01,14

Упругие модули четвертого порядка поликристалла: изотропного агрегата гексагональных монокристаллов

© *О.М. Красильников, Ю.Х. Векилов*

Национальный исследовательский технологический университет „МИСиС“,
Москва, Россия

E-mail: omkras@mail.ru

Поступила в Редакцию 18 марта 2024 г.
В окончательной редакции 18 марта 2024 г.
Принята к публикации 19 марта 2024 г.

Исследование нелинейной упругости твердых тел важно как для физики твердого тела, так и для других разделов науки. В настоящей работе свободная энергия Гиббса изотропного твердого тела при давлении P и температуре T разлагается по инвариантам тензора конечных деформаций Лагранжа, включая вклад четвертого порядка по компонентам деформации. На этой основе дано определение упругих модулей четвертого порядка поликристалла (коэффициентов Ламе четвертого порядка) при произвольном давлении (соответствующие коэффициенты второго и третьего порядка хорошо известны). Используя линейные инварианты тензора упругих постоянных четвертого порядка, мы получили соотношения, которые определяют коэффициенты Ламе четвертого порядка через упругие постоянные того же порядка монокристаллических зерен с гексагональной симметрией, образующих поликристалл. Значения коэффициентов Ламе второго, третьего и четвертого порядка найдены для магния и эрбия, у которых известны все упругие постоянные соответствующих порядков монокристаллов.

Ключевые слова: поликристаллические материалы, нелинейная упругость, коэффициенты Ламе четвертого порядка.

DOI: 10.61011/FTT.2024.04.57783.57

1. Введение

Упругие постоянные высшего порядка играют важную роль в физике твердого тела. С атомной точки зрения, на языке динамики решетки, упругие постоянные высшего порядка представляют ангармонические эффекты. Они могут быть использованы для расчета производных частот фононов по деформации (параметров Грюнайзена) и сечений рассеяния этих фононов. Прежде всего это касается упругих постоянных третьего и четвертого порядка (TOEC и FOEC соответственно).

С другой стороны, TOEC и FOEC определяют нелинейный отклик твердого тела на конечную деформацию, зависимость скорости звука от приложенной нагрузки [1,2], искажение формы ультразвуковой волны конечной амплитуды при распространении ее в твердом теле и амплитуды второй и третьей гармоник [3–6], позволяют также оценить идеальную прочность и пластичность металлов [7]. Они важны для понимания закономерностей распространения волн в материалах, находящихся под очень высоким давлением, когда давление становится сравнимым с упругими постоянными. Примером служат термоупругие свойства недр Земли [8,9].

Поликристаллические материалы важны с практической точки зрения. Наиболее удобным способом описания упругих свойств этих материалов является использование модели изотропных сред. Упругие модули поликристалла (коэффициенты Ламе) можно получить путем усреднения упругих постоянных различного порядка монокристалла по всем ориентациям монокристаллических зерен [10–13]. Соотношения между коэффициентами Ламе второго порядка (SOLC), коэффициентами Ламе третьего порядка (TOLC) и упругими постоянными монокристалла при нормальном давлении приведены в работах [11–15]. Обобщение этих соотношений для поликристалла при произвольном гидростатическом давлении P дано в [16]. Соотношения между коэффициентами Ламе четвертого порядка (FOLC) и FOEC монокристалла с кубической решеткой при произвольном давлении получены в [17].

Эти соотношения позволяют моделировать нелинейные упругие свойства поликристаллов *ab initio*, поскольку теория функционала плотности (DFT) позволяет рассчитать упругие постоянные высшего порядка монокристалла при произвольном давлении [18–20]. Используя соотношения между коэффициентами Ламе и упругими постоянными высшего порядка, мы можем определить нелинейные модули упругости поликристалла при данном P, которые важны для понимания структурного поведения и физических свойств материалов под нагрузкой.

В настоящей работе мы рассматриваем случай, когда монокристаллические зерна, образующие поликристалл, имеют гексагональную структуру, поскольку эта структура, вместе с кубической, характерна для металлов. Приведены соотношения между FOLC и FOEC гексагонального кристалла, которые важны для технических приложений. В качестве примера рассчитаны коэффициенты Ламе второго, третьего и четвертого порядка поликристаллических магния и эрбия.

2. Основные определения и соотношения

Рассмотрим предварительно нагруженный монокристалл. В качестве исходного состояния выбираем состояние равновесия при температуре T и давлении P. При заданных P и T состояние системы описывается свободной энергией Гиббса G. Пусть монокристалл подвергается малой, но конечной деформации, описываемой тензором Лагранжа с компонентами η_{ij}. Изотермические эффективные упругие постоянные второго и более высокого порядка предварительно нагруженного кристалла определяются соотношением [18]:

$$C_{ijkl\ldots} = \frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial^n G}{\partial\eta_{ij}\partial\eta_{kl\ldots}}\right)_T, \quad n \geq 2, \tag{1}$$

где V_0 — объем в исходном состоянии. Упругие постоянные (1) непосредственно входят в соотношения, связывающие тензор напряжений Коши (истинные напряжения) с компонентами η_{ij} [21]. При $P = 0$ соотношение (1) совпадает со стандартным определением упругих постоянных n-го порядка ненагруженного кристалла [22].

Величина G для деформированного изотропного тела при заданных P и T инвариантна относительно вращений и смещений тела как целого, и не зависит от выбора системы координат. Следовательно, свободная энергия Гиббса должна быть функцией инвариантов тензора деформации. Тензор деформации имеет три главных инварианта первой, второй и третьей степени по компонентам η_{ij} [1]:

$$I_1 = \mathrm{tr}(\eta) = \eta_{11} + \eta_{22} + \eta_{33}, \tag{2a}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}\eta)^2 - \mathrm{tr}\eta^2\right] = (\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}^2) + (\eta_{11}\eta_{33} - \eta_{13}^2) + (\eta_{22}\eta_{33} - \eta_{23}^2), \tag{2b}$$

$$I_3 = \det\eta = \eta_{11}\eta_{22}\eta_{33} + 2\eta_{23}\eta_{13}\eta_{12} - \eta_{11}\eta_{23}^2 - \eta_{22}\eta_{13}^2 - \eta_{33}\eta_{12}^2. \tag{2c}$$

Вместе с главными инвариантами можно использовать их комбинации:

$$\bar{I}_1 = I_1, \quad \bar{I}_2 = \mathrm{tr}\eta^2 = I_1^2 - 2I_2, \quad \bar{I}_3 = \mathrm{tr}\eta^3 = 3I_3 + I_1^3 - 3I_1I_2. \tag{3}$$

Разложим G вблизи состояния равновесия по инвариантам тензора деформации, включая вклады четвертого порядка по компонентам η_{ij}. Коэффициенты этого разложения представляют собой коэффициенты Ламе соответствующего порядка. Свободная энергия Гиббса имеет минимум в равновесном состоянии, поэтому $\partial G/\partial I_1|_0 = 0$, и разложение начинается с квадратичного вклада по деформации. Из главных инвариантов (2) можно создать два квадратичных скаляра (I_1^2, I_2), три кубических (I_1^3, I_1I_2, I_3) и четыре — четвертого порядка $(I_1^4, I_1^2I_2, I_1I_3, I_2^2)$. То же самое возможно и для инвариантов $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3$.

Разложение энергии деформированного изотропного твердого тела с учетом вкладов третьего порядка рассматривалось в ряде работ [1,4,10,23–25]. Использовались различные определения TOLC, что связано с разложением по инвариантам (2) или (3). Приведем три наиболее известных определения: Мурнагана (l, m, n — разложение по инвариантам (2)); Тоупина и Бернштейна (ν_1, ν_2 и ν_3 — разложение по инвариантам (3)); Ландау и Лифшица (A, B и C — разложение по инвариантам (3)). Определение TOLC Тоупина и Бернштейна более удобное (ν_i совпадают с независимыми упругими постоянными изотропного твердого тела), поэтому мы дадим соотношения, связывающие их с другими определениям TOLC [24,25]:

$$\left.\begin{aligned} \nu_1 &= 2(l - m) + n = 2C \\ \nu_2 &= m - 1/2\,n = B \\ \nu_3 &= n/4 = A/4 \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Выражение для свободной энергии Гиббса при заданных P и T на единицу объема V_0 в исходном состоянии с учетом вклада четвертого порядка по η_{ij} представим в виде

$$\frac{\Delta G}{V_0} = \frac{\lambda + 2\mu}{2} I_1^2 - 2\mu I_2 + \frac{\nu_1 + 6\nu_2 + 8\nu_3}{6} I_1^3 - 2(\nu_2 + 2\nu_3)I_1I_2 + 4\nu_3 I_3 + \frac{1}{24}\xi_1 I_1^4 - \left(\frac{\xi_1 - \xi_2}{8} + \frac{\xi_4}{3}\right)I_1^2I_2 + \left(\frac{\xi_1 - \xi_2}{8} + \frac{\xi_4}{3} - \xi_3\right)I_1I_3 + \frac{2}{3}\xi_4 I_2^2, \tag{5}$$

где $\Delta G = G(P, T, \eta) - G(P, T, 0)$, λ и μ — SOLC, ν_i — TOLC, ξ_i — FOLC.

При таком определении коэффициентов Ламе они совпадают с упругими постоянными изотропного твердого тела. Для второго и третьего порядка [11,24]

$$\lambda = C_{12}^*, \mu = C_{44}^*, \nu_1 = C_{123}^*, \nu_2 = C_{144}^*, \nu_3 = C_{456}^*. \tag{6}$$

Для четвертого порядка [17]

$$\xi_1 = C_{1111}^*, \ \xi_2 = C_{1122}^*, \ \xi_3 = C_{1144}^*, \ \xi_4 = C_{4444}^*. \tag{7}$$

Здесь упругие постоянные изотропного твердого тела даны в обозначениях Фогта (11 — 1, 22 — 2, 33 — 3, 23 — 4, 13 — 5, 12 — 6).

Разложение энергии упругой деформации, включая вклад четвертого порядка (η^4), приведено в работах [6,26,27], где рассматривалось распространение звука в нелинейных изотропных твердых телах, и в работах [28,29] для оценки модулей сдвига четвертого порядка в металлических стеклах. При этом использовались инварианты, определяемые уравнениями (3). В первом случае FOLC обозначались как E, F, G, H, во втором — как γ_1, γ_2, γ_3, γ_4. Приведем соотношения, связывающие эти FOLC с параметрами ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, которые используются в настоящей работе

$$\left.\begin{aligned} H &= \frac{1}{24}\gamma_1 = \frac{1}{6}\left(\frac{\xi_2}{4} - \xi_3 + \frac{\xi_4}{3}\right)\\ F &= \frac{1}{2}\gamma_2 = \frac{1}{2}\left(\xi_3 - \frac{2}{3}\xi_4\right)\\ E &= \frac{4}{3}\gamma_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{\xi_1 - \xi_2}{8} - \xi_3 + \frac{\xi_4}{3}\right)\\ G &= \frac{1}{2}\gamma_4 = \frac{1}{6}\xi_4 \end{aligned}\right\}. \qquad (8)$$

Видно, что определенные в этих работах коэффициенты Ламе выражаются через комбинации упругих постоянных изотропного тела, что не удобно для практического применения.

Поликристалл можно рассматривать как изотропный агрегат монокристаллических зерен. Зерна произвольно ориентированы, их размеры бесконечно малы по сравнению с размерами образца, но достаточно велики, чтобы обладать объемно-упругими свойствами. Метод усреднения Фогта [12,13] используется для расчета упругих констант изотропного материала (коэффициентов Ламе). Следуя Фогту, мы считаем, что все монокристаллические зерна в поликристалле находятся в одном и том же деформированном состоянии, поэтому упругие константы такого материала равны тензору упругих постоянных, усредненному по всем направлениям

$$C^V_{ijkl\ldots} = (C_{ijkl\ldots})_{Av}. \qquad (9)$$

Обычно эту процедуру называют „гомогенизацией“.

3. Методика и детали расчета

Для расчета „гомогенезированных“ значений (9) удобно использовать метод линейных инвариантов тензора упругих постоянных, использованный в [12,14,30,31] при вычислении средних по Фогту для TOEC. Для случайной ориентации зерен соотношения между ξ_i и FOEC можно получить из условия равенства линейных инвариантов двух тензоров, представляющих монокристалл и поликристалл.

В Приложении дан вывод линейных инвариантов FOEC для гексагонального кристалла. Выражения для линейных инвариантов изотропного тела приведены в [17] (формулы (19))

$$\left.\begin{aligned} L_1^{\text{is}} &= 3(3\xi_1 + 24\xi_2 - 24\xi_3 - 16\xi_4)\\ L_2^{\text{is}} &= 6\xi_1 + 3\xi_2 + 12\xi_3 + 28\xi_4\\ L_3^{\text{is}} &= (33\xi_1 - 21\xi_2 - 24\xi_3 + 64\xi_4)/4\\ L_4^{\text{is}} &= 3(57\xi_1 - 9\xi_2 + 24\xi_3 - 104\xi_4)/16 \end{aligned}\right\}. \qquad (10)$$

Приравняв соответствующие инварианты (10) и (A3a)−(A3d) из Приложения, из полученной системы уравнений найдем соотношения, определяющие коэффициенты Ламе четвертого порядка через FOEC гексагонального кристалла

$$\begin{aligned} \xi_1 = \frac{1}{315}\Big(&64C_{1111} + 64C_{2222} + 35C_{3333} + 128C_{4444}\\ &+ 32C_{1113} + 48C_{1133} + 192C_{1155} + 40C_{1333}\\ &+ 384C_{1355} + 32C_{2223} + 192C_{2244} + 240C_{3344}\Big), \end{aligned} \qquad (11a)$$

$$\begin{aligned} \xi_2 = \frac{1}{105}\Big(&C_{1111} + C_{2222} + C_{3333} + \frac{64}{3}C_{4444} - \frac{8}{3}C_{6666}\\ &+ 22C_{1122} + 16C_{1113} + 24C_{1123} + 40C_{1133} + 48C_{1144}\\ &+ 8C_{1333} + 16C_{1344} - 48C_{1355} - 8C_{2223} - 16C_{2244}\\ &- 8C_{3366} + 32C_{4466}\Big), \end{aligned} \qquad (11b)$$

$$\begin{aligned} \xi_3 = \frac{1}{315}\Big(&0.5C_{1111} + 0.5C_{2222} + C_{3333} + 32C_{4444}\\ &+ 16C_{6666} + 15C_{1122} - 14C_{1113} - 39C_{1123} + 9C_{1133}\\ &+ 2C_{1333} + 132C_{1144} + 72C_{1155} - 72C_{1355} + 72C_{1344}\\ &+ 25C_{2223} - 84C_{2244} + 6C_{3344} + 69C_{3366} - 24C_{4466}\Big), \end{aligned} \qquad (11c)$$

$$\begin{aligned} \xi_4 = \frac{1}{105}\Big(&\frac{7}{8}C_{1111} + \frac{7}{8}C_{2222} + C_{3333} + 24C_{4444} + 23C_{6666}\\ &- 0.75C_{1122} + 6C_{1133} - 2C_{1113} + 6C_{1144} - 24C_{1155}\\ &+ 3C_{1123} - 4C_{1333} - 12C_{1344} - 12C_{1355} - 5C_{2223}\\ &+ 30C_{2244} + 12C_{3344} + 6C_{3366} + 60C_{4466}\Big). \end{aligned} \qquad (11d)$$

4. Результаты расчета и их обсуждение

Выбор материалов с гексагональной структурой, для которых известен полный набор FOEC, очень ограничен. Мы анализируем гомогенизированные модули второго, третьего и четвертого порядка (коэффициенты Ламе) магния и эрбия со случайной ориентацией зерен, имеющих гексагональную структуру, для которых

Таблица 1. Результаты расчетов коэффициентов Ламе

Metal	λ	μ	ν_1	ν_2	ν_3	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4
Mg	23.7	17.4	−35.2	−20.2	−61	7665	861	311	659
Er	25.8	28.3	368	−253	102	6480	742	271	556

Примечание. Все значения даны в GPa ($P = 0$, $T = 300$ K).

Таблица 2. Значения C^*_{11}, C^*_{111} и C^*_{1111} (GPa)

Metal	$C^*_{11} = \lambda + 2\mu$	$C^*_{111} = \nu_1 + 6\nu_2 + 8\nu_3$	$C^*_{1111} = \xi_1$
Mg	58.5	−644	7665
Er	82.4	−334	6480

известны необходимые упругие постоянные. Данные по упругим постоянным второго–четвертого порядка Mg и Er приведены в [34]. Значения SOEC и TOEC определены экспериментально (нормальное давление, комнатная температура). Полный набор FOEC получен из анализа данных по упругим постоянным второго и третьего порядка. Значения упругих постоянных $C_{2222}, C_{2244}, C_{3366}, C_{4466}, C_{6666}$, которые отсутствуют в [34], найдены из соотношений между FOEC гексагонального кристалла (см. [33]). Соотношения для расчета коэффициентов Ламе второго и третьего порядка приведены в [16] (формулы (24)−(28)), четвертого порядка — формулы (11a)−(11d).

Результаты наших расчетов с использованием данных по упругим постоянным Mg и Er приведены в табл. 1.

Коэффициенты Ламе третьего порядка имеют в основном отрицательные значения, четвертого порядка — положительные.

Для анализа изменений упругих постоянных второго–четвертого порядка изотропного твердого тела в табл. 2 приведены значения C^*_{11}, C^*_{111} и C^*_{1111}.

Видно, что при переходе от второго к четвертому порядку упругие постоянные увеличиваются по модулю примерно на порядок при каждом переходе.

5. Заключение

Дано определение модулей упругости четвертого порядка поликристаллов (коэффициентов Ламе четвертого порядка) при произвольных давлении и температуре путем разложения свободной энергии Гиббса по инвариантам тензора конечных деформаций Лагранжа. Рассмотрен случай поликристалла с произвольно ориентированными зернами гексагональной симметрии. Получены соотношения, определяющие коэффициенты Ламе четвертого порядка такого поликристалла через упругие постоянные четвертого порядка монокристаллических зерен. Коэффициенты Ламе второго, третьего и четвертого порядка поликристаллических магния и эрбия рассчитаны с использованием имеющихся данных по упругим постоянным монокристаллов этих материалов.

Финансирование работы

Работа выполнена при финансовой поддержке федеральной программы академического лидерства „Приоритет 2030“ (Стратегический проект МИСиС „Квантовый интернет“). Ю.Х. Векилов также благодарит за финансовую поддержку Российский научный фонд (проект № 22-12-00193).

Приложение

Линейные инварианты тензора FOEC гексагонального кристалла.

При переходе от одного ортонормированного базиса к другому компоненты тензора восьмого ранга преобразуются по закону [32]:

$$C'_{ijklmnop} = a_{iq}a_{jr}a_{ks}a_{lt}a_{mu}a_{nv}a_{ow}a_{px}C_{qrstuvwx}, \quad \text{(A1)}$$

где $a_{iq,\ldots}$ — направляющие косинусы между координатными осями. Тензор FOEC имеет четыре линейных инварианта, которые не изменяются при любом ортогональном преобразовании векторного базиса. Чтобы получить эти инварианты, матрицы вращения в уравнении (A1) следует взять парами и изменить их индексы таким образом, чтобы произведение каждой из этих пар стало δ-функцией Кронекера ($\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, и 0, если $i \neq j$) [32].

Например, если выбрать $i = j$, $k = l$, $m = n$ и $o = p$ получим, что

$$\begin{aligned} L_1 &= C'_{iikkmmpp} \\ &= (a_{iq}a_{ir})(a_{ks}a_{kt})(a_{mu}a_{mv})(a_{pw}a_{px})C_{qrstuvwx} \\ &= \delta_{qr}\delta_{st}\delta_{uv}\delta_{wx}C_{qrstuvwx}. \end{aligned} \quad \text{(A2a)}$$

Взяв $i = m$, $j = n$, $k = o$ и $l = p$ получаем второй инвариант:

$$L_2 = C'_{ijklijkl} = \delta_{qu}\delta_{rv}\delta_{sw}\delta_{tx}C_{qrstuvwx}. \quad \text{(A2b)}$$

Затем, положив $i = k$, $j = m$, $l = o$, $n = p$ находим

$$L_3 = C'_{ijiljnln} = \delta_{qs}\delta_{ru}\delta_{tw}\delta_{vx}C_{qrstuvwx}, \quad \text{(A2c)}$$

и при $i = l$, $j = n$, $k = m$, $o = p$

$$L_4 = C'_{ijkikjoo} = \delta_{qt}\delta_{rv}\delta_{su}\delta_{wx}C_{qrstuvwx}. \quad \text{(A2d)}$$

Как обычно, по повторяющимся индексам идет суммирование от 1 до 3.

Для случая гексагональной симметрии (Лауэ группа HI: точечные группы $\bar{6}2m$, $6mm$, 622, $\frac{6}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}$, 19 независимых FOEC [33]) выражения для линейных инвариантов (уравнения (A2))имеют вид

$$\begin{aligned} L_1^H &= 2(C_{1111} + C_{2222}) + C_{3333} + 12C_{1122} + 16C_{1113} \\ &+ 24C_{1133} + 24C_{1123} + 8C_{1333} - 8C_{2223} - 24C_{3366} - 16C_{6666}, \end{aligned} \quad \text{(A3a)}$$

$$L_2^H = 1.5(C_{1111} + C_{2222}) + C_{3333} + \frac{32}{3} C_{4444} + \frac{20}{3} C_{6666} + C_{1122} + 4C_{1133} + 8C_{1144} + 8C_{2244} + 4C_{3366} + 8C_{3344} + 16C_{4466}, \quad \text{(A3b)}$$

$$L_3^H = \frac{7}{4}(C_{1111} + C_{2222}) + C_{3333} + \frac{16}{3} C_{4444} + \frac{10}{3} C_{6666} - 1.5C_{1122} - 4C_{1144} + 12C_{2244} - 4C_{1344} + 12C_{1355} + 8C_{3344} + 8C_{4466}, \quad \text{(A3c)}$$

$$L_4^H = 2(C_{1111} + C_{2222}) + C_{3333} - 4C_{6666} + C_{1113} - 1.5C_{1123} + 2C_{1333} + 12C_{1155} + 3C_{1344} + 15C_{1355} + 2.5C_{2223} + 6C_{3344} - 12C_{4466}. \quad \text{(A3d)}$$

Здесь $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — изотермические упругие постоянные четвертого порядка при заданных P и T в обозначениях Фогта.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] D.C. Wallace. In: Solid State Physics / Eds H. Ehrenreich, F. Seitz, D. Turnbull. Academic Press, N.Y. (1970). V. 25. P. 301.
[2] Y. Hiki. Annu. Rev. Mater. Sci. **11**, *1*, 51 (1981).
[3] О.В. Руденко, С.И. Солуян. Теоретические основы нелинейной акустики. Наука, М. (1975). 287 с. [O.V. Rudenko, S.I. Soluyan. Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics. Plenum, Consultants Bureau, N.Y. (1977)].
[4] Л.К. Зарембо, В.А. Красильников. УФН **102**, *12*, 549 (1970). [L.K. Zarembo, V.A. Krasil'nikov. Sov. Phys. Usp. **13**, *6*, 778 (1971)].
[5] J.N. Cantrell Jr. Phys. Rev. B **21**, *10*, 4191 (1980).
[6] Е.А. Заболотская. Акуст. журн. **32**, *4*, 474 (1986). [E.A. Zabolotskaya. Sov. Phys. Acoust. **32**, *4*, 296 (1986)].
[7] M. de Jong, I. Winter, D.C. Chrzan, M. Astra. Phys. Rev. B **96**, *1*, 014105 (2017).
[8] D. Antonangeli, S. Merkel, D.L. Farber. Geophys. Res. Lett. **33**, *24*, L24303 (2006).
[9] X. Sha, R.E. Cohen. Geophys. Res. Lett. **37**, *10*, L10302 (2010).
[10] R.A. Toupin, B. Bernstein. J. Acoust. Soc. Am. **33**, *2*, 216 (1961).
[11] R. Chang. Appl. Phys. Lett. **11**, *10*, 305 (1967).
[12] G.R. Barsch. J. Appl. Phys. **39**, *8*, 3780 (1968).
[13] V.A. Lubarda. J. Mech. Phys. Solids **45**, *4*, 471 (1997).
[14] D.N. Blaschke. J. Appl. Phys. **122**, *14*, 145110 (2017).
[15] C.M. Kube, J.A. Turner. J. Elasticity **122**, *2*, 157 (2016).
[16] O.M. Krasilnikov, A.V. Lugovskoy, Yu.Kh. Vekilov, Yu.E. Lozovik. Mat. Des. **139**, 1 (2018).
[17] O.M. Krasilnikov, Yu.Kh. Vekilov. Phys. Rev. B **100**, *13*, 134107 (2019).
[18] Ю.Х. Векилов, О.М. Красильников, А.В. Луговской. УФН **185**, *11*, 1215 (2015). [Yu.Kh. Vekilov, O.M. Krasilnikov, A.V. Lugovskoy. Phys. -Usp. **58**, *11*, 1106 (2015)].
[19] Yu.Kh. Vekilov, O.M. Krasilnikov, A.V. Lugovskoy, Yu.E. Lozovik. Phys. Rev. B **94**, *10*, 104114 (2016).
[20] I. Mosygin, A.V. Lugovskoy, O.M. Krasilnikov, Yu.Kh. Vekilov, S.I. Simak, I.A. Abrikosov. Comput. Phys. Commun. **220**, 20 (2017).
[21] O.M. Krasilnikov, Yu.Kh. Vekilov, S.I. Simak. Phys. Rev. B **105**, *22*, 226101 (2022).
[22] K. Brugger. Phys. Rev. **133**, *6A*, A1611 (1964).
[23] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория упругости. Наука, М. (1987). 248 с. [L.D. Landau, E.M. Lifshitz. Theory of Elasticity. Paperback Bunko (1984)].
[24] W. Wasserbach. Physica Status Solidi B **159**, *2*, 689 (1990).
[25] A. Norris. In: Nonlinear Acoustics / Eds M.F. Hamilton, D.T. Blackstock. Academic Press, San Diego (1998). Ch. 9. P. 263.
[26] M.F. Hamilton, Y.A. Ilinskii, E.A. Zabolotskaya. J. Acoust. Soc. Am. **116**, *1*, 41 (2004).
[27] M. Destrade, R.W. Ogden. J. Acoust. Soc. Am. **128**, *6*, 3334 (2010).
[28] Н.П. Кобелев, Е.Л. Колыванов, В.А. Хоник. ФТТ **49**, *7*, 1153 (2007). [N.P. Kobelev, E.L. Kolyvanov, V.A. Khonik. Phys. Solid State **49**, *7*, 1209 (2007)].
[29] R.A. Konchakov, A.S. Makarov, G.A. Afonin, Y.P. Mitrofanov, N.P. Kobelev, A.V. Khonik. J. Alloys Compd. **714**, 168 (2017).
[30] R. Chang, L.J. Graham. Mater. Res. Bull. **3**, *9*, 745 (1968).
[31] H.J. Juretschke. Appl. Phys. Lett. **12**, *6*, 213 (1968).
[32] Ю.И. Сиротин, М.П. Шаскольская. Основы кристаллофизики. Наука, М. (1979). 639 с. [Iu.I. Sirotin, M.P. Shaskol'skaia. Fundamentals of Crystal Physics. Mir Publishers (1982)].
[33] R. Brendel. Acta Cryst. A **35**, *Part 4*, 525 (1979).
[34] A.G. Every, A.K. McCurty. In: Second and Higher order Elastic Constants. Landolt-Bornstein. New Ser. Group III / Ed. D.F. Nelson. Springer, Berlin (1992). V. 29a. 682 p.

Редактор Е.В. Толстякова