (8)

a_i/R_i	$k_D R_i$	β_i
0.5	0.1	11.253
0.5	1	19.0549
2	0.1	18.703
2	1	38.268

точности расчета β_i методом конечных элементов. Отметим, что слабая форма (6) имеет однозначное решение при условии, что хотя бы на части границы рассматриваемой области задано распределение u . В качестве такой границы выбирается внешняя граница расчетной области и распределение потенциала на ней приближенно представляется как распределение, получаемое суперпозицией распределений, создаваемых одиночными сферическими макрочастицами [18], положения которых совпадают с центрами рассматриваемых частиц, а заряды совпадают с зарядами рассматриваемых частиц. Отметим, что при рассматриваемых в настоящей работе значениях k без заметного понижения точности можно просто положить потенциал на внешней границе равным нулю.

Сила \mathbf{F} , действующая на некоторую частицу, может быть найдена при помощи выражения [6]

$$\mathbf{F} = \oint_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS,$$

где \mathbf{T} — тензор напряжений

$$\mathbf{T} = \left(\Pi + \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2 \right) \mathbf{I} - \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E} \otimes \mathbf{E},$$

S — площадь поверхности тела, $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ — напряженность электрического поля, \mathbf{I} — единичный тензор, Π — гидростатическое давление, обусловленное разностью между локальным и объемным осмотическими давлениями [3]. При использовании линеаризованной теории Пуассона-Больцмана [3]

$$\Pi = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 k_D^2 \varepsilon^2.$$

Отличие настоящей работы от [13] заключается в дополнительном слагаемом с g_N в слабой форме, которое учитывает граничное условие (5) на поверхности частиц, и в выражении для расчета силы, которое в настоящей работе учитывает гидростатическое давление и неоднородность распределения потенциала на поверхности частиц. В остальном же процедура расчета нормированного распределения потенциала u на основе метода конечных элементов совпадает с приведенной в работе [13], и здесь ее описание опускается. Как и в работе [13], расчет проводился с использованием

программного пакета NGSolve [19,20]. Отметим, что при однородном распределении потенциала на поверхности частиц вклад в силу, обусловленный гидростатическим давлением, становится нулевым. Поэтому, несмотря на отсутствие учета этого вклада в выражении для силы в работе [13], сравнение результатов настоящей работы с результатами работы [13] является вполне корректным.

Так как метод конечных элементов является приближенным, при его использовании необходимо провести тестовые расчеты, позволяющие оценить точность получаемых результатов. При этом, поскольку точность вычислений падает с увеличением расстояния между поверхностями частиц [13], тесты достаточно провести для максимальных расстояний при используемых в настоящей работе значениях k . С увеличением расстояния h между поверхностями сферических макрочастиц сила F их электростатического взаимодействия стремится к силе отталкивания F_{DLVO} , описываемой известным асимптотическим выражением [1,5] для частиц с постоянным зарядом, которое в обозначениях настоящей работы может быть записано как

$$F_{DLVO} = F_0 4\pi \frac{R_2}{R_1} \frac{1 + \tilde{h}_c k}{\tilde{h}_c^2} \exp(-k\tilde{h}), \quad (9)$$

где

$$F_0 = \varepsilon \varepsilon_0 \varphi_0^2.$$

Здесь \tilde{h} — нормированное на R_1 — минимальное расстояние между поверхностями частиц. Для одинаковых частиц при $h = 5R_1$ и $k = 1$, т.е. для случая, когда радиусы частиц равны дебаевскому радиусу k_D^{-1} , отличие между действующими на сферические макрочастицы модулями сил от F_{DLVO} составило 0.001%. В случае же, когда радиус второй частицы был в два раза меньше

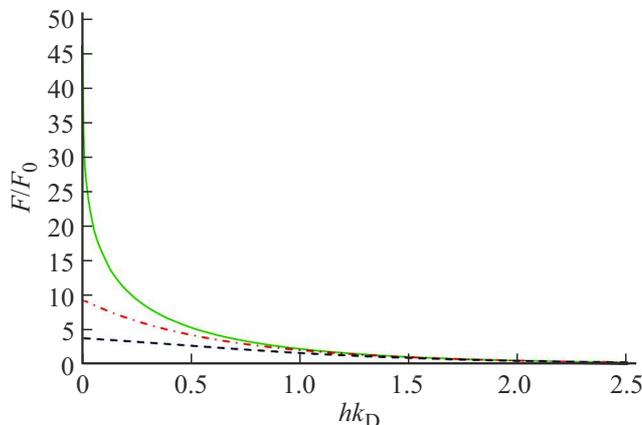


Рис. 2. Зависимость нормированной силы от нормированного расстояния между поверхностями одинаковых частиц шарообразной формы при $k = 1$: сплошная линия — частицы с постоянным зарядом; штрихпунктирная — расчет по асимптотической формуле (5); штриховая — частицы с постоянным потенциалом на их поверхностях.

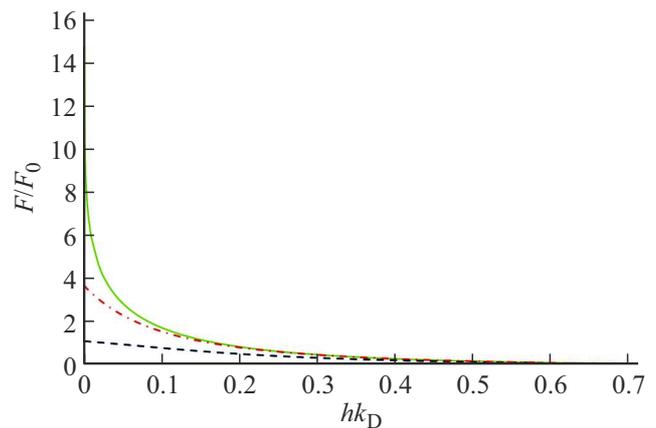


Рис. 3. Зависимость нормированной силы от нормированного расстояния между поверхностями одинаковых частиц шарообразной формы при $k = 0.1$: сплошная линия — частицы с постоянным зарядом; штрихпунктирная — расчет по асимптотической формуле (5); штриховая — частицы с постоянным потенциалом на их поверхностях.

первой, это отличие составило 0.03%. Для $h = 10R_1$ и $k = 0.1$, т.е. когда радиусы частиц в десять раз меньше дебаевского, эти отличия составили соответственно 0.07 и 0.0002%. Для иллюстрации сказанного на рис. 2 показаны зависимости нормированных сил отталкивания, действующих на одинаковые частицы шарообразной формы, от нормируемого на дебаевский радиус k_D^{-1} расстояния между их поверхностями при $k = 1$. Для сравнения показаны зависимости, рассчитанные по условию постоянства заряда, постоянства потенциала и зависимость, рассчитанная по асимптотической формуле (9). Из рисунка видно, что с ростом расстояния между частицами рассчитанные значения сил во всех трех случаях стремятся друг к другу, и, начиная с некоторого расстояния, соответствующие кривые практически сливаются. На рис. 3 показаны аналогичные зависимости для случая $k = 0.1$. Сравнение зависимостей, отображаемых на рис. 2 и 3, показывает, что при заданном расстоянии между частицами рост k (или рост радиуса частиц при заданном значении дебаевского радиуса) приводит к увеличению значений нормированных сил, что легко объясняется увеличением нормированных зарядов и уменьшением нормированного на радиус частиц расстояния \tilde{h} .

2. Результаты расчетов

На рис. 4 показаны зависимости от расстояния между частицами нормированной силы взаимодействия шарообразной частицы с частицами различных форм или размеров при $k = 1$. Из этого рисунка видно, что при достаточной близости радиуса шарообразной частицы к дебаевскому радиусу k_D^{-1} увеличение продольных размеров второй частицы или уменьшение ее поперечных

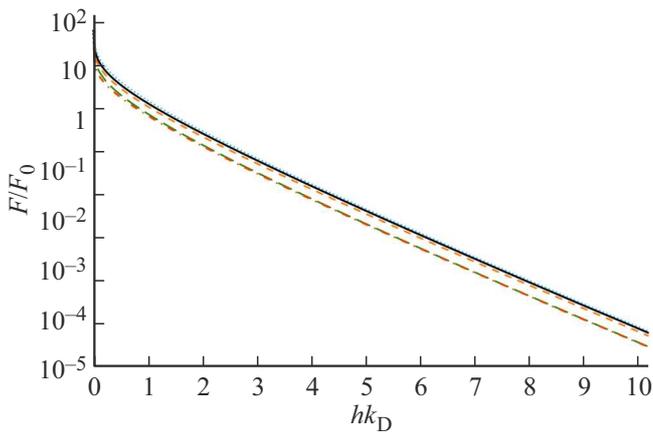


Рис. 4. Зависимость нормированной силы от нормированного расстояния между поверхностями частиц с постоянными зарядами при $k = 1$ и $R_1 = a_1$: пунктирная линия — $R_2 = R_1$, $a_2 = 0.5R_2$; сплошная — $R_2 = R_1$, $R_2 = a_2$; штриховая — $R_2 = R_1$, $a_2 = 2R_2$; длинный штрих — $R_2 = 0.5R_1$, $a_2 = R_2$; штрихпунктирная — $R_2 = 0.5R_1$, $a_2 = 2R_2$.

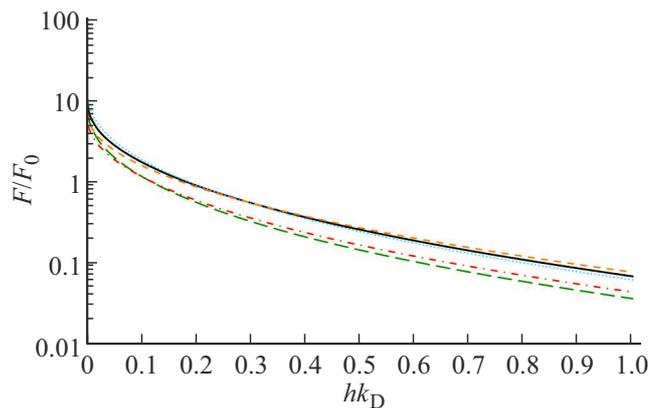


Рис. 5. Зависимость нормированной силы от нормированного расстояния между поверхностями частиц с постоянными зарядами при $k = 0.1$ и $R_1 = a_1$: пунктирная линия — $R_2 = R_1$, $a_2 = 0.5R_2$; сплошная — $R_2 = R_1$, $R_2 = a_2$; штриховая — $R_2 = R_1$, $a_2 = 2R_2$; длинный штрих — $R_2 = 0.5R_1$, $a_2 = R_2$; штрихпунктирная — $R_2 = 0.5R_1$, $a_2 = 2R_2$.

размеров приводит к уменьшению сил электростатического отталкивания частиц. Однако, как видно из рис. 5, если размеры частиц недостаточно велики, то, начиная с некоторого расстояния между поверхностями частиц, увеличение продольных размеров второй частицы ведет к увеличению силы взаимодействия между частицами. Описанные закономерности выполняются и для частиц одинаковых форм, что хорошо иллюстрируется рис. 6. На рис. 7 более подробно показаны зависимости сил от расстояния между частицами одинаковых форм при $k = 0.1$ в интервале hk_D от 0.25 до 0.28. Из этого рисунка видно, что при достаточно малых размерах частиц на некоторых расстояниях между ними возможна ситуация, когда и уменьшение, и увеличение продоль-

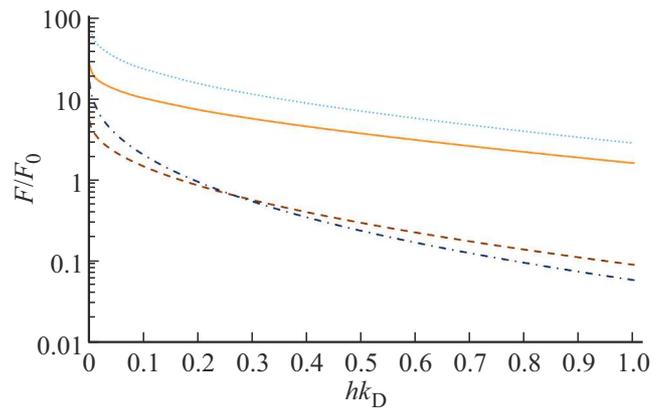


Рис. 6. Зависимости нормированной силы от нормированного расстояния между поверхностями одинаковых частиц с постоянными зарядами: пунктирная линия — $k = 1$, $a_1 = a_2 = 0.5R_1$; сплошная линия — $k = 1$, $a_1 = a_2 = 2R_1$; штрихпунктирная — $k = 0.1$, $a_1 = a_2 = 0.5R_1$; штриховая — $k = 0.1$, $a_1 = a_2 = 2R_1$.

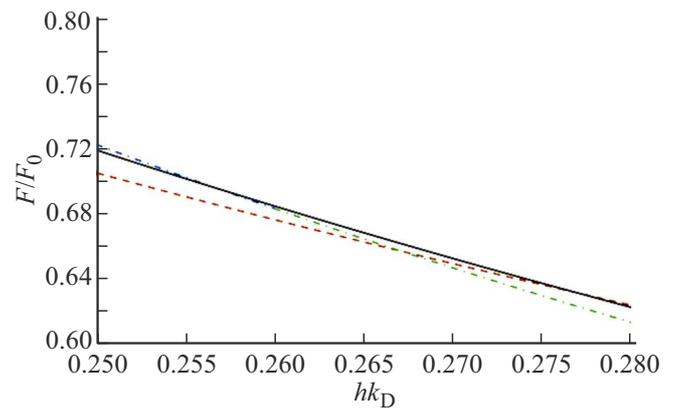


Рис. 7. Зависимость нормированной силы от нормированного расстояния между поверхностями одинаковых частиц с постоянными зарядами при $k = 0.1$: сплошная линия — $a_1 = a_2 = R_1$; штрихпунктирная — $a_1 = a_2 = 0.5R_1$; штриховая — $a_1 = a_2 = 2R_1$.

ного размера частиц ведет к уменьшению нормированных сил их взаимодействия. Указанные закономерности соответствуют закономерностям, полученным в работе [13] для частиц с постоянным потенциалом на их поверхностях. И, кроме того, сравнение с результатами работы [13] показывает, что, как и в случае частиц шарообразной формы, нормированные силы, действующие на частицы с постоянным зарядом сфероидальной формы, с ростом расстояния между частицами стремятся к нормированным силам, действующим на частицы с постоянным потенциалом. При этом силы, действующие на частицы с постоянным зарядом, больше сил, действующих на частицы с постоянным потенциалом, и на близких расстояниях отличаются по порядку величины.

Заключение

Рассмотрено электростатическое взаимодействие двух заряженных макрочастиц сфероидальной формы с общей осью симметрии и постоянным зарядом на их поверхностях в условиях слабого и умеренного экранирования. Результаты расчетов применимы для случаев, когда диэлектрическая проницаемость электролита много больше диэлектрической проницаемости вещества частицы, а потенциалы электрического поля на поверхности частиц достаточно малы по сравнению с энергией их теплового движения. Проведено сравнение нормированных сил, действующих на частицы с постоянным зарядом, с силами, действующими на частицы с постоянным потенциалом на их поверхностях. Показано, что переход от условия постоянства потенциалов к условию постоянства зарядов приводит к многократному увеличению значений сил для близкорасположенных частиц. Из результатов расчетов следует, что при достаточно большой степени экранирования частиц увеличение их продольных размеров приводит к уменьшению сил электростатического взаимодействия между ними. Однако если степень экранирования недостаточно мала, то зависимость силы от поперечных размеров частиц зависит от расстояния между ними. При этом возможна ситуация, когда сила взаимодействия между макрочастицами сферической формы будет больше сил взаимодействия как частиц в форме сплюснутого сфероида, так и частиц в форме вытянутого сфероида.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов

Список литературы

- [1] J.N. Israelachvili. In: *Intermolecular and Surface Forces* (Elsevier Science, Netherlands, 2011)
- [2] H. Ohshima. *Theory of Colloid and Interfacial Electric Phenomena* (Academic Press, San Diego, 2006)
- [3] B.V. Derjaguin. *Trans. Faraday Soc.*, **35**, 203 (1940). DOI: 10.1039/TF9403500203
- [4] S.V. Siryk, A. Bendandi, A. Diaspro, W. Rocchia. *J. Chem. Phys.*, **155** (11), 114114 (2021). DOI: 10.1063/5.0056120
- [5] I.N. Derbenev, A.V. Filippov, A.J. Stace, E. Besley. *Soft Matter*, **14** (26), 5480 (2018). DOI: 10.1039/c8sm01068d
- [6] S.L. Carnie, D.Y.C. Chan, J. Stankovich. *J. Colloid Interface Sci.*, **165** (1), 116 (1994). DOI: 10.1006/jcis.1994.1212
- [7] R. Pericet-Camara, P. Papastavrou, S.H. Behrens, M. Borkovec. *J. Phys. Chem. B*, **108** (50), 19467 (2004). DOI: 10.1021/jp0473063
- [8] G. Toikka, R.A. Hayes. *J. Colloid Interface Sci.*, **191** (1), 102 (1997). DOI: 10.1006/jcis.1997.4950
- [9] A.B. Glendinning, W.B. Russel. *J. Colloid Interface Sci.*, **93** (1), 95 (1983). DOI: 10.1016/0021-9797(83)90388-0
- [10] P.K. Das, S. Bhattacharjee, W. Moussa. *Langmuir*, **19** (10), 4162 (2003). DOI: 10.1021/la0207567
- [11] E.R.A. Lima, F.W. Tavares, E.C. Biscaia Jr. *Phys. Chem. Chem. Phys.*, **9** (24), 3174 (2007). DOI: 10.1039/B701170A
- [12] C.D. Cooper, L.A. Barba. *Comp. Phys. Commun.*, **202**, 23 (2016). DOI: 10.1016/j.cpc.2015.12.019
- [13] С.И. Гращенко. *ЖТФ*, **92** (12), 1770 (2022). DOI: 10.21883/JTF.2022.12.53742.145-22 [S.I. Grashchenkov. *Tech. Phys.*, **67** (12), 1533 (2022). DOI: 10.21883/TP.2022.12.55186.145-22]
- [14] M. Holst, N. Baker, F. Wang. *J. Comp. Chem.*, **21** (15), 1319 (2000). DOI: 10.1002/1096-987X(20001130)21:15<1319::AID-JCC1>3.0.CO;2-8
- [15] Д.В. Белов, С.Н. Горшков. *Ученые записки физ. фак. Московского ун-та*, **4**, 164102 (2016) .
- [16] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Электродинамика сплошных сред* (Физматлит, М., 2005), 4-е изд., стереот. [L.D. Landau, E.M. Lifshitz, L.P. Pitaevskii. *Electrodynamics of Continuous Media* (Pergamon, Oxford, 1984)]
- [17] J.N. Reddy, D.K. Gartling. *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics* (CRC Press, Boca Raton, 2010)
- [18] В.Е. Фортов, А.Г. Храпак, С.А. Храпак, В.И. Молотков, О.Ф. Петров. *УФН*, **174** (5), 495 (2004). DOI: 10.3367/UFNr.0174.200405b.0495 [V.E. Fortov, A.G. Khrapak, S.A. Khrapak, V.I. Molotkov, O.F. Petrov. *Phys. Usp.*, **47** (5), 447 (2004). DOI: 10.1070/PU2004v047n05ABEH001689]
- [19] S. Zaglmayr. *Phd Thesis* (Johannes Kepler University, Linz, 2006)
- [20] J. Schöberl. *C++11 Implementation of Finite Elements in NGSolve, ASC Report 30/2014, Institute for Analysis and Scientific Computing* (Vienna University of Technology, Vienna, 2014)