01

Модель спинового эффекта Пельтье в немагнитных хиральных проводниках

© В.К. Игнатьев

Волгоградский государственный университет,
400062 Волгоград, Россия
e-mail: vkignatjev@yandex.ru

Поступило в Редакцию 27 июня 2023 г.
В окончательной редакции 21 февраля 2024 г.
Принято к публикации 25 февраля 2024 г.

Показано, что в поликристаллическом проводнике с геликоидно-хиральной структурой и сильным спин-орбитальным взаимодействием возможна генерация продольно поляризованного спинового тока и связанного с ним потока тепла. При заданной плотности зарядового тока плотность потока тепла зависит от локальной температуры, но не от ее градиента, и пропорциональна коэффициенту решеточной теплопроводности.

Ключевые слова: спиновая калоритроника, спиновые термогальванические эффекты, спин-орбитальное взаимодействие, спин-фононный гамильтониан, локально квазиравновесное распределение, геликоидная хиральность, поликристаллический проводник.

DOI: 10.61011/JTF.2024.04.57522.159-23

Введение

Спиновый эффект Пельтье (СЭП, SPE), заключающийся в вызванной спиновым током генерации потока тепла, был первоначально открыт в магнитных диэлектриках [1]. Одним из оснований возможности СЭП была его взаимность со спиновым эффектом Зеебека (СЭЗ, SSE), заключающимся в вызванной градиентом температуры генерации спинового тока и обнаруженным ранее в магнитных диэлектриках [2]. В работе [1] создаваемый потоком тепла градиент температуры регистрировался микротермопарами. Методом численного моделирования были качественно проверены соотношения взаимности между СЭЗ и СЭП.

Посредством использования метода активной локальной термографии (LIT) удалось значительно улучшить пространственное разрешение и порог чувствительности температурных измерений при исследовании СЭП [3], в частности, соотношений взаимности для него, которые были обоснованы аналитически [4]. Дальнейшее улучшение разрешения и чувствительности локальной термографии методом пассивной терморефракции [5–8] позволило экспериментально верифицировать соотношения взаимности между СЭЗ и СЭП в магнитных диэлектриках [9].

Следует отметить, что СЭЗ был первоначально открыт в проводящих ферромагнитных металлах [10]. Авторы объяснили этот эффект магнонными и фононными степенями свободы [11]. Магнонная теория была предложена и для СЭП в магнитных диэлектриках [12,13]. Модель магнонной теплопроводности, основанная на анализе магнон-фононного взаимодействия в рамках теории Больцмана, позволила получить хорошее согласие рассчитанных и экспериментальных данных по СЭЗ и СЭП в магнитных диэлектриках [14]. В дальнейшем СЭЗ был обнаружен в немагнитных материалах [15,16]. Теоретическая модель СЭЗ в парамагнитном диэлектрике была экспериментально подтверждена [17]. Теоретически обоснованная методами неравновесной функции Грина и неравновесной термодинамики [18] и экспериментально подтвержденная [9] симметрия СЭЗ и СЭП позволяет предположить, что СЭП, как и СЭЗ, возможен и в проводящих магнетиках, в которых спиновый момент переносится электронами проводимости [19].

Эффективное использование взаимодействия между спиновым током и потоком тепла является одним из основных вопросов спиновой калоритроники. Новые возможности для этого открывает экспериментально обнаруженная активация СЭЗ в немагнитных материалах потоком хиральных фононов [20]. По мнению авторов, обладающие угловым моментом хиральные фононы нарушают симметрию материала и создают возможность генерации спинового тока при наличии градиента температуры. Такое нарушение симметрии существует без внешних воздействий в энантиочистых кристаллах с геликоидной хиральностью. В настоящее время применение хиральных сред и волн рассматривается как основное направление развития спинтроники [21]. Кристаллографическая хиральность (по терминологии работы [22]) может сопровождаться гелимагнитной хиральностью, например, из-за взаимодействия Дзялошинского-Мории. Эти эффекты проанализированы в работах [23,24].

Экспериментально исследованные СЭЗ и СЭП, по сути, являются магнитотермогальваническими. Они проявляются в парамагнетиках во внешнем магнитном поле или в намагниченных ферромагнетиках. Вектор магнитной индукции или остаточной намагниченности задает выделенное направление в изотропном веществе.

В хиральных структурах такое направление может задать ось хиральности. Поэтому перспективным материалом для немагнитной спиновой калоритроники могут быть материалы с кристаллографической геликоидной хиральностью. Для эффективного управления большими потоками тепла управляющий элемент должен быть не тонкопленочным, а массивным, поэтому представляет интерес модель СЭП в поликристаллических хиральных структурах.

Многие неорганические материалы обладают хиральными кристаллическими структурами. Хиральность кристаллических материалов определяется симметрией направлений (симметрией второго рода) [25]. Из 32 кристаллографических точечных групп только 11 (1, 2, 3, 4, 6, 222, 422, 32, 622, 23 и 432), в которых отсутствует операция симметрии второго рода (инверсия, отражение, ротоинверсия и скользящее отражение), являются энантиоморфными. Эти энантиоморфные точечные группы могут определять геометрически хиральные классы локальной симметрии кристаллов. Интегрирование решеток Браве с энантиоморфными точечными группами дает 65 пространственных групп, которые могут образовывать хиральные кристаллические структуры, их называют группами Сонке [26].

Однако среди групп Сонке только 22 энантиоморфные пространственные группы (11 энантиоморфных пар) могут содержать геликоидную структуру [27]. Поэтому неорганические кристаллические материалы, имеющие геликоидную хиральность в расположении атомов, относятся к этим энантиоморфным пространственным группам. В остальных 43 группах дальнее упорядочение атомов в основном ахирально, но каждая асимметричная единица обладает локальной хиральностью и поэтому также может образовывать хиральные кристаллические структуры. Неорганические кристаллические материалы, имеющие хиральную кристаллическую структуру, могут легко создавать асимметричные и энантиоселективные поверхности, поскольку хиральное расположение атомов продолжается на поверхности [28]. Такие кристаллические грани обеспечивают асимметричную химическую реакционную способность материала и возможность биологического распознавания. Например, сообщалось об асимметричной адсорбции энантиомеров аминокислот и энантиоселективном катализе с использованием кристаллов кварца [29].

Объемные структуры чистых металлов не имеют хиральных свойств, за исключением марганца в β-модификации [30]. В работе [31] на примере чистого алюминия показано, что формирование выделенного направления в макроскопических металлах возможно в случае закалки образца при наличии деформации. Спиральность имеет не круговой характер, а является ломаной линией, образованной ребрами плоскостей системы 111. В работе [32] приведен обзор существующих работ по синтезу хиральных наноструктур на основе благородных металлов. Основу таких метаматериалов составляют наночастицы металлов, изготовленные, например, методом нанолитографии. Эксперименты показывают эффективность синтезированных хиральных метаматериалов в оптике. Потенциально применимой в задачах спинтроники является работа [33], в которой представлен метод получения самоорганизующихся хиральных структур на основе наночастиц золота.

1. Спиновый гамильтониан электрона проводимости в геликоидно-хиральном металле

Пусть кристаллит объемом V содержит N узлов, в каждом из которых находятся одинаковые ионы с эффективным зарядом $+Ze$. Такая решетка создает электрическое поле

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{eZ}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=1}^{N}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_l}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_l\right|^3}. \tag{1}$$

Спин-орбитальная добавка в энергию электрона имеет вид [34]

$$\hat{V} = \frac{\hbar e}{2m^2c^2}\left[\mathbf{E}(\mathbf{r})\times\hat{\mathbf{p}}\right]\hat{\mathbf{s}}. \tag{2}$$

Здесь m — масса электрона с зарядом — e.

Построим эффективный гамильтониан электрона проводимости для возмущения (2) в поле (1), усреднив оператор (2) по координатам электронной волновой функции, выполнив замену переменных $\mathbf{r}-\mathbf{r}_l \to \mathbf{r}$ и учитывая, что оператор момента коммутирует с любым центральным потенциалом

$$\hat{V}_e = -\frac{\hbar^2 e^2 Z}{8\pi\varepsilon_0 m^2 c^2}\,\hat{\mathbf{s}}\left\langle\psi(\mathbf{r}+\mathbf{r}_l)\right|\frac{\hat{\mathbf{l}}}{r^3}\left|\psi(\mathbf{r}+\mathbf{r}_l)\right\rangle. \tag{3}$$

Здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Запишем волновую функцию коллективизированного электрона проводимости в виде функции Ванье [35]

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N}\Psi\Big(\mathbf{r}-\mathbf{R}_n\Big)\exp\Big(i\mathbf{k}\mathbf{R}_n\Big), \tag{4}$$

где $\Psi(\mathbf{r})$ — атомарная функция электрона, $\mathbf{R}_n$ — вектор трансляции. Тогда

$$\hat{V}_e = -\frac{\hbar^2 e^2 Z}{8\pi\varepsilon_0 m^2 c^2 N}\,\hat{\mathbf{s}}\Big(i\mathbf{k}\Big(\mathbf{R}_\mathbf{n}-\mathbf{R}_m\Big)\Big)$$
$$\times\Big\langle\psi\Big(\mathbf{r}+\mathbf{r}_l-\mathbf{R}_m\Big)\Big|\frac{\hat{\mathbf{l}}}{r^3}\Big|\Psi\Big(\mathbf{r}+\mathbf{r}_l-\mathbf{R}_n\Big)\Big\rangle. \tag{5}$$

В приближении ближайших соседей квантовое среднее в правой части (5) отлично от нуля только при

$\mathbf{R}_n - \mathbf{r}_k = 0$ или $\mathbf{a}_\nu$ и $\mathbf{R}_m - \mathbf{r}_k = 0$ или $\mathbf{a}_\nu$, где $\mathbf{a}_\nu$ — вектор, проведенный к ближайшему соседу.

$$\hat{V}_e = -\frac{\hbar^2 e^2 Z}{8\pi\varepsilon_0 m^2 c^2}\hat{s}_\alpha\left\{\mathrm{Re}\left\langle\Psi\middle|\frac{\hat{l}_\alpha}{r^3}\middle|\Psi\right\rangle + 2\cos(\mathbf{k}\mathbf{a}_\nu)\right.$$
$$\left.\times\mathrm{Re}\left\langle\Psi_\nu^+\middle|\frac{\hat{l}_\alpha}{r^3}\middle|\Psi\right\rangle + 2\sin(\mathbf{k}\mathbf{a}_\nu)\mathrm{Im}\left\langle\Psi_\nu^-\middle|\frac{\hat{l}_\alpha}{r^3}\middle|\Psi\right\rangle\right\}.$$

Здесь $\Psi_\nu^\pm(\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{r}+\mathbf{a}_\nu) \pm \Psi(\mathbf{r}-\mathbf{a}_\nu)$.

Рассматривая СЭП только в металлах, воспользуемся для электронов проводимости приближением идеального ферми-газа. Применимость этой модели обоснована тем, что термодинамика ферми-системы определяется ее микроскопической структурой только вблизи поверхности Ферми [36]. Экспериментальные исследования температурной зависимости электронной теплоемкости в металлах показывают, что она хорошо соответствует модели идеального ферми-газа. При этом для большинства металлов эффективная масса электрона проводимости m^* близка к массе свободного электрона. Поэтому $\mathbf{k} = -m^*\mathbf{j}/(\hbar e n_e)$, где $\mathbf{j}$ — плотность зарядового тока, n_e — концентрация электронов проводимости.

В первом порядке малости по $(\mathbf{j}\mathbf{a}_\nu)$ получаем

$$V_e = \frac{\hbar^2 e^2 Z}{8\pi\varepsilon_0 m^2 c^2}(-\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1 + \mathbf{J})\hat{\mathbf{s}}, \tag{6}$$

$$\mathbf{I}_0 = \mathrm{Re}\left\langle\Psi\middle|\frac{\hat{\mathbf{l}}}{r^3}\middle|\Psi\right\rangle, \quad \mathbf{I}_1 = 2\mathrm{Re}\left\langle\Psi_\nu^+\middle|\frac{\hat{\mathbf{l}}}{r^3}\middle|\Psi\right\rangle,$$
$$\mathbf{J} = \frac{2m^*}{\hbar e n_e}(\mathbf{j}\mathbf{a}_\nu)\mathrm{Im}\left\langle\Psi_\nu^-\middle|\frac{\hat{\mathbf{l}}}{r^3}\middle|\Psi\right\rangle. \tag{7}$$

Здесь подразумевается суммирование в (7) и далее по ν по парам симметрично расположенных ближайших соседей. В центрально-симметричном кристаллите $\mathbf{J} = 0$, поскольку функция $\Psi_\nu^-(\mathbf{r})$ имеет четность, противоположную четности функции $\Psi(\mathbf{r})$.

Рассмотрим кристаллит с геликоидной хиральностью. Его кристаллическую решетку можно представить как результат кручения центрально-симметричной решетки вокруг оси хиральности. Так, кручение переводит центрально-симметричный кристаллит $P\bar{3}1m$ в геликоидно хиральный $P6_322$.

Кручение вдоль оси хиральности можно описать аксиальным вектором $\Omega(\mathbf{r}) = (\mathbf{r}\mathbf{n})\omega\mathbf{n}$. Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси хиральности, ω — псевдоскаляр, погонное кручение. Операции кручения соответствует преобразование координат $r'_\alpha = r_\alpha + u_\alpha(\mathbf{r})$, где $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = [\Omega(\mathbf{r})\times\mathbf{r}] = (\mathbf{r}\mathbf{n})\omega[\mathbf{n}\times\mathbf{r}]$.

При преобразовании координат волновая функция и оператор момента в (7) преобразуются по закону

$$dr'_\alpha = dr_\alpha + \frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\beta}dr_\beta,$$

$$dr_\alpha = \left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial r_\alpha}\right)^{-1}dr'_\beta \approx dr'_\alpha - \frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\beta}dr'_\beta,$$

$$\hat{p}'_\alpha = \hat{p}_\alpha - \frac{\partial u_\beta}{\partial r_\alpha}\hat{p}_\beta,$$

$$\hat{l}'_\alpha\frac{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}}{\hbar}r'_\beta\hat{p}'_\gamma = \hat{l}_\alpha + \frac{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}}{\hbar}\left(u_\beta\hat{p}_\gamma - r_\beta\frac{\partial u_\delta}{\partial r_\gamma}\hat{p}_\delta - u_\beta\frac{\partial u_\delta}{\partial r_\gamma}\hat{p}_\delta\right),$$

$$\Psi(\mathbf{r}') = \Psi(\mathbf{r}) + \frac{\partial\Psi}{\partial r_\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\beta}r_\beta.$$

Здесь $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — единичный антисимметричный тензор Леви-Чивитты. В линейном по ω приближении получаем

$$\delta r_\alpha = r'_\alpha - r_\alpha = \omega\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}n_\beta n_\delta r_\gamma r_\delta,$$

$$\delta\hat{p}_\alpha = \hat{p}'_\alpha - \hat{p}_\alpha = -\omega n_\sigma(\varepsilon_{\beta\sigma\alpha}n_\delta r_\delta + \varepsilon_{\beta\sigma\gamma}n_\alpha r_\gamma)\hat{p}_\beta,$$

$$\delta\hat{l}_\alpha = \hat{l}'_\alpha - \hat{l}_\alpha = \omega\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}n_\beta n_\delta(r_\delta\hat{l}_\gamma + r_\gamma\hat{l}_\delta),$$

$$\delta\Psi(\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{r}') - \Psi(\mathbf{r}) = i\omega n_\beta n_\delta r_\delta\hat{l}_\beta\Psi(\mathbf{r}). \tag{8}$$

$$\delta I_{0\alpha'} = \frac{2m^*\omega}{\hbar e n_e}\varepsilon_{\alpha'\beta'\gamma'}n_{\beta'}n_{\delta'}\mathrm{Re}\left\langle\Psi\middle|\frac{r_{\gamma'}\hat{l}_{\delta'}}{r^3}\middle|\Psi\right\rangle,$$

$$\delta I_{1\alpha'} = \frac{2m^*\omega}{\hbar e n_e}\varepsilon_{\alpha'\beta'\gamma'}n_{\beta'}n_{\delta'}\mathrm{Re}\left\langle\Psi_\nu^+\middle|\frac{r_{\gamma'}\hat{l}_{\delta'}}{r^3}\middle|\Psi\right\rangle,$$

$$\delta J_{\alpha'} = \frac{2m^*\omega}{\hbar e n_e}\varepsilon_{\alpha'\beta'\gamma'}n_{\beta'}n_{\delta'}j_{\sigma'}a_{\nu\sigma'}\mathrm{Im}\left\langle\Psi_\nu^-\middle|\frac{r_{\gamma'}\hat{l}_{\delta'}}{r^3}\middle|\Psi\right\rangle. \tag{9}$$

Величина $a_\nu\omega$ в формуле (8) является углом поворота ее кристаллографической плоскости, перпендикулярной оси хиральности, относительно соседней. Оператор в квантовом среднем в соотношениях (9) нечетный, а функция $\Psi_\nu^+(\mathbf{r})$ имеет четность, совпадающую с четностью функции $\Psi(\mathbf{r})$. Поэтому $\delta\mathbf{I}_0 = \delta\mathbf{I}_1 = 0$.

В кристаллическом поле (1) положение осей, в которых записаны волновые функции электронов, определяются положением кристаллофизических осей. Поэтому можно считать, что соотношения (9) записаны в системе координат, связанной с осями кристаллита. Введем лабораторную систему координат, связанную с приборами, которые задают ток проводимости и измеряют компоненты спина и потока энергии. Компоненты векторов и тензоров в лабораторной системе будем обозначать нештрихованными индексами, а в системе координат, связанной с кристаллофизических осями, — штрихованными, как в формуле (9). Вектор $\mathbf{n}$, как и векторы $\mathbf{a}_\nu$, задан в системы кристаллофизических осей, а вектор $\mathbf{j}$, как и вектор $\mathbf{s}$, в формуле (6) — в лабораторной системе.

Преобразуем вектор плотности тока из лабораторной системы в систему кристаллофизических осей $j_{\sigma'} = p_{\sigma'\sigma}j_\sigma$, а векторы $\mathbf{I}$ и $\mathbf{J}$ из системы кристаллических осей — в лабораторную $J_\alpha = p^{-1}_{\alpha\alpha'}J_{\alpha'}$ где $p_{\alpha'\alpha}$ — унитарная матрица поворота. Подставим это преобразование в уравнение (6) и усредним векторы $\mathbf{I}$ и $\mathbf{J}$ в макроскопической области по случайным ориентациям кристаллитов. Матрицу поворота удобно выражать через углы Эйлера. Тогда усреднение в макроскопически изотропной области сводится к усреднению по случайным равномерно распределенным углам Эйлера. При этом квантовое среднее в формуле (8) является скаляром, который зависит только от свойств кристалла, может быть вычислен в системе кристаллофизических осей и не меняется при усреднении по случайным ориентациям кристаллитов.

$$\overline{\mathbf{l}}_0=\overline{\mathbf{l}}_1=0,\quad \overline{\delta\mathbf{J}}=\mathbf{J}_h=\mathbf{j}\,\frac{m^*\omega}{3\hbar e n_e}\,\mathrm{Im}\Big\langle\Psi_\nu^-\Big|\mathbf{a}_\nu\,\frac{\lfloor\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{l}}\rfloor}{r^3}\Big|\Psi\Big\rangle. \tag{10}$$

Здесь индексом h обозначен вклад, обусловленный геликоидной хиральностью среды.

2. Эффективный спин-фононный гамильтониан

Пусть в кристаллите с геликоидной хиральностью распространяется поляризованная вдоль вектора e плоская гармоническая волна с волновым вектором $\mathbf{K}$ и частотой $\Omega(\mathbf{K})$ вида $\mathbf{u}(t,\mathbf{r})=\mathbf{a}(t,\mathbf{r})+$ $+\mathbf{a}^*(t,\mathbf{r})$, $\mathbf{a}(t,\mathbf{r})=\mathbf{e}a\exp(i\Omega t-i\mathbf{K}\mathbf{r})$. Для деформации, создаваемой этой волной по аналогии с соотношениями (8), получаем

$$\delta\hat{l}_\alpha=\hat{l}'_\alpha-\hat{l}_\alpha=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Big(\Big(a_\beta+a^*_\beta\Big)\hat{p}_\gamma$$
$$+iK_\gamma\Big(r_\beta+a_\beta+a^*_\beta\Big)\Big(a_\delta-a^*_\delta\Big)\hat{p}_\delta\Big).$$

Учитывая, что оператор импульса мнимый, получим

$$\delta\hat{\mathbf{l}}=\delta_1\hat{\mathbf{l}}-\delta_1\hat{\mathbf{l}}^*+\delta_2\hat{\mathbf{l}}-\delta_2\hat{\mathbf{l}}^*+\delta_3\hat{\mathbf{l}}-\delta_3\hat{\mathbf{l}}^*,$$

$$\delta_1\hat{\mathbf{l}}=a\exp\Big(i\Omega t-i\mathbf{K}\mathbf{r}\Big)\Big\{[\mathbf{e}\times\hat{\mathbf{p}}]+i[\mathbf{r}\times\mathbf{K}](\mathbf{e}\hat{\mathbf{p}})\Big\},$$

$$\delta_2\hat{\mathbf{l}}=-ia^*a(\mathbf{e}\hat{\mathbf{p}})[\mathbf{e}\times\mathbf{K}],$$

$$\delta_3\hat{\mathbf{l}}=ia^2\exp(i2\Omega t-i2\mathbf{K}\mathbf{r})(\mathbf{e}\hat{\mathbf{p}})[\mathbf{e}\times\mathbf{K}].$$

Здесь составляющая $\delta_2\hat{\mathbf{l}}$ не зависит явно от времени и координат. Аналогично

$$\psi'-\psi=\frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\beta}r_\beta\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha}=\delta\psi+\delta\psi^*,$$

$$\delta\psi=\frac{a}{\hbar}\exp(i\Omega t-i\mathbf{K}\mathbf{r})(\mathbf{K}\mathbf{r})(\mathbf{e}\hat{\mathbf{p}})\psi.$$

Для не зависящих от времени явно составляющих каждого слагаемого в (3) получаем

$$\mathbf{A}=\Big\langle\psi'\Big|\frac{\hat{\mathbf{l}}}{r^3}\Big|\psi'\Big\rangle-\Big\langle\psi\Big|\frac{\hat{\mathbf{l}}}{r^3}\Big|\psi\Big\rangle=\Big\langle\psi\Big|\frac{\delta_2\hat{\mathbf{l}}-\delta_2\hat{\mathbf{l}}^*}{r^3}\Big|\psi\Big\rangle$$
$$+\Big\langle\delta\psi\Big|\frac{\hat{\mathbf{l}}}{r^3}\Big|\delta\psi\Big\rangle+\Big\langle\delta\psi^*\Big|\frac{\hat{\mathbf{l}}}{r^3}\Big|\delta\psi^*\Big\rangle+\Big\langle\delta\psi\Big|\frac{\delta_1\hat{\mathbf{l}}}{r^3}\Big|\psi\Big\rangle$$
$$-\Big\langle\delta\psi^*\Big|\frac{\delta_1\hat{\mathbf{l}}^*}{r^3}\Big|\psi\Big\rangle+\Big\langle\psi\Big|\frac{\delta_1\hat{\mathbf{l}}}{r^3}\Big|\delta\psi^*\Big\rangle-\Big\langle\psi\Big|\frac{\delta_1\hat{\mathbf{l}}^*}{r^3}\Big|\delta\psi\Big\rangle$$
$$+\Big\langle\delta\psi\Big|\frac{\delta_3\hat{\mathbf{l}}}{r^3}\Big|\delta\psi^*\Big\rangle-\Big\langle\delta\psi^*\Big|\frac{\delta_3\hat{\mathbf{l}}^*}{r^3}\Big|\delta\psi\Big\rangle.$$

Для построения эффективного спин-фононного гамильтониана в представлении вторичного квантования заменим $a\to\hat{a}_{\mathbf{K}}\sqrt{\frac{\hbar}{2wV\Omega}}$, $a^*\to\hat{a}^+_{\mathbf{K}}\sqrt{\frac{\hbar}{2wV\Omega}}$, где w — плотность тела, V — его объем и, учитывая правила коммутации $[\hat{a},\hat{a}^+]=1$, выделим составляющие, пропорциональные оператору плотности числа фононов с волновым вектором $\mathbf{K}$ $\hat{c}_{\mathbf{K}}=\hat{a}^+_{\mathbf{K}}\hat{a}_{\mathbf{K}}/V$, и построим оператор

$$\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{K}}=\frac{\hat{c}_{\mathbf{K}}}{2\hbar\Omega w}(\mathbf{e}\hat{\mathbf{p}})(\mathbf{K}\mathbf{r})\frac{\hat{\mathbf{l}}}{r^3}(\mathbf{K}\mathbf{r})(\mathbf{e}\hat{\mathbf{p}}).$$

Для ансамбля равновесных тепловых фононов усредним этот оператор по случайным ориентациям векторов $\mathbf{K}$ и $\mathbf{e}$:

$$\Big\langle\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{K}}\Big\rangle=\frac{\langle\hat{c}_{\mathbf{K}}\rangle}{2\hbar\Omega w}\Big\langle e_\alpha e_\gamma\Big\rangle\Big\langle K_\beta K_\delta\Big\rangle\hat{p}_\alpha r_\beta\frac{\hat{\mathbf{l}}}{r^3}r_\delta\hat{p}_\gamma.$$

Если в макроскопически изотропной среде все направления векторов $\mathbf{K}$ и $\mathbf{e}$ равновероятны и независимы, то $\langle e_\alpha e_\gamma\rangle=\delta_{\alpha\gamma}/3$, $\langle K_\beta K_\delta\rangle=\delta_{\beta\delta}K^2/3$ В изотропной среде можно считать частоту фонона Ω однозначной монотонной функцией модуля его волнового числа и положить $K=\Omega/v_\Omega$, где v_Ω — фазовая скорость фонона, $\langle\hat{c}_{\mathbf{k}}\rangle=\hat{c}_\Omega$. Тогда, учитывая коммутационные соотношения между операторами координат, компонентов импульса и момента, получим

$$\Big\langle\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{K}}\Big\rangle=\hat{\mathbf{A}}_\Omega=\frac{\hat{h}_\Omega}{18\hbar^2wv_\Omega^2}\hat{p}_\alpha r_\beta\frac{\hat{\mathbf{l}}}{r^3}r_\beta\hat{p}_\alpha. \tag{11}$$

Здесь $\hat{h}_\omega=\hbar\Omega\hat{c}_\Omega$ — оператор плотности гамильтониана фононов с частотой Ω.

В гармоническом приближении фононы не взаимодействуют. Обусловленное ангармонизмом взаимодействие фононов будем считать одним из возможных механизмов релаксации. Тогда можно ввести оператор плотности невозмущенного гамильтониана системы фононов как сумму гамильтонианов подансамблей фононов с частотой Ω: $\hat{h}_{0p}=\sum\limits_\Omega\hat{h}_\Omega$, где суммирование выполняется по всем частотам фононного спектра. Введем среднюю по фононному спектру фазовую скорость v. Тогда из (11) получаем

$$\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{K}}=\sum_\Omega\hat{\mathbf{A}}_\Omega=\frac{\hat{h}_{0p}}{18\hbar^2wv_\Omega^2}\hat{p}_\alpha r_\beta\frac{\hat{\mathbf{l}}}{r^3}r_\beta\hat{p}_\alpha. \tag{12}$$

Формулы (9) для обусловленной только фононами деформации центрально-симметричного кристаллита будут иметь вид

$$\delta\mathbf{l}_0=\frac{m^*}{\hbar e n_e}\mathrm{Re}\Big\langle\Psi\Big|\hat{\mathbf{A}}\Big|\Psi\Big\rangle,\quad \delta_1=\frac{2m^*}{\hbar e n_e}\mathrm{Re}\Big\langle\Psi_\nu^+\Big|\hat{\mathbf{A}}\Big|\Psi\Big\rangle,$$

$$\delta\mathbf{J}=\frac{2m^*(\mathbf{j}\mathbf{a}_\nu)}{\hbar e n_e}\mathrm{Im}\Big\langle\Psi_\nu^-\Big|\hat{\mathbf{A}}\Big|\Psi\Big\rangle. \tag{13}$$

Поскольку оператор (12) четный, $\delta\mathbf{l}_0\neq0$ и $\delta\mathbf{l}_1\neq0$, но при усреднении по случайным ориентациям кристаллов получаем $\overline{\delta\mathbf{l}_0}=\overline{\delta\mathbf{l}_1}=0$. При обусловленной только фононами деформации $\delta\mathbf{J}=0$. Если фонон распространяется в геликоидной хиральной среде, то последняя формула (13) принимает вид

$$\delta\mathbf{J}=\frac{2m^*(\mathbf{j}\mathbf{a}_\nu)}{\hbar e n_e}\,\mathrm{Im}\Big\{\Big\langle\Psi_\nu^-\Big|\delta\hat{\mathbf{A}}\Big|\Psi\Big\rangle+\Big\langle\delta\Psi_\nu^-\Big|\hat{\mathbf{A}}\Big|\Psi\Big\rangle$$

$$+\Big\langle\Psi_\nu^-\Big|\hat{\mathbf{A}}\Big|\delta\Psi\Big\rangle\Big\}=\frac{m^*\omega j_{\sigma'}a_{\nu\sigma'}\hat{h}_0}{9w\nu^2\hbar^3 e n_e}\,\mathrm{Im}\Big\{\Big\langle\Psi_\nu^-\Big|\hat{\mathbf{B}}\Big|\Psi\Big\rangle\Big\},$$

$$\delta\hat{\mathbf{A}}=\frac{\hat{h}_0/\hbar^2}{18w\nu^2}\Big\{\hat{p}_\alpha r_\beta\frac{\delta\hat{\mathbf{l}}}{r^3}r_\beta\hat{p}_\alpha+\delta\hat{p}_\alpha r_\beta\frac{\hat{\mathbf{l}}}{r^3}r_\beta\hat{p}_\alpha+$$

$$+\hat{p}_\alpha r_\beta\frac{\hat{\mathbf{l}}}{r^3}r_\beta\delta\hat{p}_\alpha+\hat{p}_\alpha\delta r_\beta\frac{\hat{\mathbf{l}}}{r^3}r_\beta\hat{p}_\alpha+\hat{p}_\alpha r_\beta\frac{\hat{\mathbf{l}}}{r^3}\delta r_\beta\hat{p}_\alpha\Big\}. \tag{14}$$

$$\hat{B}_{\alpha'}=\varepsilon_{\alpha'\beta'\gamma'}n_{\beta'}n_{\delta'}\hat{p}_{\mu'}r_\chi\frac{r_{\delta'}\hat{l}_{\gamma'}+r_{\gamma'}\hat{l}_{\delta'}}{r^3}r_{\chi'}\hat{p}_{\mu'}$$

$$+\varepsilon_{\chi'\beta'\gamma}n_{\beta'}n_{\delta'}\hat{p}_{\mu'}r_\gamma\left(r_{\delta'}\frac{\hat{l}_{\alpha'}}{r^3}r_{\chi'}\hat{p}_{\mu'}+\frac{\hat{l}_{\alpha'}}{r^3}r_{\chi'}r_{\delta'}\hat{p}_{\mu'}\right)$$

$$-n_{\eta'}\Big(\varepsilon_{\beta'\eta'\mu'}n_{\delta'}r_{\delta'}+\varepsilon_{\beta'\eta'\gamma'}n_{\mu'}r_{\gamma'}\Big)\hat{p}_{\beta'}r_{\chi'}\frac{\hat{l}_{\alpha'}}{r^3}r_{\chi'}\hat{p}_{\mu'}$$

$$-n_{\eta'}\hat{p}_{\mu'}r_{\chi'}\frac{\hat{l}_{\alpha'}}{r^3}r_{\chi'}\Big(\varepsilon_{\beta'\eta'\mu'}n_{\delta'}r_{\delta'}+\varepsilon_{\beta'\eta'\gamma'}n_{\mu'}r_{\gamma'}\Big)\hat{p}_{\beta'}$$

$$+in_{\beta'}n_{\delta'}r_{\delta'}\left(\hat{p}_{\mu'}r_{\chi'}\frac{\hat{l}_{\alpha'}}{r^3}r_{\chi'}\hat{p}_{\mu'}\hat{l}_{\beta'}-\hat{l}_{\beta'}\hat{p}_{\mu'}r_{\chi'}\frac{\hat{l}_{\alpha'}}{r^3}r_{\chi'}\hat{p}_{\mu'}\right). \tag{15}$$

Подставляя выражение (15) в правую часть формулы (14) и усредняя ее по случайным ориентациям кристаллитов, получаем, что усредненный вектор $\delta\mathbf{J}$ пропорционален вектору плотности зарядового тока. Коэффициент пропорциональности имеет довольно громоздкую структуру. Ограничиваясь только вкладом от первого слагаемого в формуле (15), получим

$$\overline{\delta\mathbf{J}}=\mathbf{J}_{ph}=\frac{m^*\omega\hat{h}_{0P}}{27\hbar^3 e n_e w\nu^2}\mathbf{j}\mathrm{Im}\Big\langle\Psi_\nu^-\Big|\hat{p}_\alpha r_\beta\mathbf{a}_\nu$$

$$\times\left\{(\mathbf{nr})\left[\mathbf{n}\times\frac{\hat{\mathbf{l}}}{r^3}\right]+[\mathbf{n}\times\mathbf{r}]\left(\mathbf{n}\frac{\hat{\mathbf{l}}}{r^3}\right)\right\}r_\beta\hat{p}_\alpha\Big|\Psi\Big\rangle. \tag{16}$$

Здесь индексом ph обозначен вклад, обусловленный фононами, распространяющимися в хиральной среде.

Подставим в уравнение (6) формулы (10) и (16). Для анализа динамики спиновой подсистемы построим эффективный спиновый гамильтониан, усреднив соотношение (6) по переменным фононной подсистемы:

$$\hat{V}_S=(\mathbf{j}\hat{\mathbf{s}})(D_S+D_P h_{0P}),$$

$$D_S=\frac{\hbar eZm^*\omega}{24\pi\varepsilon_0 m^2c^2n_e}\mathrm{Im}\Big\langle\Psi_\nu^-\Big|\mathbf{a}_\nu\frac{\lfloor\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{l}}\rfloor}{r^3}\Big|\Psi\Big\rangle,$$

$$D_P=\frac{eZm^*\omega}{216\pi\varepsilon_0\hbar m^2c^2n_e w\nu^2}\mathrm{Im}\Big\langle\Psi_\nu^-\Big|\hat{p}_\alpha r_\beta\mathbf{a}_\nu$$

$$\times\left\{(\mathbf{nr})\left[\mathbf{n}\times\frac{\hat{\mathbf{l}}}{r^3}\right]+[\mathbf{n}\times\mathbf{r}]\left(\mathbf{n}\frac{\hat{\mathbf{l}}}{r^3}\right)\right\}r_\beta\hat{p}_\alpha\Big|\Psi\Big\rangle. \tag{17}$$

Соответственно для описания динамики фононной подсистемы построим эффективный фононный гамильтониан, усреднив (6) по переменным спиновой подсистемы:

$$\hat{V}_P=D_P(\mathbf{j}\mathbf{s})\hat{h}_{0P}. \tag{18}$$

Соотношения (17) и (18) записаны для одного электрона, взаимодействующего с системой фононов. Выделим физически малый объем с центром в точке с координатой $\mathbf{r}$, содержащий достаточное для усреднения количество электронов проводимости, в пределах которого плотность тока проводимости, плотность фононов и другие параметры формул (17) и (18) можно считать постоянными, и введем плотности спинового момента $\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{r},t)$, невозмущенного гамильтониана электронов $\hat{h}_{0S}(t,\mathbf{r})$, эффективного спинового возмущения $\hat{u}_S(\mathbf{r},t)$ и эффективного фононного возмущения $\hat{u}_P(t,\mathbf{r})$ так, что

$$\hat{\mathbf{S}}(t)=\int_V\hat{\mathbf{s}}(t,\mathbf{r})d^3r,$$

$$\hat{V}_S(t)=\int_V\hat{u}_S(t,\mathbf{r})d^3r,\quad \hat{V}_P(t)=\int_V\hat{u}_P(t,\mathbf{r})d^3r,$$

$$\hat{H}_{0P}(t)=\int_V\hat{h}_{0P}(t,\mathbf{r})d^3r,\quad \hat{H}_{0S}(t)=\int_V\hat{h}_{0S}(t,\mathbf{r})d^3r. \tag{19}$$

Здесь $\hat{\mathbf{S}}(t)$ — оператор суммарного спина электронов проводимости, $\hat{H}_{0P}(t)$ и $\hat{H}_{0S}(t)$ — невозмущенные гамильтонианы фононов и электронов в объеме V соответственно.

Операторы плотности фононного гамильтониана $\hat{h}_P(t,\mathbf{r})$ и спинового момента $\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{r},t)$ в представлении взаимодействия удовлетворяет соотношениям [37]

$$\frac{\partial\hat{h}_P(t,\mathbf{r})}{\partial t}=-div\hat{\mathbf{q}}(t,\mathbf{r}),$$

$$i\hbar\frac{\partial\hat{s}_\alpha(t,\mathbf{r})}{\partial t}=\Big[\hat{S}_\alpha(t),\hat{h}_{0S}(t,\mathbf{r})\Big]-i\hbar\frac{\partial\hat{\upsilon}_{\alpha\beta}(t,\mathbf{r})}{\partial r_\beta},$$

$$\alpha,\beta=1,2,3, \tag{20}$$

где $\hat{\mathbf{q}}(t,\mathbf{r})$ оператор плотности потока гамильтониана фононов, $\hat{\upsilon}_{\alpha\beta}(t,\mathbf{r})$ — компоненты оператора псевдотензора плотности спинового тока. Из формул (18) и (19) для гамильтониана фононов получаем

$$\hat{H}_P(t)=\hat{H}_{0P}+V_{0P}(t)=\int_V\hat{h}_P(t,\mathbf{r})d^3r,$$

$$\hat{h}_P(t,\mathbf{r})=\hat{h}_{0P}(t,\mathbf{r})\Big\{1+D_P(\mathbf{j}(t,\mathbf{r})\mathbf{s}(t,\mathbf{r}))\Big\}. \tag{21}$$

3. Локально-квазиравновесное распределение

Применение теории Больцмана позволило получить хорошее согласие рассчитанных и экспериментальных данных по СЭЗ и СЭП в магнитных диэлектриках [14]. Квантовым обобщением такого подхода является концепция локально-квазиравновесного распределения оператора плотности [38].

В отсутствии потоков в подсистеме фононов устанавливается локально-квазиравновесное распределение состояние с оператором плотности

$$\hat{\rho}_P^q(t) = \exp\left\{-\Phi(t) - \int\limits_V \theta(t,\mathbf{r})\hat{h}_P(\mathbf{r},t)d^3r\right\},$$

$$\Phi(t) = \ln \operatorname{Sp}\exp\left\{-\int\limits_V \theta(t,\mathbf{r})\hat{h}_P(t,\mathbf{r})d^3r\right\}. \tag{22}$$

Здесь $\Phi(t)$ — функционал Масье-Планка, $\theta(t,\mathbf{r}) = 1/(k_B T(t,\mathbf{r}))$, k_B — постоянная Больцмана, $T(t,\mathbf{r})$ — локальная температура.

Будем считать, что в отсутствии потоков в подсистеме фононов устанавливается распределение (22). В подсистеме фононов, выведенной из локально квазиравновесного состояния (22) в состояние с текущим с оператором плотности $\hat{\rho}_P(t)$, возникнет поток энергии с плотностью

$$\mathbf{q}(t,\mathbf{r}) = \operatorname{Sp}(\hat{\mathbf{q}}(t,\mathbf{r})\hat{\rho}_P(t)) = \mathbf{q}_{mn}(t,\mathbf{r})\rho_{Pnm}(t). \tag{23}$$

Здесь и далее матричные элементы операторов вычисляются в базисе собственных функций невозмущенного фононного гамильтониана $\hat{H}_{0P}$ и подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Поток энергии (23) является одним из механизмов релаксации системы к локально квазиравновесному состоянию (22). В приближении марковской релаксации динамику оператора плотности можно описать уравнением

$$\frac{\partial \rho_{Pnm}(t)}{\partial t} = \frac{\rho^q_{Pnm}(t) - \rho_{Pnm}(t)}{\tau_{nm}},$$

которое эквивалентно интегральному уравнению

$$\rho_{Pnm}(t) = \left(\rho^0_{Pnm} + \rho^q_{Pnm}(t)\right)\exp\left(\frac{t_0 - t}{\tau_{nm}}\right) - \rho^q_{Pnm}(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \exp\left(\frac{t-t'}{\tau_{nm}}\right)\frac{d\rho^q_{Pnm}(t')}{dt'}\,dt'. \tag{24}$$

Здесь $\tau_{nm} = \tau_{mn}$ — вещественные положительные времена релаксации, и принято, что в момент времени t_0 система находилась в квазиравновесном состоянии с оператором плотности $\hat{\rho}_P^0$.

Из уравнений (20)−(22) следует, что для стационарного распределения локальной температуры, плотности зарядового тока и спиновой поляризации

$$\frac{d\hat{\rho}_P^q(t)}{dt} = -\hat{\rho}_P^q(t)\int\limits_V \hat{q}_\alpha(t,\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\{\theta(\mathbf{r}) + D_P\theta(\mathbf{r})(\mathbf{j}(\mathbf{r})\mathbf{s}(\mathbf{r}))\}d^3r + \int\limits_\Sigma \hat{q}_\alpha(\mathbf{r},t)\theta(\mathbf{r}) \times \{1 + D_P(\mathbf{j}(\mathbf{r})\mathbf{s}(\mathbf{r}))\}d\Sigma. \tag{25}$$

Здесь Σ — поверхность, ограничивающая тело V. Если поверхность Σ является изотермической и внутри тела нет тепловыделения, второе слагаемое в правой части (25) равно нулю.

Устремим момент времени t_0 в формуле (24) к $-\infty$, тогда первое слагаемое в правой части равно нулю. Введем новую переменную $\tau = t - t'$. С учетом формулы (25) уравнение (18) принимает вид

$$\rho_{Pnm}(t) = -\rho^q_{Pnm}(t) - \int\limits_V \int\limits_0^\infty \exp\left(\frac{-\tau}{\tau_{nm}}\right)\left(\rho^q_{Pnl}(t-\tau)q_{\alpha lm}(\mathbf{r}', t-\tau)\right)d\tau \times \frac{\partial}{\partial r'_\alpha}\Big\{\theta(\mathbf{r}') + D_p\theta(\mathbf{r}')((\mathbf{j}(\mathbf{r}')\mathbf{s}(\mathbf{r}'))\Big\}d^3r'. \tag{26}$$

Считая, что в квазиравновесном состоянии потоки отсутствуют, из формул (23) и (26) получим

$$q_\alpha(t,\mathbf{r}) = \int\limits_V\int\limits_0^\infty \exp\left(\frac{-\tau}{\tau_{nm}}\right)\rho^q_{Pnl}(t-\tau)q_{\alpha mn}(t,\mathbf{r})q_{\beta lm}(t-\tau,\mathbf{r}')d\tau \times \frac{\partial}{\partial r'_\alpha}\Big\{D_p\theta(\mathbf{r}')((\mathbf{j}(\mathbf{r}')\mathbf{s}(\mathbf{r}')) + \theta(\mathbf{r}')\Big\}d^3r'. \tag{27}$$

Квазиравновесное распределение является квазистационарным, поэтому можно пренебречь изменением матричных элементов квазиравновесного оператора плотности за характерное время релаксации неравновесного оператора. Если характерный масштаб пространственной корреляции ансамбля невзаимодействующих тепловых фононов мал в сравнении с расстоянием, на котором существенно меняется градиент в подынтегральном выражении (27), можно положить

$$\begin{aligned}\rho^q_{Pnl}(t-\tau)q_{\alpha mn}(t,\mathbf{r})q_{\beta lm}(t-\tau,\mathbf{r}') &= \operatorname{Sp}\Big\{\hat{\rho}_P^q\hat{q}_\alpha(t,\mathbf{r})\hat{q}_\beta(t-\tau,\mathbf{r}')\Big\} \\ &= \Big\langle \hat{q}_\alpha(t,\mathbf{r})\hat{q}_\beta(t-\tau,\mathbf{r}')\Big\rangle^q \\ &= \Big\langle \hat{\mathbf{q}}(t,\mathbf{r})\hat{\mathbf{q}}(t-\tau,\mathbf{r})\Big\rangle^q \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta_{\alpha\beta}/3.\end{aligned}$$

Тогда формула (27) принимает вид

$$\mathbf{q}(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{3k_BT^2(t,\mathbf{r})}\int\limits_0^\infty \exp\left(\frac{-\tau}{\tau_{nm}}\right)\rho^q_{Pnl}(t-\tau)q_{\alpha mn}(t,\mathbf{r})$$

$$\times q_{\alpha lm}(\mathbf{r},t-\tau)d\tau\,\frac{\partial T(t,\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}} + \frac{D_P}{3k_B}\int\limits_0^\infty \exp\left(\frac{-\tau}{\tau_{nm}}\right)\rho^q_{Pnl}$$

$$\times(t-\tau)q_{\alpha mn}(t,\mathbf{r})q_{\alpha lm}(t-\tau,\mathbf{r})d\tau\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\,\frac{\mathbf{j}(t,\mathbf{r})\mathbf{s}(t,\mathbf{r})}{T(t,\mathbf{r})}. \tag{28}$$

Если по телу не протекает зарядовый ток, то второе слагаемое в уравнении (28) равно нулю, а первое описывает решеточную теплопроводность с коэффициентом

$$W_l = -\frac{1}{3k_BT^2(t,\mathbf{r})}\int\limits_0^\infty \exp\left(\frac{-\tau}{\tau_{nm}}\right)\rho^q_{Pnl}(t-\tau)q_{\alpha mn}(t,\mathbf{r})$$

$$\times q_{\alpha lm}(t-\tau,\mathbf{r})d\tau.$$

Если есть спиновый ток, то второе слагаемое в (28) описывает тепловой поток, обусловленный спин-фононным взаимодействием

$$\mathbf{q}_{SP}(t,\mathbf{r}) = -D_PW_1T(t,\mathbf{r})\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Big\{\mathbf{j}(t,\mathbf{r})\mathbf{s}(t,\mathbf{r})\Big\}$$

$$+D_PW_1\Big\{\mathbf{j}(t,\mathbf{r})\mathbf{s}(t,\mathbf{r})\Big\}\,\frac{\partial T(t,\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}. \tag{29}$$

Первое слагаемое в правой части формулы (29) описывает СЭП — тепловой поток, создаваемый спиновым током в отсутствие градиента температуры. Как и для электронного эффекта Пельтье, этот поток пропорционален температуре. Второе слагаемое описывает влияние спинового тока на теплопроводность по аналогии с эффектом Риги-Ледюка, описывающим влияние магнитного поля на теплопроводность.

4. Динамика спиновой поляризации и потока тепла

В представлении вторичного квантования

$$\hat{h}_{0S}(t,\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\hat{\psi}^+_\sigma(t,\mathbf{r})\Delta\hat{\psi}_\sigma(t,\mathbf{r}),$$

$$\hat{\mathbf{s}}(t,\mathbf{r}) = \hat{\psi}^+_\sigma(t,\mathbf{r})\mathbf{s}_{\sigma\sigma'}\hat{\psi}_{\sigma'}(t,\mathbf{r}). \tag{30}$$

Здесь $\hat{\psi}_\sigma(t,\mathbf{r})$ — полевой оператор электрона, σ — спиновая переменная, $\mathbf{s}_{\sigma\sigma'}$ — спиновая матрица. Перестановочные соотношения для полевых операторов электронов можно записать в виде $\hat{\psi}_{\sigma'}(t,\mathbf{r}')\hat{\psi}^+_\sigma(t,\mathbf{r}) + \hat{\psi}^+_\sigma(t,\mathbf{r})\hat{\psi}_{\sigma'}(t,\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta_{\sigma\sigma'}$. Остальные антикоммутаторы равны нулю. Кроме того, $\hat{\psi}^+_{\sigma'}(t,\mathbf{r}')\Delta_\mathbf{r}\hat{\psi}_\sigma(t,\mathbf{r}) = \Delta_\mathbf{r}\Big(\hat{\psi}^+_{\sigma'}(t,\mathbf{r}')\hat{\psi}_\sigma(t,\mathbf{r})\Big)$. Тогда с учетом соотношений (19) и (30) $\Big[\hat{S}_\alpha(t),\hat{h}_{0S}(t,\mathbf{r})\Big] = 0$, и второе уравнение (20) принимает вид уравнения непрерывности

$$\frac{\partial\hat{s}_\alpha(t,\mathbf{r})}{\partial t} = -\frac{\partial\hat{\upsilon}_{\alpha\beta}(t,\mathbf{r})}{\partial r_\beta}. \tag{31}$$

Компоненты оператора псевдотензора плотности спинового тока имеют вид [39]

$$\hat{\upsilon}_{\alpha\beta}(t,\mathbf{r}) = -\frac{i\hbar}{2m}\Bigg(\hat{\psi}^+_\sigma(t,\mathbf{r})s_{\alpha\sigma\sigma'}\,\frac{\partial}{\partial r_\beta}\,\hat{\psi}_{\sigma'}(t,\mathbf{r})$$

$$-\frac{\partial}{\partial r_\beta}\,\hat{\psi}^+_\sigma(t,\mathbf{r})s_{\alpha\sigma\sigma'}\hat{\psi}_{\sigma'}(t,\mathbf{r})\Bigg). \tag{32}$$

Уравнение динамики оператора псевдотензора плотности спинового тока (32) в представлении взаимодействия [40] с учетом соотношений (19) и (30) имеет вид

$$i\hbar\,\frac{\partial\hat{\upsilon}_{\alpha\beta}(t,\mathbf{r})}{\partial t} = \Big[\hat{\upsilon}_{\alpha\beta}(t,\mathbf{r}),\hat{H}_{0S}\Big]$$

$$= \int\limits_V \Big[\hat{\upsilon}_{\alpha\beta}(t,\mathbf{r}),\hat{h}_{0S}(t,\mathbf{r}')\Big]d^3r' = 0, \tag{33}$$

т. е. в представлении взаимодействия оператор псевдотензора плотности спинового тока явно от времени не зависит.

Уравнения динамики средних компонент плотности спинового момента $s_\alpha(t,\mathbf{r}) = \langle\hat{s}_\alpha(t,\mathbf{r})\rangle = \mathrm{Sp}\Big(\hat{s}_\alpha(t,\mathbf{r})\hat{\rho}_s\Big)$ и тензора плотности спинового тока $\upsilon_{\alpha\beta}(t,\mathbf{r}) = \langle\hat{\upsilon}_{\alpha\beta}(t,\mathbf{r})\rangle = \mathrm{Sp}\Big(\hat{\upsilon}_{\alpha\beta}(t,\mathbf{r})\hat{\rho}_s\Big)$ с учетом уравнений (31) и (32) имеют вид

$$\frac{\partial s_\alpha(t,\mathbf{r})}{\partial t} = \mathrm{Sp}\left(\hat{s}_\alpha(t,\mathbf{r})\frac{d\hat{\rho}_s}{dt}\right) - \frac{\partial\upsilon_{\alpha\beta}(t,\mathbf{r})}{\partial r_\beta},$$

$$\frac{\partial\upsilon_{\alpha\beta}(t,\mathbf{r})}{\partial t} = \mathrm{Sp}\left(\hat{\upsilon}_{\alpha\beta}(\mathbf{r})\,\frac{d\hat{\rho}_s}{dt}\right), \tag{34}$$

где $\hat{\rho}_s$ — оператор плотности спиновой подсистемы. В приближении марковской релаксации уравнение Неймана для матрицы плотности спиновой подсистемы имеет вид

$$\frac{d\rho_{Smn}}{dt} = -\frac{\rho_{Smn}-\rho^e_{Smn}}{\tau_{mn}} - \frac{i}{\hbar}\Big[\hat{V}_s,\hat{\rho}_s\Big]_{mn}, \tag{35}$$

где ρ^e_{Smn} — матричные элементы равновесного оператора плотности спиновой подсистемы, τ_{mn} — времена релаксации.

Примем, что при вычислении первого слагаемого в правой части уравнения (35) можно заменить времена релаксации усредненным значением τ_r. Тогда уравнения спиновой динамики (34) с учетом перестановки операторов под шпуром принимают вид

$$\frac{\partial s_\alpha(t,\mathbf{r})}{\partial t} = -\frac{s_\alpha(t,\mathbf{r})-s^e_\alpha(t,\mathbf{r})}{\tau_r} - \frac{i}{\hbar}$$

$$\times\int\limits_V \mathrm{Sp}\Big(\hat{\rho}_s\Big[\hat{s}_\alpha(t,\mathbf{r}),\hat{u}_s(t,\mathbf{r}')\Big]\Big)d^3r' - \frac{\partial\upsilon_{\alpha\beta}(t,\mathbf{r})}{\partial r_\beta}, \tag{36}$$

$$\frac{\partial \upsilon_{\alpha\beta}(t,\mathbf{r})}{\partial t} = -\frac{\upsilon_{\alpha\beta}(t,\mathbf{r}) - \upsilon^e_{\alpha\beta}(t,\mathbf{r})}{\tau_r} - \frac{i}{\hbar}\int\limits_V \mathrm{Sp}\Big(\hat{\rho}_s\Big[\hat{\upsilon}_{\alpha\beta}(t,\mathbf{r}),\,\hat{u}_s(t,\mathbf{r}')\Big]\Big)d^3r'. \quad (37)$$

Здесь

$$s^e_\alpha(t,\mathbf{r}) = \mathrm{Sp}\Big(\hat{s}_\alpha(t,\mathbf{r})\hat{\rho}^e_s\Big),\ \ \upsilon^e_{\alpha\beta}(t,\mathbf{r}) = \mathrm{Sp}\Big(\hat{\upsilon}_{\alpha\beta}(t,\mathbf{r})\hat{\rho}^e_s\Big)$$

равновесные компоненты плотности спинового момента и псевдотензора плотности спинового тока соответственно. В стационарном равновесном состоянии можно в первом приближении принять, что чисто спиновый ток отсутствует. В рамках модели Дьяконова-Переля [41] это предполагает, что эффекты спиновой диффузии и спин-орбитального взаимодействия компенсируют друг друга, и можно принять $\upsilon^e_{\alpha\beta}(t,\mathbf{r}) = -\frac{s^e_\alpha(t,\mathbf{r})j_\beta(t,\mathbf{r})}{en_e(t,\mathbf{r})}$. Здесь $n_e(t,\mathbf{r}) = \Big\langle \hat{\psi}^+_\sigma(t,\mathbf{r})\hat{\psi}_\sigma(t,\mathbf{r})\Big\rangle$ — концентрация электронов проводимости, энергия которых находится в интервале порядка k_BT около уровня Ферми.

Эффективный спиновый гамильтониан $\hat{V}_S$ в первом уравнении (17) — одночастичный оператор, его плотность находится стандартным образом [37]: $\hat{u}_S(t,\mathbf{r}) = (\mathbf{j}\hat{\mathbf{s}}(t,\mathbf{r}))(D_S + D_P h_{0P}(t,\mathbf{r}))$. Положим $h_{0P} = c_lT$, где c_l — удельная объемная решеточная теплоемкость, усредненная по интервалу температуры. Вычисляя соответствующие коммутаторы в уравнениях (36) и (37), получаем

$$\frac{\partial s_\alpha(t,\mathbf{r})}{\partial t} = -\frac{s_\alpha(t,\mathbf{r}) - s^e_\alpha(t,\mathbf{r})}{\tau_r} + \frac{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}(D_S + c_lD_PT(t,\mathbf{r}))j_\beta(t,\mathbf{r})s_\gamma(t,\mathbf{r})}{\hbar} - \frac{\partial \upsilon_{\alpha\beta}(t,\mathbf{r})}{\partial r_\beta}, \quad (38)$$

$$\frac{\partial \upsilon_{\alpha\beta}(t,\mathbf{r})}{\partial t} = \frac{s^e_\alpha(t,\mathbf{r})j_\beta(t,\mathbf{r}) - en_e(t,\mathbf{r})\upsilon_{\alpha\beta}(t,\mathbf{r})}{en_e(t,\mathbf{r})\tau_r} + \frac{n_e(t,\mathbf{r})}{4m}\frac{\partial}{\partial r_\beta}\bigg(\Big(D_S + c_lD_PT(t,\mathbf{r})\Big)j_\alpha(t,\mathbf{r})\bigg). \quad (39)$$

Усредняя возмущение (17) по квантовому состоянию, получим, что энергия состояний, когда средний спин ориентирован параллельно или антипараллельно вектору $\mathbf{j}$, составляет соответственно $\pm j(D_S + D_Ph_{0P})/2$. Тогда при температуре T:

$$\mathbf{s}^e(t,\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{j}(t,\mathbf{r})n_e(t,\mathbf{r})}{2|\mathbf{j}(t,\mathbf{r})|}\,\mathrm{th}\left(|\mathbf{j}(t,\mathbf{r})|\frac{D_S + D_Pc_lT}{2k_BT}\right). \quad (40)$$

Второе слагаемое в правой части (38) описывает прецессию спинового момента вокруг вектора плотности зарядового тока. Единственное выделенное направление обусловлено изотропностью поликристаллической модели со случайными ориентациями осей хиральности кристаллитов. Для монокристаллического образца есть второе выделенное направление — ось хиральности, и это слагаемое имеет более сложную структуру. Если спиновая поляризация параллельна плотности тока, то прецессионное слагаемое исчезает. Если при этом можно пренебречь равновесной спиновой поляризацией (40), то уравнение (38) совпадает с первым уравнением Дьяконова-Переля [41]. Однако с учетом спин-фононного взаимодействия феноменологическая связь спинового и электрического тока является динамической и описывается не вторым уравнением Дьяконова-Переля, а системой уравнений (38)–(40).

Квазистационарное распределение плотности тока в однородном изотропном проводнике с проводимостью σ, ограниченном замкнутой поверхностью Σ, является решением внутренней задачи Неймана

$$\mathbf{j} = -\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}},\ \ \Delta\varphi = 0,\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_\Sigma = -\frac{j_n(\mathbf{r}\in\Sigma)}{\sigma},\ \ \oiint\limits_\Sigma j\,d\Sigma = 0. \quad (41)$$

Уравнение (41) имеет единственное решение и совместно с уравнениями (29), (38), (39) и (40) однозначно определяет динамику распределения спиновой поляризации, спинового тока и потока тепла при заданной динамике распределения нормальной компоненты плотности тока на поверхности проводника.

Рассмотрим однородное полупространство $x \geq 0$, по которому в направлении оси x однородно распределенный зарядовый ток с плотностью $j_x = -j$. Тогда в стационарном режиме уравнение (38) для продольной компоненты плотности спинового момента электронов проводимости принимает вид

$$\frac{ds_x}{dx} + \frac{en_e}{j\tau_r}s_x = \frac{en^2_e}{2j\tau_r}\,\mathrm{th}\left(j\,\frac{D_S + D_Pc_lT}{2k_BT}\right). \quad (42)$$

Решение уравнения (42) с граничным условием $s_x(0) = 0$ имеет вид

$$s_x(x) = \frac{n_e}{2}\,\mathrm{th}\left(j\,\frac{D_S + D_Pc_lT}{2k_BT}\right)\left\{\exp\left(-\frac{en_e}{j\tau_r}x\right) - 1\right\}.$$

Соответственно

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Big\{\mathbf{j}(\mathbf{r})\mathbf{s}(\mathbf{r})\Big\} = -j\,\frac{ds_x}{dx} = \frac{en^2_e}{2\tau_r}\,\mathrm{th}\left(j\,\frac{D_S + D_Pc_lT}{2k_BT}\right) \times \exp\left(-\frac{en_e}{j\tau_r}x\right).$$

Тогда из уравнения (29) получаем

$$q_x(x) = -D_PW_lT\,\frac{en^2_e}{2\tau_r}\,\mathrm{th}\left(j\,\frac{D_S + D_Pc_lT}{2k_BT}\right)\exp\left(-\frac{en_e}{j\tau_r}x\right). \quad (43)$$

Из уравнения (43) следует, что $|q| \leq en^2_eD_pW_lT/(2\tau_r)$. При этом тепловой поток, генерируемый спиновым током, зависит от температуры, но не ее градиента. Это соответствует общему выводу [42]. Если

$D_p c_l T \gg D_s$, то получаем, что в линейном режиме при $j \ll j_p = k_B/(D_p c_l)$ на расстоянии $x \ll l_p = j\tau_r/(en_e)$ от поверхности проводника тепловой поток пропорционален плотности зарядового тока

$$q = -\frac{en_e^2 D_p^2 W_l T}{4\tau_r k_B}\, j.$$

Заключение

Из решения уравнения (43) следует, что если в немагнитный геликоидно-хиральный поликристаллический проводник с сильным спин-орбитальным взаимодействием втекает неполяризованный зарядовый ток, то максимальная продольная спиновая поляризация достигается на расстоянии порядка l_p от поверхности. Управление потоками тепла с помощью спинового тока, описываемого уравнением (29), экспериментально продемонстрировано в работе [43].

Анализ СЭП в немагнитных геликоидно-хиральных проводниках выполнен с использованием модели идеального ферми-газа для электронов проводимости в металлах и представления их волновой функции виде функции Ванье, приближения ближайших соседей в гамильтониане (5) и модели изотропного поликристаллического проводника со случайными ориентациями кристаллитов. Применимость этих моделей для конкретной задачи следует обосновывать экспериментально. В настоящее время доступны достоверные экспериментальные данные по спиновому эффекту Холла в металлах. Поэтому в рамках описанных приближений были рассчитаны коэффициенты спинового эффекта Холла 19 немагнитных металлов 3-го–6-го периодов [44]. Результаты расчетов согласуются с экспериментальными в пределах погрешности.

В металлах с высоким значением спин-холловской удельной проводимости, например, платине, кристаллографическая геликоидность не обнаружена. Поэтому перспективным для спиновой калоритроники актуальным направлением исследований является формирование металлических хиральных поверхностей на структурных подложках [28]. В работе [45] продемонстрировано, что осаждение платины и меди на подложку титаната стронция (621) позволяет получить пленки, завершенные низкосимметричной хиральной поверхностью с высоким индексом Миллера. Эта демонстрация гомохирального гетероэпитаксиального роста показала, что осаждение металлов на хиральные минералы, такие как кварц, даже в виде частиц, может быть использовано для получения хиральных металлов в морфологии с высокой площадью поверхности. Поверхности полученных пленок не имеют геликоидальной симметрии, но имеют выделенное направление, лежащее в плоскости пленки.

Соединения переходных металлов с кристаллической нецентрально-симметричной структурой проявляют нетривиальные электрические и магнитные свойства, часть из которых открыта в последнее время. Так, в работе [24] показано, что CoSi является немагнитным полуметаллом, кристаллизующимся в хиральной структуре B20, пространственная группа которой $P2_13$ не содержит центра инверсии. В работе [46] показано, что полуметаллические сплавы CoGe, RhSi и RhGe также имеют хиральную кристаллическую структуру вида B20. При этом высокое значение спин-холловской удельной проводимости и геликоидальность хиральной структуры коррелированы.

Можно ожидать, что оптимальным материалом для достижения макроскопической когерентности спиновых токов и их эффективного взаимодействия с интенсивными потоками тепла могут быть бинарные проводники с хиральной геликоидальной структурой, кристаллическая решетка которых относится к пространственным группам симметрии $P6_122$, $P6_222$, $P6_422$, $P6_522$ [30,47], например, WAl_2 [30]. Металл должен быть переходным из 6 периода или лантаноидом с сильным спин-орбитальным взаимодействием. Соединение по своим магнитным свойствам должно быть антиферромагнетиком, гелимагнетиком или ферримагнетиком. Так, в работе [48] при комбинации материалов $TaSi_2$ и $NbSi_2$ достигнута длина спиновой когерентности 60 mm.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда № 22-22-20035 (https://rscf.ru/project/22-22-20035/) и за счет средств бюджета Волгоградской области.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] J. Flipse, F.K. Dejene, D. Wagenaar, G.E.W. Bauer, J.B. Youssef, B.J. van Wees. Phys. Rev. Lett., **113**, 027601 (2014). DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.027601

[2] K. Uchida, T. Nonaka, T. Ota, E. Saitoh. Appl. Phys. Lett., **97**, 262504 (2010). DOI: 10.1063/1.3533397

[3] S. Daimon, R. Iguchi, T. Hioki, E. Saitoh, K. Uchida. Nature Commun., **7**, 13754 (2016). DOI: 10.1038/ncomms13754

[4] V. Basso, M. Kuepferling, A. Sola, P. Ansalone, M. Pasquale. IEEE Magn. Lett., **9**, 3104704 (2018). DOI: 10.1109/LMAG.2018.2852292

[5] S. Daimon, K. Uchida, N. Ujiie, Y. Hattori, R. Tsuboi, E. Saitoh. Appl. Phys. Express, **13** (10), 103001 (2020). DOI: 10.35848/1882-0786/abb2b5

[6] T. Yamazaki, R. Iguchi, T. Ohkubo, H. Nagano, K. Uchida. Phys. Rev. B, **101**, 020415(R) (2020). DOI: 10.1103/PhysRevB.101.020415

[7] T. Yamazaki, R. Iguchi, H. Nagano, K. Uchida. J. Phys. D: Appl. Phys., **54** (35), 354001 (2021). DOI: 10.1088/1361-6463/ac0843

[8] A. Takahagi, T. Hirai, R. Iguchi, K. Nakagawara, H. Nagano, K. Uchida. Appl. Phys. Express, **15** (6), 063002 (2022). DOI: 10.35848/1882-0786/ac6fae

[9] A. Sola, V. Basso, M. Kuepferling, C. Dubs, M. Pasquale. Scientific Reports, **9**, 2047 (2019). DOI: 10.1038/s41598-019-38687-4
[10] K. Uchida, S. Takahashi, K. Harii, J. Ieda, W. Koshibae, K. Ando, S. Maekawa, E. Saitoh. Nature, **455** (7214), 778 (2008). DOI: 10.1038/nature07321
[11] H. Adachi, K. Uchida, E. Saitoh, S. Maekawa. Reports Prog. Phys., **76**, 036501 (2013). DOI: 10.1088/0034-4885/76/3/036501
[12] S.S. Costa, L. Sampaio. J. Phys. D: Appl. Phys., **53** (35), 355001 (2020). DOI: 10.1088/1361-6463/ab8bfc
[13] R. Yahiro, T. Kikkawa, R. Ramos, K. Oyanagi, T. Hioki, S. Daimon, E. Saitoh. Phys. Rev. B, **101** (2), 024407 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevB.101.024407
[14] S.S. Costa, L. Sampaio. J. Magn. Magn. Mater., 547 (1), 168773 (2022). DOI: 10.1016/j.jmmm.2021.168773
[15] J. Capps, D.C. Marinescu, A. Manolescu. Phys. Rev. B, **93**, 085307 (2016). DOI: 10.1103/PhysRevB.93.085307
[16] K. Yamada, Y. Kurokawa, K. Kogiso, H. Yuasa, M. Shima. IEEE Trans. Mag., **55** (2), 4500104 (2019). DOI: 10.1109/TMAG.2018.2865199
[17] K. Oyanagi, S. Takahashi, T. Kikkawa, E. Saitoh. Phys. Rev. B, **107**, 014423 (2023). DOI: 10.1103/PhysRevB.107.014423
[18] Y. Ohnuma, M. Matsuo, S. Maekawa. Phys. Rev. B, **96**, 134412 (2017). DOI: 10.1103/PhysRevB.96.134412
[19] K. Uchida. Proc. Jpn. Acad., Ser. B, **97** (2), 69 (2021). DOI: 10.2183/pjab.97.004
[20] K. Kim, E. Vetter, L. Yan, C. Yang, Z. Wang, R. Sun, Y. Yang, A.H. Comstock, X. Li, J. Zhou, L. Zhang. Nature Mater., **22**, 322 (2023). DOI: 10.1038/s41563-023-01473-9
[21] T. Yu, Z. Luo, G.E.W. Bauer. Phys. Reports, **1009**, 1 (2023). DOI: 10.1016/j.physrep.2023.01.002
[22] Y. Kousaka. Nihon Kessho Gakkaishi, **60** (4), 185 (2018). DOI: 10.5940/jcrsj.60.185
[23] А.А. Фраерман. ЖЭТФ, **163** (6), 822 (2023). DOI: 10.31857/S0044451023060081
[24] С.М. Стишов, А.Е. Петрова. УФН, **193** (6), 614. (2023). DOI: 10.3367/UFNr.2021.11.039104
[25] S.W. Im, H.-Y. Ahn, R.M. Kim, N.H. Cho, H. Kim, Ya.-Ch. Lim, H.-E. Lee, K.T. Nam. Adv. Mater., **32** (41), 1905758 (2020). DOI: 10.1002/adma.201905758
[26] L. Sohncke. *Entwicklung Einer Theorie Der Kristallstruktur* (Teubner, Leipzig, Germany, 1879)
[27] R.M. Hazen. *Progress in Biological Chirality* (Elsevier, NY., 2004), p. 137–151.
[28] N. Shukla, A.J. Gellman. Nature Mater., **19**, 939 (2020). DOI: 10.1038/s41563-020-0734-4
[29] K. Soai, S. Osanai, K. Kadowaki, S. Yonekubo, T. Shibata, I. Sato. J. Am. Chem. Soc., **121**, 11235 (1999). DOI: 10.1021/ja993128t
[30] G.H. Fecher, J. Kübler, C. Felser. Materials, **15**, 5812 (2022). DOI: 10.3390/ma15175812
[31] R.L. Segall, K.A. Shoaib. The Philosophical Magazine: A J. Theor. Experimental Appl. Phys., **2** (172), 713 (1970). DOI: 10.1080/14786437008238457
[32] S.U. Abbas, J.-J. Li, X. Liu, A. Siddique, Y.-X. Shi, M. Hou, K. Yang, F. Nosheen, X.-Ya Cui, G.-Ch. Zheng, Zh.-Ch. Zhang. Rare Met., **42** (8), 2489 (2023). DOI: 10.1007/s12598-023-02274-4
[33] J. Sharma, R. Chhabra, A. Cheng, J. Brownell, Y. Liu, H. Yan. Science, **323** (5910), 112 (2009). DOI: 10.1126/science.1165831
[34] В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. *Квантовая электродинамика* (Физматлит, М., 1989) [V.B. Berestetskii, E.M. Lifshitz, L.P. Pitaevskii, *Quantum Electrodynamics (Course of Theoretical Physics Volume 4)* (Butterworth-Heinemann; 2nd edition, 1982)]
[35] О. Маделунг. *Теория твердого тела* (Наука, М., 1980) [пер. с нем. O. Madelung. Festkorpertheorie I, II. (Springer-Verlag, Berlin, 1972)]
[36] И.А. Квасников. *Теория равновесных систем: Статистическая физика* (Editorial URSS, M., 2002)
[37] А.И. Ахиезер, С.В. Пелетминский. *Методы статистической физики* (Наука, М., 1977)
[38] М.А. Леонтович. *Введение в термодинамику, статистическая физика* (Наука, М., 1983)
[39] В.К. Игнатьев. ЖТФ, **92** (1), 118 (2022). DOI: 10.21883/JTF.2022.01.51861.126-21
[40] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Квантовая механика. Нерелятивистская теория.* (Физматлит, М., 1974) [L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *Quantum Mechanics, Non-Relativistic Theory, (Course of Theoretical Physics Volume 3)* (Butterworth-Heinemann; 3nd edition, 1981)]
[41] М.И. Дьяконов, В.И. Перель. Письма в ЖЭТФ, **13** (11), 657 (1971). [M.I. D'yakonov, V.I. Perel'. JETP Lett., **13** (11), 467 (1971).]
[42] В.К. Игнатьев. ЖТФ, **93** (5), 702 (2023). DOI: 10.21883/JTF.2023.05.55466.258-22
[43] M. Weiler, M. Althammer, M. Schreier, J. Lotze, M. Pernpeintner, S. Meyer, H. Huebl, R. Gross, A. Kamra, J. Xiao, Y.-T. Chen, H.J. Jiao, G.E.W. Bauer, S.T.B. Goennenwein. Phys. Rev. Lett., **111** (17), 176601 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.176601
[44] V.K. Ignatjev, S.V. Perchenko, D.A. Stankevich. Modern Phys. Lett. B, **38** (6), 2450018 (2024). DOI: 10.1142/S0217984924500180
[45] A.J. Francis, P.A. Salvador. J. Appl. Phys., **96** (5), 2482 (2004). DOI: 10.1063/1.1768609
[46] T.-Y. Hsieh, B.B. Prasad, G.-Y. Guo. Phys. Rev. B, **106** (16), 165102 (2022). DOI: 10.1103/PhysRevB.106.165102
[47] K. Shiota, A. Inui, Y. Hosaka, R. Amano, Y. Ōnuki, M. Hedo, T. Nakama, D. Hirobe, Jun-ichiro Ohe, Jun-ichiro Kishine, H.M. Yamamoto, H. Shishido, Y. Togawa. Phys. Rev. Lett., **127** (12), 126602 (2021). DOI: 10.1103/PhysRevLett.127.126602
[48] Yu. Kousaka, T. Sayo, S. Iwasaki, R. Saki, Ch. Shimada, H. Shishido, Y. Togawa. Jpn. J. Appl. Phys., **62** (1), 015506 (2023). DOI: 10.35848/1347-4065/aca8e2