

## Аперриодическая дифракционная решетка, основанная на связи между простыми числами и нулями дзета-функции Римана

© А.Е. Мадисон,<sup>1</sup> Д.А. Козодаев,<sup>2</sup> А.Н. Казанков,<sup>2</sup> П.А. Мадисон,<sup>1,3</sup> В.А. Мошников<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский университет „Высшая школа экономики“, 190121 Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup>Активная фотоника, 124460 Зеленоград, Москва, Россия

<sup>3</sup>Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет „ЛЭТИ“, 197022 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: alex\_madison@mail.ru

Поступило в Редакцию 15 ноября 2023 г.

В окончательной редакции 22 декабря 2023 г.

Принято к публикации 28 декабря 2023 г.

Показано, что дуальность по отношению к преобразованию Фурье между распределением нетривиальных нулей дзета-функции Римана вдоль критической линии, с одной стороны, и распределением логарифмов простых чисел и степеней простых, с другой стороны, может быть использована в качестве теоретической базы для создания новых дифракционных оптических элементов. В частности, была изготовлена аперриодическая дифракционная решетка, щели которой упорядочены в соответствии с распределением нетривиальных нулей дзета-функции Римана. Для нанопрофилирования использовалась атомно-силовая литография. Полученная дифракционная картина характеризуется наличием дискретных дифракционных максимумов на логарифмах простых чисел и их степеней, что является прямой экспериментальной иллюстрацией гипотезы Гильберта–Полиа.

**Ключевые слова:** дифракционная решетка, атомно-силовая литография, дзета-функция Римана, простые числа.

DOI: 10.61011/JTF.2024.04.57538.285-23

### Введение

Гипотеза Римана — это одна из наиболее сложных нерешенных проблем современной науки [1–6]. Один из возможных подходов к доказательству гипотезы Римана основывается на предположении Гильберта–Полиа, согласно которому нетривиальные нули дзета-функции Римана могут быть интерпретированы в терминах спектральной теории [7,8]. Основываясь на вычислительных результатах Одльжко [9], Дайсон отметил, что распределение нулей  $\zeta$ -функции Римана может рассматриваться как одномерный квазикристалл [10]. В частности, он обратил внимание на то, что „они образуют распределение точечных масс вдоль прямой линии, а их фурье-образ, скорее всего, также является распределением точечных масс — по одной на каждый логарифм простого числа и степени простого числа“. Вообще говоря, если быть более корректным, результирующий фурье-образ, помимо дискретной компоненты, содержит также дополнительную непрерывную компоненту в качестве фона [11]. Тем не менее мы можем рассматривать оба распределения как дуальные друг другу по отношению к косинус-преобразованию Фурье. Первое распределение — это аперриодическая последовательность  $\delta$ -функций Дирака, воспроизводящая с некоторым масштабным множителем распределение нулей  $\zeta$ -функции Римана вдоль критической линии. Второе распределение — аперриодическая

последовательность  $\delta$ -функций, воспроизводящая последовательность простых чисел и степеней простых на логарифмической шкале.

Если первое множество  $\delta$ -функций соответствует положениям гармонических осцилляторов, то его фурье-образ определяет условия конструктивной интерференции волн. Математические соотношения между такими взаимно-дуальными дискретными распределениями могут быть положены в основу конструирования возможных будущих дифракционных оптических элементов. В частности, в работе [8] обсуждается гипотетический интерферометр Римана, состоящий из сложной системы полупрозрачных зеркал, расположенных в логарифмах таких натуральных чисел, в разложении которых на простые множители отсутствуют квадраты. Предполагалось, что такая система зеркал позволила бы визуализировать нули  $\zeta$ -функции Римана, однако сведений об изготовлении реальных действующих приборов подобного типа в литературе нам найти не удалось.

В настоящей работе мы сообщаем об изготовлении аперриодической дифракционной решетки, состоящей из чередующихся прозрачных и непрозрачных участков, но в отличие от обычной периодической решетки положения щелей определялись значениями мнимых частей нетривиальных нулей дзета-функции Римана (с некоторым заранее выбранным масштабным коэффициентом). Атомно-силовая литография была использована

для нанопрофилирования образцов. Полученные экспериментально дифракционные картины подтверждали факт интенсивного когерентного рассеяния с большим числом хорошо различимых максимумов, в том числе и на больших углах, близких к  $90^\circ$ . Как и ожидалось, измеренные углы дифракции соответствовали логарифмам простых чисел и их степеней. Однако вследствие относительно небольшого общего числа щелей в изготовленных решетках точное соответствие имело место только для первых максимумов в центральной части дифракционной картины.

Обычно условия конструктивной интерференции формулируются следующим образом: сложение волн имеет место, если волны приходят в фазе по отношению друг к другу или, что эквивалентно, если на оптической разности хода между интерферирующими лучами от двух соседних щелей до интересующей точки на экране укладывается целое число длин волн [12–14]. В нашем случае эта общепринятая формулировка неприменима. Наши результаты со всей очевидностью показывают, что конструктивная интерференция от апериодической системы щелей может наблюдаться даже если волны от любой пары соседних щелей приходят не в фазе. Основным требованием является наличие существенной дискретной компоненты в фурье-образе соответствующей апериодической последовательности  $\delta$ -функций в целом.

Успешное изготовление апериодической дифракционной решетки, основанной на „скрытом“ порядке в распределении нулей  $\zeta$ -функции Римана, может стимулировать дальнейший интерес к конструированию новых оптических приборов на основе апериодических детерминированных структур [15–18], поскольку такие структуры могут проявлять свойства, недостижимые ни в периодических, ни в случайных системах. Экспериментальное наблюдение „спектра“ нетривиальных нулей дзета-функции может вдохнуть новую жизнь в систематическое использование спектрального подхода при решении различных проблем, связанных с гипотезой Римана.

## 1. Теоретические соотношения

Гипотеза Римана утверждает, что все нетривиальные нули  $\zeta$ -функции Римана лежат на критической прямой, т. е. для всех нетривиальных нулей действительная часть равна  $1/2$ . При этом мнимые части распределены вдоль критической прямой достаточно непредсказуемым образом (с точки зрения сегодняшнего уровня знаний).

Представим себе систему тонких параллельных щелей, позиции которых в точности воспроизводят положения нетривиальных нулей  $\delta$ -функции на критической прямой. Если щели достаточно тонкие, то получившаяся апериодическая дифракционная решетка может рассматриваться как последовательность  $\delta$ -функций Дирака. Соответствующая дифракционная картина будет в

первом приближении описываться суммой комплексных экспонент по нулям  $\zeta$ -функции Римана.

Ранее нами был проведен теоретический анализ рядов такого типа [11], и было показано, что парциальные суммы косинус-рядов по нулям  $\zeta$ -функции Римана с достаточно хорошей точностью аппроксимируются следующим выражением:

$$S_N(t) = \sum_{k=-N}^n \cos(\gamma_k t) = 2 \sum_{k=1}^n \cos(\gamma_k t) \\ \approx \left(2\pi \frac{N}{\gamma_N} + 1\right) \frac{\sin(\gamma_N t)}{\pi t} - \frac{\text{Si}(\gamma_N t)}{\pi t} \\ - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sin(\gamma_N(t \pm \ln n))}{\pi(t \pm \ln n)} + \exp(t/2) + \exp(-t/2).$$

Здесь  $\gamma_k$  — мнимая часть  $k$ -го нуля. В этой формуле первые слагаемые соответствуют центральному максимуму, последние слагаемые описывают фон, а дифрагированным пучкам соответствуют члены, пропорциональные функции Мангольда  $\Lambda(n)$ .

Таким образом, основываясь на результатах [11], мы можем выписать следующее условие когерентного сложения волн (для случая решетки, работающей на пропускание при нормальном падении света):

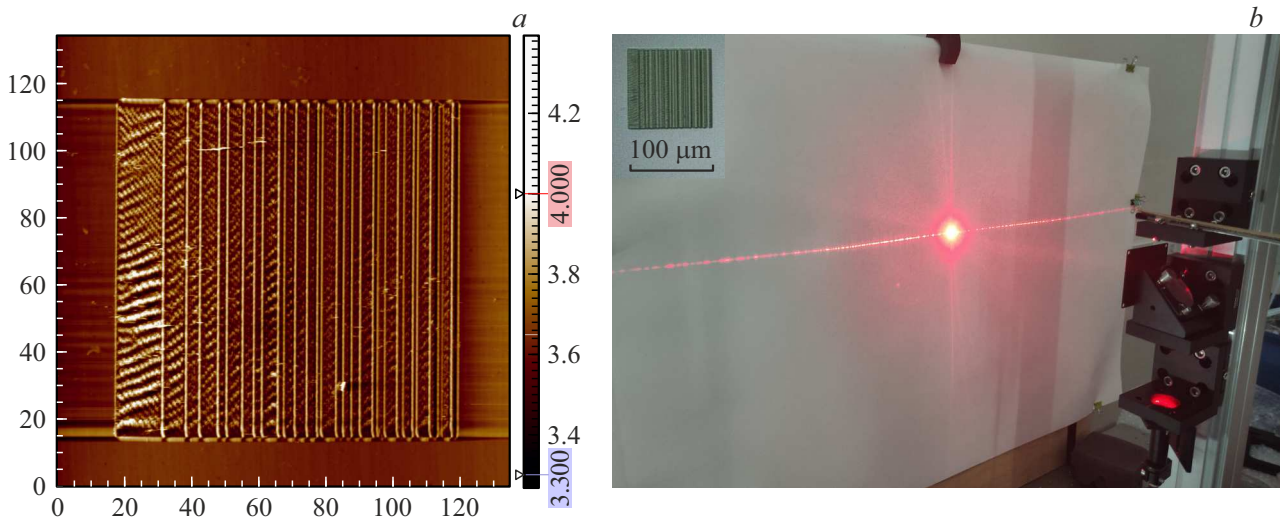
$$\frac{2\pi}{\lambda} a \sin \varphi = m \ln p.$$

Здесь  $\varphi$  — угол рассеяния,  $\lambda$  — длина волны падающего излучения,  $a$  — масштабный множитель, измеряемый в  $\mu\text{m}$  (это значит, что если  $\gamma_k$  — мнимая часть  $k$ -го нуля, то  $k$ -я щель должна быть создана в позиции с координатой  $a\gamma_k$ ),  $p$  и  $p^m$  — простые числа и степени простых чисел соответственно. Иными словами, мы ожидаем увидеть на экране яркие рефлексы в положениях простых чисел и их степеней на логарифмической шкале, слегка искаженной функцией тангенса арксинуса. Оценку относительной яркости рефлексов можно получить, возводя в квадрат амплитуды пиков на фурье-спектре  $I_{p,m} \propto A_{p,m}^2$ , которые, в свою очередь, определяются соответствующими значениями функции Мангольда  $\Lambda(n)$ :

$$A_{p,m} = \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} = p^{-m/2} \ln p.$$

## 2. Изготовление апериодической решетки и визуализация простых чисел

Для формирования на поверхности подложки требуемого рисунка мы использовали атомно-силовую литографию (АСМ литографию). С различными методами нанопрофилирования поверхности образцов с помощью атомно-силовой микроскопии можно ознакомиться в обзорах [19–24].



**Рис. 1.** Аперiodическая дифракционная решетка, щели которой расположены в соответствии с распределением нулей  $\xi$ -функции Римана: *a* — АСМ изображение мини-решетки, изготовленной с масштабным множителем  $1.0\ \mu\text{m}$ ; *b* — экспериментальная установка и полученная дифракционная картина от мини-решетки размером  $100 \times 100\ \mu\text{m}$ , изготовленной с масштабным множителем  $1.0\ \mu\text{m}$  и содержащей 29 щелей. На врезке в левом верхнем углу представлена ее оптическая микрофотография.

Существует два основных метода АСМ литографии: статическая (гравировка, царапание) и динамическая (наночеканка). В случае статической нанолитографии острие зонда находится в контактном режиме. Боковые силы, возникающие вблизи острия зонда в процессе царапания, вызывают изгибание и скручивание кантилевера, что приводит к нерегулярности формы кромки и плохой воспроизводимости формы и глубины царапин. Попытки процарапать близко расположенные параллельные канавки могут приводить к появлению плохо контролируемого морщинистого рельефа. Еще одним недостатком статического метода является то, что при царапании больших площадей зонд быстро изнашивается. В целом, статическая АСМ литография является наиболее простым, но в то же время менее воспроизводимым методом.

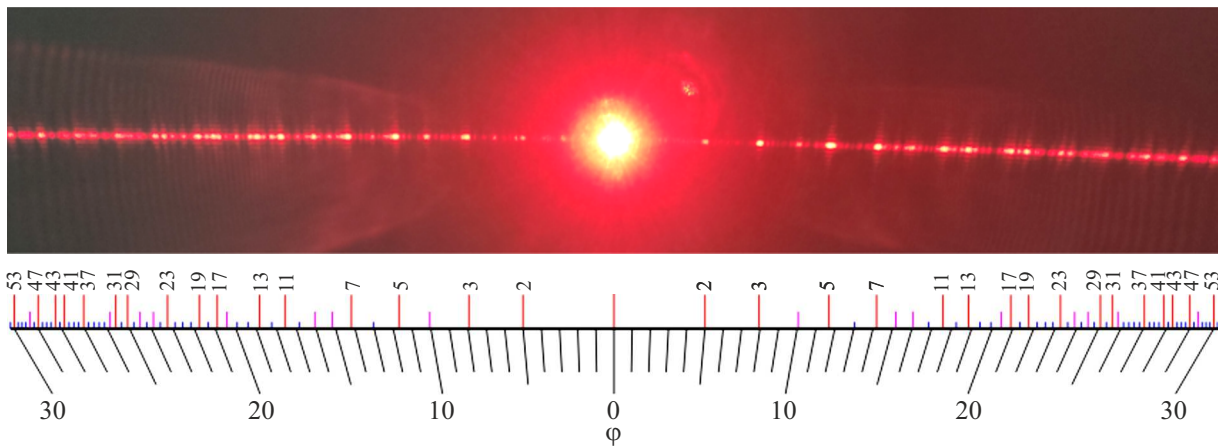
В случае динамической нанолитографии модификация поверхности производится путем быстрой наноиндентации (точка за точкой) при помощи колеблющегося зонда в режиме постукивания (чеканки). Этот метод позволяет достигать вполне приемлемой воспроизводимости рисунка, при этом получающиеся канавки оказываются достаточно однородными по форме и глубине.

Заметим, что глубина профиля, получаемого методом динамической литографии, обычно составляет величину порядка нескольких нанометров. Для дифракционных решеток, предназначенных для видимого спектрального диапазона, обычно требуется создание значительно более глубокого поверхностного рельефа. Характерный размер структурных элементов должен быть, по меньшей мере, порядка сотни нанометров. Это явилось основной причиной, вследствие которой мы склонились к выбору статического метода, так как нам требовалось обеспечить по возможности более глубокий рельеф.

В дополнение к этому мы осуществляли царапание в несколько проходов, когда зонд несколько раз направляется вперед и назад вдоль одной и той же линии для достижения большей глубины.

Итак, наша задача сводилась к созданию требуемого геометрического рисунка и переносу этого рисунка на поверхность подложки. Нами была написана программа, которая выполняла следующие действия: загрузка массива нулей  $\xi$ -функции Римана из заранее подготовленного файла ресурсов; расчет положений щелей для заданного масштабного множителя; определение границ областей, подлежащих выцарапыванию; определение желаемой траектории перемещения зонда и экспорт полученного шаблона в виде файла векторной графики. Чтобы процарапать большие площади между прозрачными «щелями», мы использовали сложный путь в форме меандра, состоящий из нескольких близко расположенных параллельных линий, с многократными проходами по ним.

Модификация поверхности осуществлялась с помощью атомно-силового микроскопа NTEGRA (ООО «НТ-МДТ») с увеличенной областью сканирования  $150 \times 150\ \mu\text{m}$ . Были подготовлены несколько образцов — тестировались разные материалы, менялись некоторые параметры шаблонов (площадь активной области, масштабный множитель, ширина щелей, шаг и число проходов), варьировались параметры процесса гравировки [25]. Наилучшие результаты были получены на подложках из полиэтилентерефталата (SIQINZONGWA PET) с использованием монокристаллического алмазного зонда DRPS-In для глубокого царапания. Ниже приведены результаты для двух образцов, которые нам представляются достаточно качественными и информативными.



**Рис. 2.** Интерпретация дифракционной картины от апериодической решетки, щели которой расположены в соответствии с распределением нулей  $\xi$ -функции Римана (размер решетки  $150 \times 150 \mu\text{m}$ , масштабный множитель  $0.8 \mu\text{m}$ , учтено 73 нуля). Экспериментально полученная дифракционная картина (сверху); положения простых чисел и их степеней на искаженной логарифмической шкале и соответствующие им углы дифракции (снизу). Деления на шкале соответствуют натуральным числам. Большие штрихи обозначают простые числа (сильные рефлекссы), средние штрихи обозначают степени простых чисел (рефлекссы средней интенсивности), остальные натуральные числа помечены малыми штрихами (рефлекссы отсутствуют).

Первый образец был изготовлен с масштабным коэффициентом  $a = 1.0 \mu\text{m}$ . Область дифракции была размером  $100 \times 100 \mu\text{m}$  и содержала всего лишь 29 щелей. АСМ изображение полученной мини-решетки представлено на рис. 1, *a*. Измеренная средняя глубина канавок оказалась равной приблизительно  $250\text{--}300 \text{ nm}$ . Видно, что на дне процарапанных областей присутствуют морщинистые наноструктуры нерегулярной формы. Области, которые не подвергались царапанию, оставались прозрачными и служили в качестве щелей.

Мини-решетка была закреплена на держателе и исследована на специально подготовленном измерительном стенде. Экспериментальная установка и полученная дифракционная картина представлены на рис. 1, *b*. На небольшой врезке в левом верхнем углу представлена оптическая микрофотография решетки. В качестве источника излучения был использован диодный лазер с длиной волны  $633 \text{ nm}$ . Луч лазера направлялся с помощью оптоволоконна на зеркало. Образец был установлен на оптический столик с системой микропозиционирования таким образом, чтобы зеркало отражало луч на активную область. Дифракционная картина наблюдалась на экране, расположенном на расстоянии  $30 \text{ cm}$  от решетки.

Несмотря на то что площадь активной области относительно невелика, она генерирует достаточно интенсивное дифракционное поле вокруг себя, в том числе и при больших углах рассеяния вблизи  $90^\circ$ . Дифракционная картина является симметричной, несмотря на то, что сама решетка асимметрична. Центральная часть дифракционной картины хорошо согласуется с предсказанной. В частности, первые дифракционные максимумы появляются на углах  $\pm 4^\circ$ , что соответствует значению  $\ln 2$  в формуле для условия конструктивной интерференции.

Чтобы установить влияние поляризации падающего луча на общий вид дифракционной картины, была проведена серия экспериментов, в которых в оптический путь была добавлена призма Глана–Тейлора. Юстировка осуществлялась стандартным способом по максимуму интенсивности. Никаких существенных изменений дифракционной картины в зависимости от того, был ли поляризован падающий луч параллельно или перпендикулярно щелям, обнаружено не было.

Второй образец был изготовлен с масштабным коэффициентом  $a = 0.8 \mu\text{m}$  на площади  $150 \times 150 \mu\text{m}$ . При подготовке шаблона для ее изготовления было учтено 73 нуля  $\xi$ -функции Римана. Число щелей было несколько меньше, так как если соседние нули  $\xi$ -функции оказывались расположенными слишком близко друг к другу, так что соответствующие щели начинали перекрываться, то мы формировали одну широкую щель вместо двух перекрывающихся. Также мы учли, что при пропорциональном уменьшении масштаба глубокое царапание могло привести к разрушению тонких возвышающихся элементов поверхностного рельефа. Во избежание этого мы уменьшили соответствующие технологические параметры процесса АСМ литографии, так что средняя глубина модуляции поверхностного рельефа в итоге уменьшилась до величины порядка  $80\text{--}100 \text{ nm}$ .

Дифракционная картина от апериодической решетки, изготовленной с масштабным множителем  $a = 0.8 \mu\text{m}$ , представлена на рис. 2. Вертикальные штрихи на (слегка искаженной) логарифмической шкале означают расчетные положения дифракционных максимумов. Большие штрихи обозначают простые числа (сильные рефлекссы), в то время как средние штрихи обозначают степени простых чисел (рефлекссы средней интенсивности). Остальные натуральные числа помечены малыми штрихами.

Для них когерентного сложения волн не наблюдается. Сжатие рассеивающего объекта в прямом пространстве приводит к обратно-пропорциональному растяжению фурье-образа в обратном пространстве. В связи с этим для решетки, изготовленной с масштабным коэффициентом  $0.8 \mu\text{m}$ , первые дифракционные максимумы появляются на углах  $\pm 5^\circ$  (соответствуют  $\ln 2$ ). Заметим также, что чем больше нулей  $\xi$ -функции Римана учитывается при изготовлении решетки, тем большее число щелей попадает под луч лазера, и тем больше простых чисел могут быть визуализированы в дифракционной картине.

## Заключение

Показана возможность создания нового типа дифракционных оптических элементов: аперидической дифракционной решетки, щели которой расположены в соответствии с распределением нетривиальных нулей дзета-функции Римана. Методами атомно-силовой нанолитографии была изготовлена серия образцов, отличавшихся друг от друга материалом подложки, размерами активной области, числом щелей, масштабным множителем, глубиной поверхностного рельефа и некоторыми второстепенными параметрами. Экспериментально наблюдаемые дифракционные картины от изготовленных аперидических решеток представляют собой визуализацию соотношений дуальности между нулями дзета-функции Римана и простыми числами.

Пока преждевременно говорить о возможном практическом применении полученных структур, однако среди их особенностей в первую очередь следует обратить внимание на быстрое увеличение числа рефлексов при увеличении угла рассеяния и значительную интенсивность рассеянного излучения на больших углах (близких к  $90^\circ$ ).

Обычно предполагается, что дифракционная решетка представляет собой периодическую структуру, которая расщепляет входящий пучок на несколько дифрагированных лучей, распространяющихся в разных направлениях. В нашем случае требование периодичности не является необходимым. Полученные нами структуры являются примером детерминированных аперидических структур.

Также обратим внимание на то, что при взаимном усилении волн подразумевается, что волны от соседних источников должны приходить в фазе по отношению друг к другу. Такова, например, дифракция Брэгга. В случае дифракции от детерминированных аперидических структур основным критерием является наличие существенной дискретной компоненты в фурье-образе соответствующей аперидической последовательности  $\delta$ -функций в целом.

## Финансирование работы

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда за счет гранта № 23-23-00392, <https://rscf.ru/project/23-23-00392/>.

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] B. Mazur, W. Stein. *Prime Numbers and the Riemann Hypothesis* (Cambridge University Press, 2015), DOI: 10.1017/CBO9781316182277
- [2] H.M. Edwards. *Riemann's Zeta Function* (Dover Publications, Mineola, 2001), DOI: 10.1017/CBO9781316182277
- [3] A.A. Coley. *Phys. Scr.*, **92**, 093003 (2017). DOI: 10.1088/1402-4896/aa83c1
- [4] С.М. Воронин, А.А. Карацуба. *Дзета-функция Римана* (Физматлит, М., 1994) [A.A. Karatsuba, S.M. Voronin. *The Riemann Zeta-Function* (Walter de Gruyter, Berlin—NY, 1992), DOI: 10.1515/9783110886146]
- [5] А.А. Карацуба. *УМН*, **40**, 19 (1985). <https://www.mathnet.ru/rus/rm2762> [A.A. Karatsuba. *Russ. Math. Surv.*, **40**, 23 (1985). DOI: 10.1070/rm1985v040n05abeh003682]
- [6] М.А. Королев. *Квант*, **2020** (3), 10 (2020). DOI: 10.4213/kvant20200302
- [7] M.V. Berry, J.P. Keating. *SIAM Rev.*, **41**, 236 (1999). DOI: 10.1137/S0036144598347497
- [8] G. Sierra. *Symmetry*, **11**, 494 (2019). DOI: 10.3390/sym11040494
- [9] A.M. Odlyzko. *Number Theory* (National Research Council, Washington, 1990), p. 35.
- [10] Ф. Дайсон. *УФН*, **180**, 859 (2010). DOI: 10.3367/UFNr.0180.201008f0859 [F. Dyson. *Not. Am. Math. Soc.*, **56**, 212 (2009). <https://www.ams.org/notices/200902/rtx090200212p.pdf>]
- [11] А.Е. Мадисон, П.А. Мадисон, С.В. Козырев. *Struct. Chem.*, **34**, 777 (2023). DOI: 10.1007/s11224-022-01906-2
- [12] Н.К. Павлычева. *Оптический журнал*, **89** (3), 28 (2022). DOI: 10.17586/1023-5086-2022-89-03-28-41 [N.K. Pavlycheva. *J. Opt. Technol.*, **89** (3), 142 (2022). DOI: 10.1364/JOT.89.000142]
- [13] N. Bonod, J. Neauport. *Adv. Opt. Photon.*, **8**, 156 (2016). DOI: 10.1364/AOP.8.000156
- [14] G. Zhou, Z.H. Lim, Y. Qi, F.S. Chau, G. Zhou. *Int. J. Optomechatron.*, **15**, 61 (2021). DOI: 10.1080/15599612.2021.1892248
- [15] L. Dal Negro (ed.) *Optics of Aperiodic Structures: Fundamentals and Device Applications* (Pan Stanford Publishing, Singapore, 2014), DOI: 10.1201/b15653
- [16] E. Macia. *Rep. Prog. Phys.*, **75**, 036502 (2012). DOI: 10.1088/0034-4885/75/3/036502
- [17] L. Dal Negro, R. Wang, F.A. Pinheiro. *Crystals*, **6**, 161 (2011). DOI: 10.3390/cryst6120161

- [18] A.C. Пирожков, Е.Н. Рагозин. УФН, **185**, 1203 (2015). DOI: 10.3367/UFNr.0185.201511d.1203 [A.S. Pirozhkov, E.N. Ragozin. Phys.-Uspekhi, **58**, 1095 (2015). DOI: 10.3367/UFNe.0185.201511d.1203]
- [19] R. Garcia, A.W. Knoll, E. Riedo. Nat. Nanotechnol., **9**, 577 (2014). DOI: 10.1038/nnano.2014.157
- [20] S. Chang, Y. Geng, Y. Yan. Nat. Nanotechnol., **5**, 2 (2022). DOI: 10.1007/s41871-021-00115-5
- [21] X. Xie, H. Chung, C. Sow, A. Wee. Mater. Sci. Eng. Rep., **54**, 1 (2022). DOI: 10.1016/j.mser.2006.10.001
- [22] Y. He, Y. Yan, Y. Geng, E. Brousseau. Appl. Surf. Sci., **427 A**, 1076 (2018). DOI: 10.1016/j.apsusc.2017.08.134
- [23] Y. Yan, S. Chang, T. Wang, Y. Geng. Polymers, **11**, 1590 (2019). DOI: 10.3390/polym11101590
- [24] G. Liu, S.H. Petrosko, Z. Zheng, C.A. Mirkin. Chem. Rev., **120**, 6009 (2020). DOI: 10.1021/acs.chemrev.9b00725
- [25] А.Е. Мадисон, П.А. Мадисон, Д.А. Козодаев, А.Н. Казанков, В.А. Мошников. *HOLOEXPO 2023: 20-я Международная конференция по голографии и прикладным оптическим технологиям (Сочи, 12–15 сентября): Тезисы докладов* (Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, СПб., 2023), с. 69. ISBN 978-5-7629-3209-7