

04.2

Бета полоидальное в „каноническом“ уравнении Грэда–Шафранова

© Ю.В. Готт, В.Э. Лукаш

Национальный исследовательский центр „Курчатовский институт“, Москва, Россия

E-mail: jvgott@gmail.com, nrcki@nrcki.ru

Поступило в Редакцию 20 ноября 2023 г.

В окончательной редакции 16 декабря 2023 г.

Принято к публикации 16 декабря 2023 г.

Рассмотрена связь ограничительного параметра β_p с параметром β , который используется в уравнении Грэда–Шафранова, записанном в „канонической“ форме. Показано, что для величины $0 \leq \beta_p \leq 3.4$ можно вместо β использовать β_p . Для более высоких величин β_p эта зависимость нарушается. Сделано предположение, что этот эффект может быть связан с тем, что при больших значениях β_p в плазме появляются области, в которых полоидальный поток, плотность продольного тока и давление плазмы становятся отрицательными.

Ключевые слова: уравнение Грэда–Шафранова, ограничительные параметры, давление плазмы, аспектное отношение.

DOI: 10.61011/PJTF.2024.07.57464.19809

При вычислении равновесия плазмы в токамаках часто используют уравнение Грэда–Шафранова (ГШ), записанное в так называемой „канонической“ форме [1–5]:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} = -\mu_0 J_\phi(\psi, R). \quad (1)$$

Здесь R — большой радиус токамака, ψ — функция полоидального потока, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/м, J_ϕ — плотность продольного тока, которая описывается как

$$J_\phi = \lambda \left[\frac{R\beta}{R_0} A(\psi, \gamma_1) + R_0 \frac{1-\beta}{R} B(\psi, \gamma_2) \right] \quad (2)$$

или

$$J_\phi = \lambda \left[\frac{R\beta}{R_0} + R_0 \frac{1-\beta}{R} \right] \tilde{J}(\psi, \gamma_3). \quad (3)$$

Здесь параметр λ связан с нормировкой продольного тока плазмы I_p , параметр β связан с величиной β_p , являющейся отношением газокINETического давления плазмы к давлению полоидального магнитного поля. В работах [2,4–6] утверждается, что $\beta \approx \beta_p$, а в [4] отмечается, что разница между этими значениями не превышает 3%. $A(\psi, \gamma_1)$, $B(\psi, \gamma_2)$ и $\tilde{J}(\psi, \gamma_3)$ — произвольные функции. Обычно эти функции считаются зависящими от нормированного значения $\tilde{\psi} = (\psi - \psi_b)/(\psi_0 - \psi_b)$, где ψ_0 — значение функции на магнитной оси, а ψ_b — на границе плазменного шнура, но в некоторых случаях используется зависимость от $\tilde{\psi} = \psi - \psi_b$ [6], параметры γ_1 и γ_2 определяют внутреннюю индуктивность плазменного шнура l_i в (2), а параметр γ_3 — в (3).

Уравнение ГШ может иметь много решений. Для того чтобы выделить из них единственное, описывающее равновесие плазмы с конкретными характеристиками, нужно вводить несколько ограничительных параметров. Чаще всего такими параметрами являются I_p , β_p и l_i . Иногда вместо значения внутренней индуктивности используется значение запаса устойчивости в центре или на границе плазменного шнура [2].

Связь ограничительных параметров с параметрами, используемыми в уравнении ГШ, определяется соотношениями [3] (в декартовых координатах):

$$I_p = \int_S J_\phi(\lambda, \beta, \gamma_i, \tilde{\psi}, x, y) dS, \quad (4)$$

$$\beta_p = \frac{\int_S p(\lambda, \beta, \gamma_i, \tilde{\psi}, x, y) dS}{S \langle B_\theta^2 \rangle / 2\mu_0} = \frac{0.02}{I_p^2} \int_S p(\lambda, \beta, \gamma_i, \tilde{\psi}, x, y) dS, \quad (5)$$

$$l_i = \frac{2 \int V B_\theta^2 dV}{R_{ax} (\mu_0 I_p)^2}. \quad (6)$$

Угловые скобки обозначают усреднение по площади полоидального сечения S , $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/м, V — объем, занимаемый плазмой, B_θ — полоидальное магнитное поле, p — давление плазмы, R_{ax} — радиус, на котором расположена магнитная ось. В формуле (5) I_p приводится в МА, p — в кПа, S — в м², магнитное поле B_θ — в Т, линейные размеры R — в м.

Для того чтобы найти решения системы (4)–(6), необходимо несколько раз решать уравнение (1), подбирая его параметры таким образом, чтобы выполнялись соотношения (4)–(6).

Следовательно, если известно соотношение между β и β_p , то это существенно упрощает расчет равновесия плазмы. Поэтому многие делают такую замену без достаточных для этого обоснований. Насколько нам известно, до настоящего времени систематическими исследованиями этого соотношения практически никто не занимался.

На рис. 1 приведены результаты определения зависимости β от β_p , выполненного при помощи кода DINA [7]

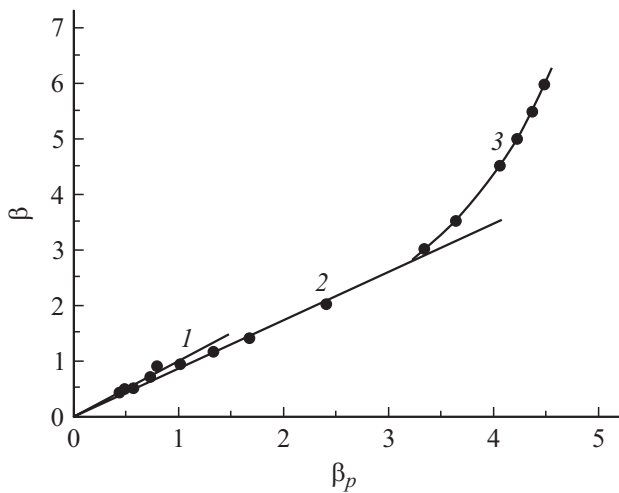


Рис. 1. Зависимость β от β_p . Пояснения в тексте.

с различными параметрами и для различных установок с $1 < R < 6$, $0.3 < a < 2$, $0.1 < I_p < 15$, $0.5 < B_\theta < 6$, вытянутостью $1 < K < 2$ с аспектным отношением $A \sim 3$. Используются также данные расчетов для установок с $A \sim 1.5$ и $\beta_p \sim 2$. Расчеты выполнялись для плазмы со свободной границей.

Прямая 1 на рис. 1 описывается выражением

$$\beta = 0.99\beta_p \text{ при } 0 \leq \beta_p \leq 1.5, \quad (7)$$

а прямая 2 — выражением

$$\beta = 0.89\beta_p \text{ при } 0 \leq \beta_p \leq 3.4. \quad (8)$$

Из рис. 1 видно, что при дальнейшем увеличении β_p линейная зависимость нарушается (кривая 3).

Следует отметить, что экспериментально величина β_p определяется со сравнительно невысокой точностью. Так, в работе [5] показано, что в экспериментах на установке Doublet III (США) β_p определялась с ошибкой от 10 до 40%, а на установке KSTAR (Корея) [8] — с ошибкой около 25%.

В настоящее время основные расчеты проводятся для плазмы, величина β_p для которой не превышает 2–3. В установке ИТЭР планируется работать с плазмой, у которой $\beta_p \approx 0.7$ [9], а у DEMO $\beta_p \approx 1$ [10].

Результаты настоящей работы показывают, что в этих случаях в уравнении ГШ вместо β можно использовать β_p .

Рассмотрим, что происходит при $\beta_p > A$. Когда β_p достигает величины аспектного отношения A , со стороны слабого поля появляется область, в которой продольный ток изменяет свое направление [11]. В этом случае нарушается соотношение между полоидальным и тороидальным бета.

При последующем увеличении β_p к границе плазмы приближается сепаратриса — поверхность, на которой величина магнитного потока и давление плазмы равны

нулю [12], а при дальнейшем росте полоидального бета со стороны слабого магнитного поля в плазме возникает область, в которой формально давление становится равным нулю [13]. Для иллюстрации этого утверждения были подобраны специальные модельные параметры, для которых данный эффект хорошо заметен.

В D–T-экспериментах на установке TFTR (США) использовалась плазма с величиной $\beta_p \approx 6$ [13].

На рис. 2 приведены зависимости давления плазмы вдоль экваториальной плоскости. Величина x на этом рисунке нормирована на малый радиус плазмы.

Кривая 1 рассчитана для токамака с $A = 1.5$ и $\beta_p = 2$. Видно, что в этом случае во всей области, занятой плазмой, давление плазмы положительное. Кривая 2 соответствует $A = 1.5$ и $\beta_p = 6$. Видно, что при таком давлении около внутреннего обхода тора появляется область, в которой давление отрицательное. Отрицательной также становится и величина магнитного потока ψ .

Распределения поверхностей равного давления приведены на рис. 3. Рис. 3, а соответствует кривой 1 на рис. 2, а рис. 3, б — кривой 2 на рис. 2. Видно, что в рассматриваемом случае область отрицательного давления занимает значительную часть плазменного шнура.

Из работы [13] следует, что в области с отрицательным давлением на самом деле плазмы нет. Вошедшая в объем, занятый плазмой, сепаратриса образует новую границу плазмы, и, следовательно, объем плазмы уменьшается.

Возможно, что нарушение линейной зависимости β от β_p связано с появлением в плазме областей с отрицательными давлением и плотностью тока.

На основе проведенных исследований можно сделать следующие выводы.

1. Если в установке $\beta_p \leq 3$, то при расчетах равновесия плазмы вместо β можно использовать величину β_p .
2. Если в установке $\beta_p > 3$, то при расчетах равновесия плазмы замена невозможна.

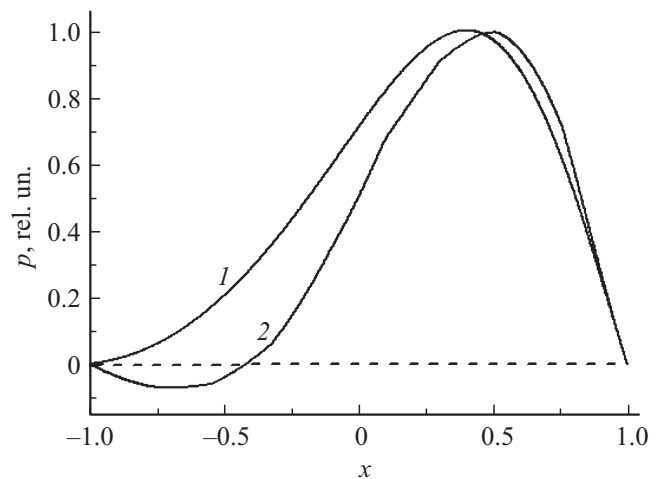


Рис. 2. Зависимость распределения давления плазмы в экваториальной плоскости от величины $\beta_p \cdot \beta_p = 2$ (1) и 6(2).

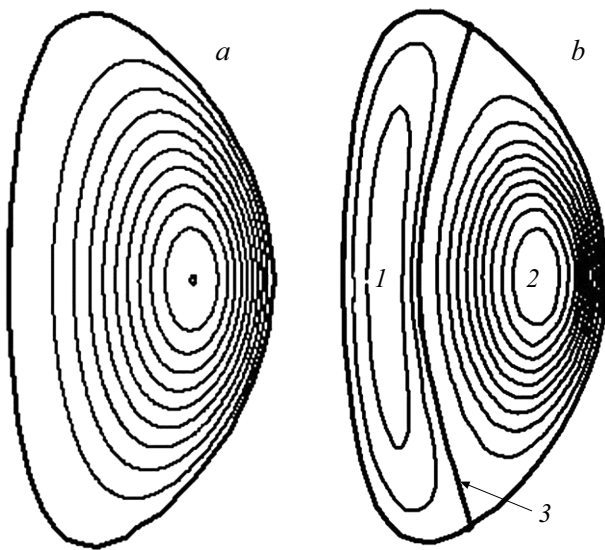


Рис. 3. Распределение поверхностей равного давления. $\beta_p = 2$ (a) и 6 (b). 1 — $p < 0$, 2 — $p > 0$, 3 — $p = 0$ (сепаратриса).

3. Если в плазме появляются области, в которых полоидальный магнитный поток, давление и плотность тока плазмы становятся отрицательными, то вычисление равновесия плазмы нужно проводить только по области, занятой плазмой с положительным давлением.

Влияние областей отрицательного давления и отрицательной плотности тока на поведение плазмы требует отдельного рассмотрения.

Финансирование работы

Работа выполнена в рамках государственного задания НИЦ „Курчатовский институт“.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] В.Д. Шафранов, *Вопросы теории плазмы*, под ред. М.А. Леонтовича (Госатомиздат, М., 1963), вып. 2, с. 92. [V.D. Shafranov, in *Reviews of plasma physics*, ed. by M.A. Leontovich (Consultants Bureau, N.Y., 1975), vol. 2.
- [2] M.S. Chu, D. Dobrott, H. Jensen, T. Tamano, *Phys. Fluids*, **17**, 1183 (1974). DOI: 10.1063/1.1694863
- [3] Y.M. Jeon, *J. Korean Phys. Soc.*, **67**, 843 (2020). DOI: 10.3938/jkps.67.843
- [4] H. Winter, D.B. Albert, *Separatrix location using magnetic measurements in ASDEX tokamak*, IPP III/57 (Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching, 1980).
- [5] J.L. Luxon, B.V. Brown, *Nucl. Fusion*, **22**, 813 (1982). DOI: 10.1088/0029-5515/22/6/009
- [6] Д.Ю. Сычугов, *Вопр. атомной науки и техники. Сер. Физика плазмы*, вып. 3, 67 (2009).
- [7] R.R. Khayrutdinov, V.E. Lukash, *J. Comput. Phys.*, **109**, 193 (1993). DOI: 10.1006/jcph.1993.1211
- [8] J.G. Bak, S.G. Lee, H.S. Kim, *Rev. Sci. Instrum.*, **82**, 063504 (2011). DOI: 10.1063/1.3600455
- [9] B.J. Green and ITER International Team and Participant Teams, *Plasma Phys. Control. Fusion*, **45**, 687 (2003). DOI: 10.1088/0741-3335/45/5/312
- [10] B.V. Kuteev, Yu.S. Shpanskiy and DEMO-FNS Team, *Nucl. Fusion*, **57**, 076039 (2017). DOI: 10.1088/1741-4326/aab6dcb
- [11] J.D. Callen, R.A. Dory, *Phys. Fluids*, **15**, 1523 (1972). DOI: 10.1063/1.1694118
- [12] V.S. Mukhovatov, V.D. Shafranov, *Nucl. Fusion*, **11**, 605 (1971). DOI: 10.1088/0029-5515/11/6/005
- [13] S.A. Sabbagh, R.A. Gross, M.E. Mauel, G.A. Navratil, M.G. Bell, R. Bell, M. Bitter, N.L. Bretz, R.V. Budny, C.E. Bush, M.S. Chance, P.C. Efthimion, F.D. Fredrickson, Ft. Hatcher, R.J. Hawryluk, S.P. Hirshman, A.C. Janos, S.C. Jardin, D.L. Jassby, J. Manickam, D.C. McCune, K.M. McGuire, S.S. Medley, D. Mueller, Y. Nagayama, D.K. Owens, M. Okabayashi, H.K. Park, A.T. Ramsey, B.C. Stratton, E.J. Synakowski, G. Taylor, R.M. Wieland, M.C. Zarnstorf, J. Kesner, E.S. Marmor, J.L. Terry, *Phys. Fluids B*, **3**, 2277 (1991). DOI: 10.1063/1.859647